B. G. TEUBNERS LEHRBÜCHER
DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN XXVII, 2

R. STURM

DIE LEHRE VON DEN GEOMETRISCHEN VERWANDTSCHAFTEN

II

B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen.

gr. 8. geb.

...902. n. ℳ 14.—. [Bd. X, 1.]

E. Blaschke, Vorlesungen über mathematische Statistik. Die Lehre von den statistischen Maßzahlen. Mit 17 Textfiguren und 5 Tafeln. VIII, 268 S. 1906. n. ℳ 7.40. [Bd. XXIII.]

H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. VIII, 310 S. und Anhang 18 S. 1906. n. ℳ 8.40. [Bd. XVII.]

G. H. Bryan, Thermodynamics. An introductory Treatise dealing mainly with first Principles and their direct Applications. Mit 26 Fig. XIV, 204 S. 1907. n. ℳ 7.—. (Englisch.) [Bd. XXI.]

E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 2. Auflage in 2 Bänden. I. Band: Wahrscheinlichkeitstheorie. Fehlerausgleichung. Kollektivmaßlehre. Mit 18 Fig. im Text. X, 410 S. 1908. n. ℳ 12.—. [Bd. IX, 1.]

L. E. Dickson, linear Groups with an Exposition of the Galois Field theory. X, 312 S. 1901. n. ℳ 12.—. (Englisch.) [Bd. VI.]

O. Fischer, theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper mit speziellen Anwendungen auf den Menschen, sowie auf einige Bewegungsvorgänge an Maschinen. In möglichst elementarer und anschaulicher Weise dargestellt. Mit 67 Fig. u. 4 Taf. X, 372 S. 1906. n. ℳ 14.—. [Bd. XXII.]

A. Gleichen, Lehrbuch der geometrischen Optik. Mit 251 Fig. XIV, 511 S. 1902. n. ℳ 20.—. [Bd. VIII.]

A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 10 Figuren. XXIV, 509 S. 1903. n. ℳ 24.—. [Bd. XII.]

H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsch von Joh. Friedel. Mit 79 Fig. XVI, 787 S. 1907. n. ℳ 20.—. [Bd. XXVI.]

R. von Lilienthal, Vorlesungen über Differentialgeometrie. In 2 Bänden. I. Band: Kurventheorie. Mit 26 Fig. VI, 368 S. n. ℳ 12.—. [Bd. XXVIII, 1.]

TS 50:708.

G. Loria, spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Deutsch von Fr. Schütte. Mit 174 Fig. auf 17 lithogr. Tafeln. XXI, 744 S. 1902. n. ℳ 28.—. [Bd. V.]

—— Vorlesungen über darstellende Geometrie. Deutsch von Fr. Schütte. In 2 Teilen. I. Teil: Die Darstellungsmethoden. Mit 163 Figuren. XI, 219 S. 1906. n. ℳ 6.80. [Bd. XXV, 1.]

A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität. Deutsch unter Mitwirkung des Verfassers von A. Timpe. Mit 75 Abbildungen. XVI, 664 S.] 1907. n. ℳ 16.—. [Bd. XXIV.]

E. Netto, Lehrbuch der Kombinatorik. VIII, 260 S. 1901. n. ℳ 9.—. [Bd. VII.]

W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie. 2 Bände. I. Band. Mit 150 Figuren. XII, 642 S. 1907. n. ℳ 15.60. [Bd. XX, 1.]

E. Pascal, die Determinanten. Eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die neueren Forschungen. Berechtigte deutsche Ausgabe von H. Leitzmann. XVI, 266 S. 1900. ℳ 10.—. [Bd. III.]

Fr. Pockels, Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Figuren und 6 Doppeltafeln. [X, 519 S. 1906. n. ℳ 16.—. [Bd. XIX.]

D. Seliwanoff, Lehrbuch der Differenzenrechnung. VI, 92 S. 1904. n. ℳ 4.—. [Bd. XIII.]

O. Staude, analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. Mit 387 Figuren. VIII, 447 S. 1905. n. ℳ 14.—. [Bd. XVI.]

O. Stolz und **J. A. Gmeiner**, theoretische Arithmetik. 2., umgearbeitete Aufl. ausgewählter Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz. XI, 402 S. 1902. n. ℳ 10.60. [Bd. IV.]

—— Einleitung in die Funktionentheorie. 2., umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik“ nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“ von O. Stolz. Mit 21 Fig. X, 598 S. 1905. n. ℳ 15.—. [Bd. XIV.]

R. Sturm, die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. 4 Bände. I. Band: Die Verwandtschaften zwischen Gebilden erster Stufe. XII, 415 S. 1908. n. ℳ 16.—. [Bd. XXVII, 1.]

H. E. Timerding, Geometrie der Kräfte. X, 380 S. 1908. n. ℳ 16.—. [Bd. I.]

J. G. Wallentin, Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre. Mit 81 Fig. X, 444 S. 1904. n. ℳ 12.—. [Bd. XV.]

E. von Weber, Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. XI, 622 S. 1900. n. ℳ 24.—. [Bd. II.]

A. G. Webster, the Dynamics of Particles and of rigid, elastic, and fluid Bodies, being Lectures on mathematical Physics. Mit 172 Fig. XII, 588 S. 1904. n. ℳ 14.—. (Englisch.) [Bd. XI.]

E. J. Wilczynski, projective differential Geometry of Curves and ruled Surfaces. VIII, 298 S. 1906. n. ℳ 10.—. (Englisch.) [Bd. XVIII].

Unter der Presse:

E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2. Aufl. 2 Bände. II. Band.

H. A. Lorentz, on the Theory of Electrons and its Application to the Phenomena of Light and Radiant Heat. [In englischer Sprache.]

G. Loria, Vorlesungen über darstellende Geometrie. 2 Teile. II. Teil.

R. Sturm, die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. 4 Bände. II. Band.

In Vorbereitung:

P. Bachmann, niedere Zahlentheorie. 2 Bände. II. Band.
M. Bôcher, über die reellen Lösungen der gewönhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
H. Broecker, Lehrbuch der Versicherungsmathematik.
G. Castelnuovo und **F. Enriques,** Theorie der algebraischen Flächen.
M. Dehn, Lehrbuch der Analysis situs.
F. Dingeldey, Lehrbuch der analytischen Geometrie.
—— Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme.
—— Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Diff.- u. Integralrechnung.
G. Eneström (in Verbindung mit anderen Gelehrten), Handbuch der Geschichte der Mathematik.
F. Engel, Einführung in die Theorie der Transformationsgruppen.
F. Enriques, Prinzipien der Geometrie.
Ph. Forchheimer, Lehrbuch der Hydraulik.
R. Fueter, komplexe Multiplikation.
Ph. Furtwängler, die Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate.
M. Grübler, Lehrbuch der hydraulischen Motoren.
A. Guldberg, Lehrbuch der linearen Differenzengleichungen.
J. Harkness, elliptische Funktionen.
L. Henneberg, Lehrbuch der graphischen Statik.
G. Herglotz, Lehrbuch der Kugel- und verwandter Funktionen.
K. Heun u. **v. Mises,** die kinetischen Probleme der modernen Maschinenlehre.
G. Jung, Geometrie der Massen.
H. Lamb, Akustik.
R. von Lilienthal, Vorlesungen über Differentialgeometrie. 2 Bände. II. Bd.
A. Loewy, Vorlesungen über die Theorie der linearen Substitutionsgruppen.
R. Mehmke, Vorlesungen über Vektoren- und Punktrechnung.
W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie. 2 Bände. II. Band.
E. Ovazza, aus dem Gebiete der Mechanik.
S. Pincherle, Funktional-Gleichungen und -Operationen.
A. Pringsheim, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre.
C. Segre, Vorlesungen über algebraische Geometrie, mit besonderer Berücksichtigung der mehrdimensionalen Räume.
P. Stäckel, Lehrbuch der allgemeinen Dynamik.
—— Differentialgeometrie höherer Mannigfaltigkeiten.
O. Staude, Flächen und Flächensysteme zweiter Ordnung.
R. Sturm, die Lehre von den geometr. Verwandtschaften. 4 Bde. Bd. III u. IV.
—— die kubische Raumkurve.
K. Th. Vahlen, Elemente der höheren Algebra.
A. Voss, Prinzipien der rationellen Mechanik
—— Abbildung und Abwicklung der krummen Flächen.
A. G. Webster, partial Differential Equations of Mathem. Phys. (Englisch.)
A. Wiman, endliche Gruppen linearer Transformationen.
W. Wirtinger, algebraische Funktionen und ihre Integrale.
—— partielle Differentialgleichungen.
H. G. Zeuthen, die abzählenden Methoden der Geometrie.

☞ Nähere Angaben über obige Werke befinden sich in meinem mathematischen Katalog, den ich zu verlangen bitte. Verlagsanerbieten für die Sammlung werden mir jederzeit willkommen sein.

Leipzig, Poststr. 3.
Juli 1908.

B. G. Teubner.

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSZ IHRER ANWENDUNGEN
BAND XXVII,2

DIE LEHRE VON DEN GEOMETRISCHEN VERWANDTSCHAFTEN

VON

RUDOLF STURM

ZWEITER BAND

DIE EINDEUTIGEN LINEAREN VERWANDTSCHAFTEN ZWISCHEN GEBILDEN ZWEITER STUFE

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908

Inhaltsverzeichnis des zweiten Bandes.

Dritter Teil.

Eindeutige lineare Verwandtschaften zwischen zweistufigen Gebilden.

Vierter Teil.

Ausartungen der Korrelation und Kollineation, Abzählungen, lineare Systeme.

Inhaltsverzeichnis der weiteren Bände.

Band I.

Erster Teil.

Eindeutige Verwandtschaften zwischen einstufigen Gebilden.

Zweiter Teil.

Einführung mehrdeutiger Verwandtschaften.

Band III.

Fünfter Teil.

Eindeutige lineare Verwandtschaften zwischen Gebilden dritter Stufe.

Sechster Teil.

Lineare Systeme von Kurven und Flächen, ihre kollineare Beziehung, Polarentheorie. Ausartungen und Abzählungen. Lineare Systeme von linearen Verwandtschaften und von Gebilden, die in solchen sich befinden.

Band IV.

Siebenter Teil.

Eindeutige (Cremonasche) Verwandtschaften höheren Grades zwischen zweistufigen Gebilden.

Achter Teil.

Korrespondenzen auf Trägern vom Geschlechte 1.

Neunter Teil.

Mehrdeutige Verwandtschaften zwischen Feldern.

Zehnter Teil.

Eindeutige Flächenabbildungen.

Elfter Teil.

Eindeutige (Cremonasche) Verwandtschaften im Raume.

Zwölfter Teil.

Mehrdeutige Verwandtschaften im Raume.

Technische Ausdrücke.

(Die Zahl bezeichnet die Seite.)

Dritter Teil.

Eindeutige lineare Verwandtschaften zwischen zweistufigen Gebilden.

§ 38. Kollineation, Korrelation.

Als Gebilde zweiter Stufe betrachten wir zunächst die beiden 262
räumlich dual einander gegenüberstehenden Grundgebilde, das Feld und den Bündel (Nr. 38). Sie haben beide zweierlei Elemente, das Feld ∞^2 Punkte und ∞^2 Geraden, der Bündel ∞^2 Strahlen, ∞^2 Ebenen. Den Punkten und Geraden des Feldes entsprechen perspektiv die Strahlen und Ebenen, dual die Ebenen und Strahlen des Bündels; während innerhalb eines jeden der beiden Gebilde die einen Elemente zu den andern dual sind.

Meistens faßt man die einen Elemente vorzugsweise ins Auge; wir wollen diese die primären Elemente nennen, die andern die sekundären Elemente. Wir unterscheiden dann: Punktfeld, Strahlenfeld, Strahlenbündel, Ebenenbündel.

Die sekundären Elemente sind Träger von einstufigen Gebilden aus primären Elementen; das Punktfeld hat ∞^2 Punktreihen, das Strahlenfeld ∞^2 Strahlenbüschel, der Strahlenbündel ∞^2 Strahlenbüschel, der Ebenenbündel ∞^2 Ebenenbüschel.

Unter einer eindeutigen oder genauer eineindeutigen Verwandtschaft zweier solcher Gebilde verstehen wir eine solche, bei welcher jedem primären Elemente eines jeden der beiden Gebilde ein (und im allgemeinen nur ein) primäres Element des andern entspricht; ob dadurch auch die sekundären Elemente in eine Verwandtschaft kommen, muß noch dahingestellt bleiben.

Nennen wir gleichartig nicht bloß zwei solche Gebilde, die gleichartige Träger und gleichartige primäre Elemente haben, sondern auch solche, welche bei verschiedenartigen Trägern primäre Elemente haben, die durch Projektion auseinander hervorgehen, also Punktfeld und Strahlenbündel, Strahlenfeld und Ebenenbündel, dann haben wir im ganzen zwölf Fälle von Verwandtschaften, und zwar vier, bei denen es sich um gleichartige Gebilde im engern Sinne, vier, bei denen es sich um gleichartige im weiteren Sinne, und vier, bei denen es sich um ungleichartige Gebilde handelt.

Hier tritt uns gleich ein einfaches Beispiel eindeutiger Verwandtschaft gleichartiger Gebilde im weiteren Sinne entgegen: die perspektive Lage von Bündel und Feld, bei welcher entsprechende Elemente durchweg inzidieren; wir sehen, daß diese Verwandtschaft sich dann zugleich auf die einen und die andern Elemente erstreckt: der Strahlenbündel ist zum Punktfelde, der Ebenenbündel zum Strahlenfelde perspektiv.

Diejenige Ebene des Bündels, die zur Trägerebene des Feldes parallel ist, entspricht der unendlich fernen Gerade und die Strahlen des Büschels des Bündels in jener Ebene den unendlich fernen Punkten des Feldes, welche die unendlich ferne Gerade ausfüllen.

Erst dadurch, daß wir diese unendlich fernen Punkte annehmen und zwar auf einer Gerade liegend, wird die eindeutige Beziehung zwischen Feld und Bündel, zu welcher die perspektive Lage führt, ausnahmslos; im andern Falle würden jene Elemente des Bündels keine entsprechenden im Felde haben.

Wir wollen sagen, ein Element eines unserer Gebilde bewegt sich linear, wenn es ein zugehöriges Grundgebilde erster Stufe (Punktreihe, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel) durchläuft.

Es ist nun bei einer eindeutigen Verwandtschaft zwischen unsern Grundgebilden zweiter Stufe nicht notwendig, daß entsprechende Elemente sich gleichzeitig linear bewegen; es ist z. B. bei zwei eindeutig bezogenen Punktfeldern möglich, daß, wenn der Punkt in dem einen eine gerade Linie durchläuft, der entsprechende im andern nicht ebenfalls eine gerade Linie, sondern eine Kurve, etwa einen Kegelschnitt beschreibt.

Wir haben also zu unterscheiden zwischen linearen und nicht linearen oder höheren eindeutigen Verwandtschaften.

Wir wollen gleich hier hervorheben, daß nur bei den ersteren mit der Verwandtschaft der primären Elemente auch eine der sekundären verbunden ist, und zwar eine gleichartige.

Für die linearen eindeutigen Verwandtschaften werden die Namen Kollineation und Korrelation gebraucht[1]).

---

1) Das Wort Kollineation stammt von Möbius her (Barycentrischer Calcul § 217) und soll die gleichzeitige Linearität ausdrücken. Die Franzosen wenden nach Chasles' Vorgange dasselbe Wort Homographie an wie bei der ersten Stufe; und für diese Gleichartigkeit spricht manches. Oft wird auch Projektivität für Kollineation und umgekehrt gebraucht.

Das Wort Korrelation, von Chasles von neuem eingeführt, geht bis ins 16. Jahrhundert zurück, wo Maurolycus in einer der jetzigen verwandten Bedeutung Würfel und Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder korrelativ nannte. Statt Korrelation wird auch Reziprozität gesagt; aber es empfiehlt sich, das Wort reziprok in allgemeinerem Sinne anzuwenden und jede Verwandtschaft, in welcher ungleichartige (duale) Elemente zugeordnet sind, reziprok zu nennen; z. B. die in Nr. 239 besprochene quadratische Verwandtschaft zwischen den Punkten eines Feldes und den Ebenen eines Bündels.

Es liegt Kollineation (Homographie) vor oder die Gebilde sind kollinear (homographisch), wenn die entsprechenden Elemente gleichartig sind:

bei zwei Feldern: Punkte und Punkte, Strahlen und Strahlen,

bei zwei Bündeln: Strahlen und Strahlen, Ebenen und Ebenen,

bei Feld und Bündel: Punkte und Strahlen, Strahlen und Ebenen.

Feld und Bündel in perspektiver Lage sind kollinear.

Es liegt Korrelation (Reziprozität) vor oder die Gebilde sind korrelativ (reziprok), wenn die entsprechenden Gebilde ungleichartig sind:

bei zwei Feldern: Punkte im ersten, Strahlen im zweiten; Strahlen im ersten, Punkte im zweiten;

bei zwei Bündeln: Strahlen im ersten, Ebenen im zweiten; Ebenen im ersten, Strahlen im zweiten;

bei Feld und Bündel: Punkte im Felde, Ebenen im Bündel; Strahlen im Felde und im Bündel.

Die einen Elemente sind immer die primären, die man sich zunächst entsprechend denkt; das Entsprechen der sekundären Elemente ist dann bei den linearen Verwandtschaften eine Folge. Es genügt, dies in einem der Fälle darzutun. Es möge etwa ein Feld und ein Bündel in eine Korrelation gebracht werden, und zwar zunächst, indem als primäre Elemente im Felde die Punkte genommen werden, also, wegen der Korrelation, im Bündel die Ebenen. Da die Korrelation eine lineare Verwandtschaft ist, so bedeutet dies, daß entsprechende Elemente sich linear bewegen, d. h. wenn der Punkt im Felde eine Gerade durchläuft, so beschreibt die entsprechende Ebene im Bündel einen Büschel, und es wird so jener Gerade, einem sekundären Elemente des Feldes, und weil jene gleichzeitige Linearität durchweg stattfinden soll, jeder Gerade ein Strahl im Bündel, die Axe des Büschels, ebenfalls ein sekundäres Element, zugeordnet, eindeutig in beiderlei Sinne.

Beschreibt hingegen in einer höheren eindeutigen Verwandtschaft, in der wiederum den Punkten eines Feldes die Ebenen eines Bündels zugeordnet seien, während ein Punkt im Felde eine Punktreihe durchläuft, die entsprechende Ebene im Bündel nicht einen Büschel, sondern umhüllt sie etwa einen Kegel 2. Grades, so sind die sekundären Elemente nicht in Korrespondenz gebracht, vielmehr entspricht einer Gerade oder Punktreihe des Feldes dieser Kegel im Bündel.

Die Möglichkeit der Kollineation ist durch die perspek- 263
tive Lage dargetan. Ersichtlich sind auch zwei Felder kollinear, wenn sie zu demselben Bündel perspektiv sind; so daß in ihnen zwei Punkte und zwei Strahlen sich entsprechen, die auf demselben Strahle, in derselben Ebene des Bündels liegen. Und ebenso sind zwei Bündel kollinear, wenn sie zu demselben Felde perspektiv sind; so daß zwei

Strahlen und zwei Ebenen in ihnen einander entsprechen, wenn sie nach demselben Punkte, derselben Gerade des Feldes gehen.

Wir wollen dies die perspektive Lage von zwei Feldern, zwei Bündeln nennen.

Hat man zwei Gebilde in dieser Weise kollinear gemacht, so kann man die perspektive Lage durch Bewegung des einen oder andern Gebildes aufheben; die Kollineation bleibt bestehen. Sind etwa in zwei perspektiv gelegenen Feldern X und X' entsprechende Punkte und wird das zweite Feld (starr) verlegt, wobei X' nach X'' komme, so sind X und X'' entsprechend in der Kollineation zwischen dem ersten Felde in der ursprünglichen und dem zweiten in der neuen Lage. Kollinear und im allgemeinen nicht in perspektiver Lage sind z. B. zwei Felder, welche zu zwei Bündeln bzw. perspektiv sind, die zu einander perspektiv sind.

Können wir durch Aufhebung der perspektiven Lage allgemeine kollineare Gebilde erzielen, so entsteht die umgekehrte Frage, ob kollineare Gebilde, die nicht perspektiv gelegen sind, in perspektive Lage gebracht werden können. Wir können sie erst später beantworten.

Von der Möglichkeit der Korrelation wollen wir uns durch folgendes metrisch konstruierte Beispiel überzeugen. Wir betrachten zwei Bündel U, U' und ordnen jedem Strahl x von U die Ebene ξ' von U' zu, die auf ihm senkrecht ist. Wir machen so die Strahlen von U und die Ebenen von U' zu primären Elementen. Wir sehen sofort, daß dies eine in beiderlei Sinne eindeutige Zuordnung ist; entsprechend sind ungleichartige Elemente. Es gilt noch die Linearität zu beweisen. Der Strahl x durchlaufe einen Büschel in der Ebene ξ von U, so ziehen wir den Strahl x' von U', der auf dieser Ebene ξ senkrecht steht. Dann geht die Ebene ξ', die auf irgend einem der Strahlen x jenes Büschels senkrecht steht und ihm also in unserer Zuordnung entspricht, stets durch x'; denn sie steht, weil auf x, auch auf der Ebene ξ, die durch x geht, senkrecht, und x', aus einem Punkte U' der einen ξ' von zwei zueinander rechtwinkligen Ebenen und senkrecht zur andern ξ gezogen, liegt ganz in jener. Also wenn x den Strahlenbüschel in ξ beschreibt, durchläuft ξ' den Ebenenbüschel um x', und offenbar liegt auch umgekehrt der Strahl von U, der zu irgend einer Ebene dieses Büschels normal ist, immer in ξ und gehört zum Büschel (U, ξ). Somit sind auch die sekundären Elemente ξ und x' zugeordnet, und sind auch zueinander senkrecht.

Verlegt man einen der beiden Bündel, so hört die Normalität entsprechender Elemente auf, die Korrelation aber bleibt bestehen.

Auch die Polarität in bezug auf einen Kegelschnitt beweist die Möglichkeit der Korrelation. Die Pole erfüllen das eine Feld, die Polaren das andere (in derselben Ebene); Pol und Polare bewegen sich gleichzeitig linear, auf einer Gerade und um einen Punkt, die ebenfalls polar sind.

Es leuchtet nun ein, daß, wenn zwei Gebilde kollinear oder korrelativ sind, auch zwei Gebilde, die bzw. zu ihnen perspektiv sind, ebenfalls kollinear oder korrelativ sind.

Oder allgemeiner:

Zwei Gebilde, die zu einem dritten beide kollinear oder beide korrelativ sind, sind unter einander kollinear. Ist aber das eine zum dritten kollinear, das andere zu ihm korrelativ, so sind sie zueinander korrelativ.

Weil entsprechende Elemente sich gleichzeitig linear bewegen, 264
so haben in kollinearen Gebilden entsprechende Kurven oder Kegel gleiche Ordnung und gleiche Klasse.

Wir betrachten z. B. ein Feld und einen Bündel, die kollinear sind; einer Kurve in jenem entspricht ein Kegel in diesem. So oft ein Punkt von jener auf eine Gerade des Feldes zu liegen kommt, so oft fällt eine Kante von diesem in den entsprechenden Strahlenbüschel, d. h. Kurve und Kegel haben dieselbe Ordnung. Ferner so oft eine Tangente der Kurve durch einen Punkt des Feldes geht, so oft geht die entsprechende Berührungsebene des Kegels durch die entsprechende Gerade des Bündels; Kurve und Kegel haben dieselbe Klasse.

Durch die Korrelation tritt eine Vertauschung von Ordnung und Klasse ein.

Da nun ein Kegelschnitt und ein Kegel 2. Grades Ordnung und Klasse gleich 2 haben, so geht ein Kegelschnitt oder Kegel 2. Grades durch Kollineation oder Korrelation wieder in einen Kegelschnitt oder Kegel 2. Grades über.

Aus der Eindeutigkeit unserer Verwandtschaften folgt, daß auch die entsprechenden einstufigen Gebilde in eindeutiger Beziehung, also projektiv sind. Zwei entsprechende Würfe haben daher dasselbe Doppelverhältnis.

In einer Kollineation zwischen zwei Feldern Σ, Σ' mögen, indem wir die Punkte als primäre Elemente ansehen, den Punkten A, B, C, D des einen die Punkte A', B', C', D' des andern entsprechen; so wollen wir uns zuerst klar machen, daß das nur in einer Kollineation möglich ist. Nehmen wir an, es gebe zwei Kollineationen und einem beliebigen weiteren Punkt X von Σ mögen in ihnen X', bzw. X_1' in Σ' entsprechen. Auf der Gerade, welche in der einen oder andern Kollineation der AB entspricht, also durch die Punkte entsteht, welche den auf AB gelegenen Punkten entsprechen, müssen A', B' liegen, also muß sie $A'B'$ sein, und ähnliches gilt für die andern Verbindungslinien von A, B, C, D und

A', B', C', D'. Der Gerade AX entspricht in der einen Kollineation $A'X'$, in der andern $A'X_1'$; wegen der einen muß sein:

$$A(B, C, D, X) = A'(B', C', D', X')$$

und wegen der andern:

$$A(B, C, D, X) = A'(B', C', D', X');$$

daraus folgt, daß $A'X_1'$ mit $A'X'$ identisch ist; oder X' und X_1' liegen mit A' in gerader Linie, ebenso aber auch mit B', C', D'; mithin können sie nicht verschieden sein. Folglich hat jeder Punkt in beiden Kollineationen den nämlichen entsprechenden Punkt; sie sind nicht verschieden.

Diese Betrachtung zeigt uns aber auch, wie man, wenn vier Paare entsprechender Punkte gegeben sind, zu weiteren entsprechenden Punkten gelangt. Man benütze die Büschel um zwei Paare der gegebenen Punkte, etwa A, A' und B, B', mache jene so projektiv, daß den $A(B, C, D)$ die $A'(B', C', D')$ entsprechen, und diese so, daß den $B\ (A, C, D)$ die $B'\ (A, C', D')$ entsprechen, also in beiden Projektivitäten AB und $A'B'$ entsprechend sind. Darauf konstruiere man, wenn zu X der entsprechende Punkt gesucht wird, den dem AX in der ersten und dem BX in der zweiten Projektivität entsprechenden Strahl in A', bzw. B'; ihr Schnitt ist X', und ähnlich würde man aus X' den X erhalten. Die Eindeutigkeit der gewonnenen Verwandtschaft ist einleuchtend; wir haben noch darzutun, daß, wenn X sich auf einer Gerade g bewegt, auch X' eine Gerade durchläuft. Der auf g sich bewegende Punkt X macht die Büschel A, B projektiv in perspektiver Lage; A' und A, B' und B sind nach vorliegender Konstruktion projektiv. Daher $A' \barwedge A \barwedge B \barwedge B'$. Also sind A' und B' auch projektiv, und zwar entsprechen sich in ihnen solche Strahlen, welche in den Projektivitäten zwischen A und A', B und B' Strahlen von A und B entsprechen, die sich auf g (im jeweiligen X) treffen. Kommt X auf g in den Schnitt mit AB, so fallen AX, BX in AB zusammen, welchem in beiden Projektivitäten $A'B'$ entspricht, daher ist dieser Strahl $A'B'$ in der neuen Projektivität zwischen A' und B' sich selbst entsprechend; es handelt sich bei derselben auch um perspektive Lage und X' durchläuft eine Gerade, die Perspektivitätsaxe. Es liegt in der Tat Kollineation vor.

Wir bemerken nebenbei, daß, wenn nicht in den beiden Projektivitäten zwischen A und A', B und B' die Geraden AB und $A'B'$ entsprechend wären, die Büschel A', B' nicht in perspektive Lage kommen würden, der Punkt X' also nicht eine Gerade, sondern einen Kegelschnitt erzeugen würde. Es handelte sich dann um eine eindeutige, aber nicht lineare Verwandtschaft.

Liegt X in C oder D, so ersieht man leicht, daß X' nach C'

oder D' fällt; liegt X in A, so ist XA ein unbestimmter Strahl durch A, der entsprechende ein unbestimmter Strahl durch A'; BX ist BA und entsprechend ist $B'A'$, Schnitt jedenfalls A'; ebenso bei B und B'. Die gegebenen Punkte sind also entsprechend. Folglich sind in unserer Verwandtschaft auch die entsprechenden Doppelverhältnisse $C\,(A, B, D, X)$ und $C'\,(A', B', D', X')$ gleich, d. h. der in ähnlicher Weise in C' konstruierte Strahl geht auch durch X', und ebenso der bei D'. Die Bevorzugung, die wir eben den Büschelpaaren A, A'; B, B' haben zuteil werden lassen, ist nur scheinbar; das Ergebnis wird von ihr nicht beeinflußt. Welche zwei Paare auch genommen werden, es ergibt sich immer dieselbe Kollineation. Wir erhalten also:

Vier Paare entsprechender Punkte reichen hin und sind notwendig, um zwei Felder kollinear zu machen; sie legen eine einzige Kollineation fest.

Aber wir müssen vermeiden, daß drei von den Punkten des einen Feldes, etwa B, C, D, in gerader Linie liegen und die ihnen zugeordneten B', C', D' ebenfalls; denn dann tritt Unbestimmtheit ein: für die Projektivität zwischen B und B' haben wir nur zwei Paare entsprechender Strahlen: $B\,(A, CD)$ und $B'\,(A', C'D')$.

Was sich ergibt, wenn diese Geradlinigkeit nur das eine Mal eintritt, soll später erörtert werden.

Nimmt man die Strahlen als primäre Elemente, so ergibt sich der duale Satz für vier Paare entsprechender Strahlen, und durch Projektion (oder einen ähnlichen Beweis) erhält man die beiden Sätze für zwei Bündel und die für ein Feld und einen Bündel.

Sind ungleichartige Elemente entsprechend, etwa bei zwei Feldern vier Punkten A, B, C, D des einen die Geraden a, b, c, d des andern, so kommen wir, die Konstruktion in Σ' dual umgestaltend, zu den analogen Sätzen über die Korrelation. Demnach:

Vier gleichartige Elemente in dem einen Gebilde und, ihnen entsprechend zugeordnet, vier ihnen gleichartige oder ungleichartige in dem andern legen eindeutig eine Kollineation oder Korrelation fest; wofern nur drei von jenen und die drei zugeordneten unter diesen nicht gleichzeitig lineare Lage haben.

Für fünf Paare entsprechender Elemente muß daher eine Beziehung bestehen. Für Punkte $A, \ldots E$; $A', \ldots E'$ hat sie Möbius in Form einer Gleichheit von Dreiecks-Doppelverhältnissen gegeben[1]). DE schneide AB, AC in F, G, $D'E'$ die $A'B'$, $A'C'$ in F', G', die den F, G entsprechen; daher ist:

$$(DEFG) = (D'E'F'G');$$

---

1) Gesammelte Werke, Bd. 1, S. 462 (Barycentrischer Calcul).

weil aber (Nr. 52):

$$\frac{DF}{EF}=\frac{ABD}{ABE}, \frac{DG}{EG}=\frac{ACD}{ACE},$$

so gilt:

$$\frac{ABD}{ABE}:\frac{ACD}{ACE}=\frac{A'B'D'}{A'B'E'}:\frac{A'C'D'}{A'C'E'}.$$

265 Bei der perspektiven Lage zweier Felder (Nr. 263) ist unmittelbar ersichtlich, daß jeder Punkt der Schnittlinie der beiden Ebenen sich selbst entspricht.

Umgekehrt, wenn bei zwei kollinearen Feldern Σ, Σ' jeder Punkt der Schnittlinie s sich selbst entspricht, dann sind sie in perspektiver Lage. Denn jede zwei entsprechenden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind es; der AB entspricht durch die Kollineation die $A'B'$; der Punkt, wo jene die s trifft, entspricht sich selbst, liegt also auch auf $A'B'$. Folglich treffen AB und $A'B'$ sich auf s, und ebenso AC und $A'C'$, BC und $B'C'$. Daher laufen AA', BB', CC' in einen Punkt O zusammen (Nr. 40), der schon durch AA', BB' bestimmt ist und fest bleibt, wenn C und C' durch andere Paare entsprechender Punkte ersetzt werden.

Nun wollen wir zeigen, daß man ein gegebenes Viereck $A'B'C'D'$ in Σ' in ein gegebenes Viereck $ABCD$ in Σ durch eine Reihe von Projektionen und Schnitten überführen kann. Wir projizieren aus einem Punkt S' von AA' das Viereck $A'B'C'D'$ auf eine durch A gehende Ebene Σ'' in das Viereck $AB''C''D''$; es seien dann E und E'' die Diagonalpunkte (AB, CD) und (AB'', $C''D''$). In A schneiden sich ABE und $AB''E''$, folglich schneiden sich die in ihrer Ebene befindlichen BB'' und EE''; der Schnitt sei S''. Aus ihm projizieren wir A, B'', C'', D'', E'' auf die Ebene Σ''', welche durch die Gerade ABE geht, in A, B, C''', D''', E. Weil C'', D'', E'' in gerader Linie liegen, so tun es auch die Projektionen C''', D''', E. In E schneiden sich daher $C'''D'''$ und CD, und in ihrer Ebene liegen CC''' und DD'''; ist S''' deren Schnittpunkt, so führt die Projektion aus diesem Punkte auf die durch ABE gehende Ebene Σ das Viereck $ABC'''D'''$ in das Viereck $ABCD$ über[1]).

Und wir haben durch drei Projektionen und drei Schnitte $A'B'C'D'$ in $ABCD$ übergeführt und daher die Kollineation zwischen Σ, Σ', in der die beiden Vierecke einander entsprechen, durch projektive Operationen erzielt.

Jede zwei benachbarte von den Feldern Σ', Σ'', Σ''', Σ sind zu einem zwischengeschalteten Bündel, bzw. S', S'', S''' perspektiv, daher zueinander und Σ' und Σ sind kollinear. Es genügt, diesen Fall

---

1) Ich verdanke diese Konstruktion einer brieflichen Mitteilung Reyes. Enriques spricht in seinen Lezioni di Geometria projettiva S. 161 von einer solchen Konstruktion, ohne sie anzugeben.

der Kollineation behandelt zu haben; da die andern auf ihn zurückgeführt werden können.

Wir können die Kollineation und Korrelation auch dadurch festlegen, daß die in demselben Gebilde gegebenen Elemente nicht alle gleichartig sind. 266

Wenn aber z. B. in dem einen Felde drei Punkte A, B, C und eine Gerade d gegeben sind und im andern A', B', C', d' oder a', b', c', D'; so läuft das darauf hinaus, daß dort vier Geraden BC, CA, AB, d und hier ebenfalls vier Geraden $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, d' oder vier Punkte $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$, D' gegeben sind. Und ähnlich ist die Bestimmung durch drei Geraden und einen Punkt in dem einen Felde und die entsprechenden gleichartigen oder ungleichartigen Elemente in dem andern mit derjenigen identisch, wo vier Punkte im ersten Felde gegeben sind.

Sind aber im ersten Felde A, B, c, d, im zweiten A', B', c', d', bzw. a', b', C', D' gegeben, so müssten, wenn sie in einer Kollineation oder Korrelation entsprechend sein sollen, auch den Punkten $E = (AB, c)$, $F = (AB, d)$ die Punkte $E' = (A'B', c')$, $F' = (A'B', d')$ oder die Geraden $e' = (a'b', C')$, $f' = (a'b', D')$ entsprechen; also müßte:

$$(ABEF) = (A'B'E'F') \text{ oder } = (a'b'e'f')$$

sein, was bei der beliebigen Lage der gegebenen Elemente nicht der Fall ist. Also ist es im allgemeinen nicht möglich, durch solche entsprechenden Elemente eine Kollineation oder Korrelation festzulegen.

§ 39. Prinzip der Dualität in der Ebene und im Bündel. Entsprechende Kegelschnitte. Fünf Paare entsprechender Elemente. Polare Figuren der Korrelation.

Durch die Möglichkeit, zwei Felder oder zwei Bündel korrelativ aufeinander zu beziehen, ist das Prinzip der Dualität in der Ebene und im Bündel bewiesen. Das Dualisieren, bei welchem man nicht in der nämlichen Ebene, dem nämlichen Bündel zu bleiben braucht, besteht in der der Korrelation entsprechenden Umformung. Punkt und Gerade, bzw. Strahl und Ebene vertauschen sich miteinander, infolgedessen auch Punktreihe und Strahlenbüschel, Strahlenbüschel und Ebenenbüschel. Inzidente Elemente gehen in ebensolche über. In der Ebene steht dem Liegen von Punkten in einer Gerade das Zusammenlaufen von Geraden in einen Punkt, im Bündel dem Liegen von Strahlen in einer Ebene das Zusammenlaufen von Ebenen in einen Strahl dual gegenüber. Reine Lageneigenschaften sind also immer dualisierbar. 267

Begnügen wir uns mit der Ebene. Punkt einer Kurve und Tangente, Doppelpunkt und Doppeltangente, Ordnung und Klasse stehen sich dual gegenüber, ein Kegelschnitt als Kurve 2. Ordnung und 2. Klasse geht in einen Kegelschnitt über, ein Büschel von Kegelschnitten in eine Schar, ein Viereck in ein Vierseit, Pol und Polare in bezug auf einen Kegelschnitt in Polare und Pol in bezug auf den dualen, da die Konstruktion des Poles aus der Polare ganz dual zu der der Polare aus dem Pole verläuft; konjugierte Elemente des einen gehen in solche des andern über.

Die Korrelation führt ein einstufiges Gebilde in ein zu ihm projektives über, einen Wurf in einen von demselben Doppelverhältnis, so daß Sätze, in denen Doppelverhältnisse vorkommen, dualisiert werden können. Projektive Gebilde gehen durch die Korrelation oder Dualisierung in projektive Gebilde, konjektive in konjektive über, doppelt entsprechende Elemente in ebensolche, also involutorische Gebilde in ebenfalls involutorische oder kurz, eine Involution in eine Involution, speziell eine Involution konjugierter Punkte oder Strahlen in bezug auf einen Kegelschnitt in eine Involution konjugierter Strahlen oder Punkte. Auch die Eigenschaft konjektiver Gebilde, zyklisch zu sein, bleibt erhalten.

Da Parameter als Doppelverhältnisse dargestellt werden können, so führt die Dualisierung ein Element eines einstufigen Gebildes in eines auf dem entsprechenden Gebilde über mit demselben Parameter, also eine Figur, für die eine parametrische Relation gilt, in eine andere, für welche die nämliche parametrische Relation gilt, daher gehen mehrdeutige Verwandtschaften zwischen einstufigen Gebilde in eben solche über, z. B. Involutionen höheren Grades. Wir können zusammenfassend sagen:

Sätze, die nur projektive Eigenschaften enthalten, sind dualisierbar.

Interessant sind solche Sätze, bei denen Voraussetzung und Behauptung dual gegenüberstehen, also die dualen Sätze die Umkehrungen sind, wie die Sätze über perspektive Dreiecke in der Ebene.

Die Beziehung zwischen Pol und Polare in bezug auf einen Kegelschnitt ist, wie schon bemerkt, eine Korrelation ineinander liegender Felder, historisch am frühesten bekannt. Auf sie hat Poncelet im Traité des propriétés projectives des figures (1822) das Prinzip der ebenen Dualität basiert (daher auch Prinzip der Polarität)[1]).

Der eben erwähnte Spezialfall der Korrelation, die Polarität in bezug auf einen Kegelschnitt, hat bewirkt, daß die bei ihr üblichen

---

1) Vgl. zur Entstehungsgeschichte die Artikel von Gergonne und Poncelet in den Annales de Mathém., Bd. 16, S. 209 und Bd. 18, S. 125, sowie Poncelets Zusätze in der zweiten Auflage des Traité (1866, 67).

Namen: Pol und Polare übertragen worden sind auf die entsprechenden Elemente einer beliebigen Korrelation. Und ebenso wird bei einer solchen ein Punkt, der auf der Polare eines andern Punktes liegt, eine Gerade, die durch den Pol einer andern Gerade geht, konjugiert zu diesem Punkte, dieser Gerade genannt[1]).

Inzidenten Elementen X, y des einen Feldes sind nun inzidente x', Y' im andern polar. Y', auf x' gelegen, ist zu X konjugiert, und X, auf y gelegen, zu Y'; ebenso ist x', durch Y' gehend, zu y konjugiert, und y, durch X gehend, zu x'. Die Konjugiertheit findet daher auch im allgemeinen Falle stets gegenseitig statt.

Die Kollineation und die Korrelation führen einen Kegelschnitt 268
in einen Kegelschnitt über; so entsteht die Frage, wenn in zwei Feldern Kegelschnitte k und k' gegeben sind, ob man die Felder so kollinear oder korrelativ machen kann, daß diese Kurven entsprechend werden. Man lege drei Punkte A, B, C auf k und drei A', B', C' auf k'; es sei ferner D der Pol von AB für k, so daß DA, DB ihn in A, B berühren, und D' der Pol von $A'B'$ für k'. Wir legen dann eine Kollineation fest:

$$\left| \begin{matrix} A\,B\,C\,D \\ A'B'C'D' \end{matrix} \right|,$$

d. h. in welcher den Punkten A, B, C, D die Punkte A', B', C', D' zugeordnet sind. Durch sie geht k in einen Kegelschnitt über, welcher durch A', B', C' geht und in A', B' die Geraden $A'D'$, $B'D'$ berührt, weil k das entsprechende tut; also ist er mit k' identisch; denn durch diese Bedingungen: fünf gegebene Punkte, von denen zweimal zwei unendlich nahe sind, ist ein Kegelschnitt eindeutig bestimmt (Nr. 126).

Durch die Kollineation entstehen auf den entsprechenden Kegelschnitten projektive Punktreihen; denn die Strahlenbüschel, welche diese Punktreihen aus entsprechenden Punkten der Kegelschnitte projizieren, sind wegen der Kollineation projektiv.

Durch das Entsprechen von A, B, C und A', B', C' sind auf k, k' projektive Punktreihen festgelegt. Sind dann D und D' weitere entsprechende Punkte in dieser Projektivität, so daß die krummen Punktwürfe $ABCD$ und $A'B'C'D'$ projektiv sind, so können wir die Kollineation auch durch diese vier Paare entsprechender Punkte bestimmen. Ist dann X ein beliebiger Punkt auf k, Y' auf k', so ist:

$$X(A, B, C, D) \barwedge Y'(A', B', C', D').$$

Wenn X' dem X in der Kollineation entspricht, so geht durch diese

1) Diese scharfe Sonderung von polar und konjugiert ist auf Staudt zurückzuführen (Geometrie der Lage, Nr. 239, 319).

$k = (ABCDX)$ über in $(A'B'C'D'X')$, und es ist, wegen der Kollineation:

$$X(A, B, C, D) \barwedge X'(A', B', C', D');$$

also:

$$Y'(A', B', C', D') \barwedge X'(A', B', C', D').$$

Daher liegen Y' und X' mit A', B', C', D' auf demselben Kegelschnitte, oder der Kegelschnitt $(A'B'C'D'X')$ ist mit $k' = (A'B'C'D'Y')$ identisch.

Wenn auf zwei Kegelschnitten k und k' projektive Punktreihen gegeben sind, so besteht eine Kollineation zwischen den Feldern, in denen sie liegen, von der Art, daß auch in ihr Punkte, welche in dieser Projektivität einander korrespondieren, entsprechend sind.

Ersetzt man in dem einen Felde die Punkte auf dem Kegelschnitte durch die zugehörigen Tangenten, so erhält man die entsprechenden Ergebnisse für die Korrelation.

Ist der eine Kegelschnitt ein Kreis, so lehrt eine Kollineation, in der er dem andern Kegelschnitt entspricht, daß auf diesen alle projektiven Eigenschaften des Kreises übertragen werden können. Man kann z. B. sich begnügen, nur für den Kreis den Pascalschen, den Brianchonschen Satz zu beweisen, die Polarentheorie auszubauen, und weiß dann, daß sie, weil es sich in ihnen nur um projektive Eigenschaften handelt, auch für den allgemeinen Kegelschnitt gelten.

Indem wir A, B, C auf k festhalten und A', B', C' auf k' verändern, erkennen wir, daß es ∞^3 Kollineationen gibt, in denen die beiden Kegelschnitte entsprechend sind.

269 Es liegen zwei Kegelschnitt-Büschel vor; die Zuordnung der einen Grundpunkte und der andern (in einer der 24 Permutationen) macht die beiden Büschel homolog (d. h. entsprechend) in kollinearen Feldern. Damit die Kollineation reell sei, ist erforderlich, daß die Grundpunkte gleichartig sind.

Betrachten wir den Fall, daß beide Büschel imaginäre Grundpunkte haben und die konjugierten je dargestellt sind durch eine elliptische Involution, eine gemeinsame Involution konjugierter Punkte für die Kegelschnitte des Büschels[1]), so konstruieren wir folgendermaßen vollständig reell. Es sei bei dem einen Büschel O der Schnittpunkt der Träger der Involutionen, Q und Q_1 seien ihm in diesen gepaart und RS, R_1S_1 die reellen Paare (Nr. 113) der Involutionen, welche zu OQ, bzw. OQ_1 harmonisch sind, und in gleicher Weise seien O', Q', ... S_1' beim andern Büschel hergestellt. In acht Weisen

1) Steiner-Schröters Vorlesungen, § 42.

lassen sich dann die vier Punkte R, S den vier Punkten R', S' so zuordnen, daß gepaarten wiederum gepaarte entsprechen; z. B.:

$$\begin{vmatrix} R & S & R_1 & S_1 \\ R' & S' & R_1' & S_1' \end{vmatrix}.$$

Die dadurch festgelegte Kollineation ordnet auch die Punkte O und O', Q und Q', Q_1 und Q_1' einander zu; also auch die Involutionen (OQ, RS), (OQ_1, R_1S_1) und $(O'Q', R'S')$ und $(O'Q_1', R_1'S_1')$ und ihre Doppelpunkte, die Grundpunkte der beiden Büschel, mithin diese.

Sind zwei Grundpunkte in beiden Büscheln reell: M, N; M', N'; so werden in den darstellenden Involutionen der andern wieder die Paare R_1S_1, $R_1'S_1'$ ermittelt; und wir erhalten vier Kollineationen, wie:

$$\begin{vmatrix} M & N & R_1 & S_1 \\ M' & N' & R_1' & S_1' \end{vmatrix}.$$

Der dritte Fall, der zu 24 reellen Kollineationen führt, bedarf keiner Erörterung.

Ähnliches gilt hinsichtlich der Kollineation zweier Kegelschnitt-Scharen oder der Korrelation eines Büschels und einer Schar.

Darnach kann man einen Kegelschnittbüschel, von welchem mindestens zwei Grundpunkte imaginär sind, reell kollinear zu einem Kreisbüschel machen, wofern die andern Grundpunkte gleichartig sind, also zwei gegebene Kegelschnitte mit mindestens zwei imaginären Schnittpunkten kollinear zu zwei Kreisen, jedoch nicht selbst gegebenen, sondern nur einem gegebenen Büschel angehörigen.

Benutzen wir Chasles' Wort Umbilikalpunkt für den Schnittpunkt gemeinsamer Tangenten und seine Korrespondenz von Umbilikalpunkten und gemeinsamen Sekanten zweier Kegelschnitte[1]). Das Viereck der gemeinsamen Punkte und das Vierseit der gemeinsamen Tangenten haben ja dasselbe Diagonaldreieck[2]), welches das gemeinsame Polardreieck ist. Chasles nennt einen Umbilikalpunkt und eine gemeinsame Sekante korrespondierend, wenn sie bzw. mit Gegenelementen dieses Dreiecks inzidieren, so daß jedes Paar von Gegenelementen dieses Dreieck zu vier Paaren derartiger korrespondierenden Elemente führt.

Für zwei Kreise sind nun die unendlich ferne Gerade und die Gerade, welche die reellen oder imaginären endlichen Schnitte verbindet (Potenzlinie), die einzigen reellen gemeinsamen Sekanten; die korrespondierenden Umbilikalpunkte sind die, welche auf der Gegen-

1) Point ombilical oder kurz ombilic: Traité des Sections coniques Nr. 345.

2) Vgl. Steiner-Schröters Vorlesungen, § 54. — Das Polarfeld wird uns später einen Beweis liefern.

seite des Schnitts jener Geraden im Polardreiecke, d. i. auf der Zentrale liegen, bekanntlich die Ähnlichkeitspunkte, welche stets reell sind.

Daraus schließen wir vermittelst der Kollineation in den Fällen, wo zwei Kegelschnitte nur zwei reelle gemeinsame Sekanten und nur zwei reelle Umbilikalpunkte haben, daß jene und diese korrespondierend sind.

Zwei Kreise, welche keine reellen Punkte gemeinsam haben, haben entweder vier reelle gemeinsamen Tangenten oder keine reellen gemeinsamen Tangenten, je nachdem sie sich ausschließen oder einer den andern umschließt. Für beide Fälle gilt: den beiden einzigen reellen gemeinsamen Sekanten korrespondieren die Ähnlichkeitspunkte; im letzteren Falle die einzigen reellen Umbilikalpunkte. Sonst korrespondieren in diesem Falle imaginäre Elemente. Im ersten Falle aber korrespondieren jedem der vier reellen von den Ähnlichkeitspunkten verschiedenen Umbilikalpunkte imaginäre gemeinsame Sekanten[1]).

Man beachte, daß die Kreise in verschiedenen (vollen) Winkeln der von einem dieser Umbilikalpunkte ausgehenden gemeinsamen Tangenten liegen und daher von den Strahlen durch den Punkt verschiedenartig geschnitten werden. Ähnliches gilt für Kegelschnitte mit vier imaginären Schnitten und vier reellen gemeinsamen Tangenten und duales für solche, bei denen alle Schnitte reell, alle gemeinsamen Tangenten imaginär sind.

Im vorangehenden handelt es sich um reelle Kurven; stellt man z. B. einen reellen Kreis (M, r) mit einem reell-imaginären $(M_1, r_1 i)$ zusammen, d. h. einem solchen, der einen reellen Mittelpunkt und negatives Radiusquadrat hat, so sind die Ähnlichkeitspunkte imaginär, die ihnen korrespondierenden gemeinsamen Sekanten reell.

270 Wir schalten hier eine interessante Eigenschaft des vollständigen ebenen Fünfecks $ABCDE$ ein. Auf jeder von den zehn Seiten hat man eine Reihe von fünf Punkten, nämlich die beiden verbundenen Ecken und die Schnittpunkte mit den Seiten, welche die drei übrigen Ecken verbinden. Alle diese Punktreihen sind projektiv. Nehmen wir zunächst zwei Seiten AB, CD, welche keine Ecke gemeinsam haben, so sind deren Punktreihen perspektiv mit der fünften Ecke E als Zentrum, und zwar gilt folgendes Entsprechen:

$$AB(B, A, DE, EC, CD) \overline{\wedge}\, CD(BE, EA, D, C, AB).$$

Von AB ausgehend, gelangen wir zu CD, CE, DE, von CD noch zu AE, BE, von CE zu AD, BD und von DE zu AC, BC und haben nun alle zehn Seiten. Das Entsprechen ist folgendes:

---

1) Von Chasles a. a. O. erwähntes Beispiel.

$$\begin{aligned} &AB(B, A, DE, EC, CD) \barwedge AC(C, DE, A, EB, BD) \\ \barwedge\ &AD(D, CE, EB, A, BC) \barwedge AE(E, CD, DB, BC, A) \\ \barwedge\ &BC(DE, C, B, EA, AD) \barwedge BD(CE, D, EA, B, AC) \\ \barwedge\ &BE(CD, E, DA, AC, B) \barwedge CD(BE, EA, D, C, AB) \\ \barwedge\ &CE(BD, DA, E, AB, C) \barwedge DE(BC, CA, AB, E, D). \end{aligned}$$

Betrachten wir das Fünfeck als ein einfaches $ABCDE$ und nennen die Gegenseiten CD, DE, ... der Ecken A, B, ... bzw. a, b, c, d, e, so entstehen um deren zehn Schnittpunkte Büschel von je fünf Strahlen, welche untereinander und jenen zehn Punktreihen projektiv sind. Wir wollen die Punktreihe:

$$DE(BC, CA, AB, E, D) \text{ oder einfacher } A'B'C'ED,$$

wo A', B', C' die Schnitte von BC, CA, AB mit DE sind, mit dem Büschel:

$$de(bc, ca, ab, e, d) \text{ oder } B(E, F, D, e, d),$$

wo $F = ca = (EA, CD)$ ist, vergleichen. Nennt man noch G den Schnitt von BF mit DE, so ist letzterer Büschel perspektiv zu $EGDA'C'$. Das vollständige Viereck $ABCF$ lehrt aber, daß $A'E$, $B'G$, $C'D$ auf DE in Involution sind; daher ist:

$$A'B'C'ED \barwedge EGDA'C'.$$

Es sei nun K^2 der durch die fünf Ecken $A, \ldots E$ gehende Kegelschnitt; $\mathfrak{B}$ sei der zweite Schnitt von BF mit K^2, so entsteht auf K^2 durch den Büschel F eine Involution CD, EA, $B\mathfrak{B}$; daher ist:

$$E\mathfrak{B}DCA \barwedge ABCDE;$$

die links stehende krumme Punktreihe ist aus B perspektiv zu der Reihe auf AE:

$$AE(E, CD, DB, BC, A);$$

daher ist die krumme Punktreihe $ABCDE$ auf K^2 zu allen zehn Punktreihen projektiv, und folglich auch jeder die Punkte A, B, ... E aus irgend einem Punkte von K^2 projizierender Büschel. Kohn[1]) hat ein jedes dieser untereinander projektiven fünfelementigen Gebilde, insbesondere die krumme Punktreihe $ABCDE$ auf dem Kegelschnitte, den Begriff „Wurf“ von vier Elementen auf fünf erweiternd, Wurf des Fünfecks genannt.

Bemerken wir: $E(A, B, C, D) \barwedge AB(B, A, DE, EC)$; ersichtlich ist jener Wurf zu $AB(A, B, EC, ED)$ perspektiv.

In zwei kollinearen Feldern sind die Würfe zweier entsprechender Fünfecke $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ projektiv; denn

1) Math. Annalen, Bd. 46, S. 285.

z. B. auf den entsprechenden Geraden AB und $A'B'$ sind auch den Punkten $AB(DE, EC, CD)$ die Punkte $A'B'(D'E', E'C', C'D')$ entsprechend.

Und umgekehrt, die Bedingung dafür, daß zwei ebene Gruppen von fünf Punkten in einer Kollineation entsprechend sind, ist, daß ihre Würfe projektiv sind.

Dabei ist es gleichgültig, in welcher der verschiedenen Formen ein solcher Wurf dargestellt ist. Wenn z. B.

$$AB(B, A, DE, EC, CD) \barwedge A'B'(B', A', D'E', E'C', C'D')$$

vorausgesetzt wird, so ergeben sich in der Kollineation

$$\left| \begin{matrix} A\,B\,C\,D \\ A'B'C'D' \end{matrix} \right|$$

auch die Schnitte $C_1 = (AB, DE)$, $D_1 = (AB, EC)$ und $C_1' = (A'B', D'E')$, $D_1' = (A'B', E'C')$ als entsprechend infolge der durch sie auf AB, $A'B'$ hervorgerufenen Projektivität, die mit der vorausgesetzten übereinstimmt, weil in beiden den Punkten B, A, (AB, CD) die Punkte B', A', $(A'B', C'D')$ entsprechen. Daher sind auch $E = (CD_1, DC_1)$ und $E' = (C'D_1', D'C_1')$ entsprechend.

Man vergleiche Möbius' metrische Relation (Nr. 264).

271 Wir nehmen wieder, zum Problem der ebenen Projektivität zurückkehrend, zwei fünfpunktige Gruppen G^5 (Nr. 228). In der Kollineation:

$$\left| \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 \end{matrix} \right|$$

entspricht dem Kegelschnitte $\mathsf{B}_0^2 = (B_1 \ldots, B_5)$ der zu ihm in bezug auf $G^4_{(5)}$ analoge Kegelschnitt A_5^2 (Nr. 268); der Punkt, der dem B_5 in der Kollineation entspricht, ist dann derjenige auf A_5^2, der in der Projektivität: $A_1 A_2 A_3 A_4 \barwedge B_1 B_2 B_3 B_4$ auf den beiden Kurven dem B_5 korrespondiert, also der in Nr. 228 mit A_5' bezeichnete. Durch die andern derartigen Kollineationen erhält man die Punkte $A_1', \ldots A_4'$. Wir fanden dort den Punkt A_0 als Konkurrenzpunkt von $A_1 A_1', \ldots A_5 A_5'$ und haben nun in dieser Kollineationen heranziehenden Konstruktion den Weg, auf welchem Cremona zu diesen ausgezeichneten Punkten A_0, B_0 gelangt ist[1]).

Nehmen wir nun den speziellen Fall an, daß die beiden Gruppen von G^5 in einer Kollineation Λ entsprechend sind; dann sind es auch die beiden Kegelschnitte A_0^2 und B_0^2 und alle analogen Kegelschnittes des einen vereinigen sich im andern. In bezug auf G^5 korrespondiert aber jeder Punkt der einen Kurve jedem der andern.

---

1) Cremona, Nouvelles Annales de Mathém. Ser. I, Bd. 20, S. 455.

Zwei in Λ homologe Punkte sind ersichtlich in bezug auf G^5 korrespondierend, und da jeder A außerhalb A_0^2 oder B außerhalb B_0^2 nur einen korrespondierenden hat, so ist die Λ die eindeutige Verwandtschaft, die in diesem Falle an Stelle der Verwandschaft 5. Grades getreten ist; daß den Punkten einer Gerade die Punkte einer Gerade korrespondieren, erkannten wie schon in Nr. 230.

Fügen wir nun sechste Punkte A_6, B_6, aber nicht homolog in Λ, hinzu, so sieht man sofort, daß jeder Punkt A auf A_0^2 in bezug auf G^6 einen korrespondierneden B auf B_0^2 hat, der sich folgendermaßen ergibt: A_6' sei der zweite Schnitt von AA_6 mit A_0^2; ihm entspricht auf B_0^2 durch die Kollineation (oder Projektivität) der B_6' und korrespondierend zu A ist der zweite Schnitt von B_6B_6' mit B_0^2. Ferner seien $\bar{B}_6$, $\bar{A}_6$ zu A_6, B_6 in der Kollineation Λ homolog, also auch $A_6\bar{A}_6$ und $B_6\bar{B}_6$. Die in Λ homologen Punkte dieser Geraden sind in bezug auf G^6 korrespondierend; und A_0^2, $A_6\bar{A}_6$ setzen die Kurve a^3, B_0^2, $B_6\bar{B}_6$ die Kurve b^3 des allgemeinen Falls zusammen (Nr. 231).

Sollten aber auch A_6, B_6 in der Kollineation Λ homolog sein, so sind jede zwei in dieser homologe Punkte in bezug auf G^6 korrespondierend.

Wenn aber wieder die Kollineation Λ sich nur auf G^5 erstreckt, und A_6, A_7; B_6, B_7 beliebig zugefügt sind, so erhalten wir auf A_0^2, B_0^2 zwei projektive Punktreihen, deren entsprechende Punkte in bezug auf $G^6_{(7)}$ korrespondieren, und ebenso zwei für $G^6_{(6)}$. Die beiden Paare entsprechender Punkte, die ihnen gemeinsam sind, liefern in bezug auf G^7 korrespondierende Punkte; und sind $\bar{B}_6$, $\bar{B}_7$, $\bar{A}_6$, $\bar{A}_7$ den A_6, A_7, B_6, B_7 in Λ homolog, so liefern die Punkte $(A_6\bar{A}_6, A_7\bar{A}_7)$, $(B_6\bar{B}_6, B_7\bar{B}_7)$ das dritte Paar (Nr. 233).

Das ist ebenfalls ein Spezialfall, in dem die Ermittelung dieser drei Paare nur quadratisch, nicht kubisch ist.

Bei zwei Kegelschnitten, die in einer Korrelation entsprechend 272
sind, ist die Punktreihe des einen dem Tangentenbüschel des andern projektiv, daher auch die Punktreihe desselben. Liegen also zwei projektive Punktreihen auf Kegelschnitten vor, so besteht eine Korrelation, in der jedem Punkte des einen die Tangente des entsprechenden Punktes des andern korrespondiert (Nr. 268).

Zwei Dreiecke heißen in einer Korrelation polar, wenn den Ecken des einen die Seiten des andern polar sind und daher auch den Seiten des ersten die Ecken des zweiten.

Es seien

$$A_1 A_2 A_3, \ A_4 A_5 A_0$$
$$B_1 B_2 B_3, \ B_4 B_5 B_0$$

zwei Paare polarer Dreiecke. Sind dann C_5, C_4 die Schnitte von $B_1 B_3$ mit den Polaren $B_0(B_5, B_4)$ von A_4, A_5, also die Pole von $A_2(A_4, A_5)$, so ist wegen der Korrelation:

$$A_2(A_1, A_3, A_4, A_5) \barwedge B_3 B_1 C_5 C_4 \barwedge B_1 B_3 C_4 C_5 \barwedge B_0(B_1, B_3, B_4, B_5);$$

ebenso:

$$A_3(A_1, A_2, A_4, A_5) \barwedge B_0(B_1, B_2, B_4, B_5).$$

Daraus folgt, wenn A ein beliebiger Punkt auf dem Kegelschnitte $(A_1 \ldots A_5)$ ist:

$$A(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \barwedge B_0(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5);$$

und ebenso, wenn B ein beliebiger Punkt des Kegelschnitts $(B_1 \ldots B_5)$ ist:

$$B(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5) \barwedge A_0(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5).$$

Also sind A_0, B_0 die Punkte, die wir im Problem der ebenen Projektivität den beiden Gruppen:

$$G^5 \quad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 \end{matrix}$$

zugeordnet fanden; und die sechs Punktepaare $A_1, B_1; \ldots A_5, B_5$; A_0, B_0 sind sechs linear unabhängige Punktepaare (Nr. 228).

Also: Die Ecken von zwei Paaren polarer Dreiecke einer Korrelation bilden sechs linear abhängige Punktepaare, wobei in jedem Paare jede der beiden Ecken der Polare der andern in dem betreffenden Dreiecke gegenüber liegt.

Natürlich gilt, weil die Figur in sich dual ist, dasselbe auch für die Seiten.

In zwei vollständigen Vierseiten

$$a_1 a_2 a_3 a_4, \ b_1 b_2 b_3 b_4$$

bilden die Ecken in folgender Paarung:

$$\begin{matrix} a_2 a_3, & a_3 a_1, & a_1 a_2, & a_1 a_4, & a_2 a_4, & a_3 a_4 \\ b_1 b_4, & b_2 b_4, & b_3 b_4, & b_2 b_3, & b_3 b_1, & b_1 b_2 \end{matrix}$$

ein System von sechs linear abhängigen Punktepaaren und zwar ein spezielles, da fünf von den Paaren nicht in beliebiger Lage gegeben sind (Nr. 228). Wir wollen die Punkte wie dort benennen:

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_0$$
$$B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_0$$

und zeigen, daß, wenn in einer Korrelation die Punkte von fünf Paaren, etwa der fünf ersten Paare konjugiert sind, dies auch für diejenigen des sechsten Paares gilt.

Seien in der Korrelation $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ die Pole von a_1, a_2, die also, weil $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ die Polare von $A_3 = a_1 a_2$ ist, mit B_3 in gerader Linie liegen; es sind dann $\mathfrak{B}_1(B_2, B_4)$, $\mathfrak{B}_2(B_1, B_5)$ die Polaren von A_2, A_4, A_1, A_5, ferner $\mathfrak{B}_3 = (B_1\mathfrak{B}_2, B_2\mathfrak{B}_1)$ und $\mathfrak{B}_4 = (B_4\mathfrak{B}_1, B_5\mathfrak{B}_2)$ die Pole von a_3, a_4, also $\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ die Polare von A_0. Nun sind aber die beiden Dreiecke $B_1B_5\mathfrak{B}_2$ und $B_2B_4\mathfrak{B}_1$ perspektiv, mit dem Zentrum B_3; mithin liegen $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$, $B_0 = (B_1B_5, B_2B_4) = b_1 b_2$ in gerader Linie; d. h. B_0 ist konjugiert zu A_0.

Daraus wird sich später noch auf andere Weise ergeben, daß die sechs Paare linear abhängig sind.

Man nennt zwei Vierseite $a_1a_2a_3a_4$, $b_1b_2b_3b_4$ polar[1]) in 273
einer Korrelation, wenn a_1a_2 und b_3b_4, a_1a_3 und b_2b_4, usw. konjugiert sind. Dann liegt das polare Dreieck $b_1'b_2'b_3'$ von $a_1a_2a_3$, wo b_1' die Polare von a_2a_3 ist usw., zu $b_1b_2b_3$ perspektiv mit b_4 als Axe. In der Tat, es gehen n. V. b_1', b_2', b_3' durch b_1b_4, b_2b_4, b_3b_4, oder b_1b_1', b_2b_2', b_3b_3' liegen auf b_4. Ebenso ist das polare Dreieck $a_1'a_2'a_3'$ von $b_1b_2b_3$ zu $a_1a_2a_3$ perspektiv, mit a_4 als Axe.

Umgekehrt, wenn $b_1b_2b_3$ zu dem polaren Dreiecke $b_1'b_2'b_3'$ von $a_1a_2a_3$ perspektiv liegt, so liegt auch $a_1a_2a_3$ zu dem polaren Dreiecke $a_1'a_2'a_3'$ von $b_1b_2b_3$ perspektiv. Denn es liegen in gerader Linie die drei Punkte b_1b_1', b_2b_2', b_3b_3', also laufen deren Polaren, die Verbindungslinien von $a_2'a_3'$ und $a_2a_3, \ldots$ in einen Punkt zusammen; die Dreiecke $a_1a_2a_3$ und $a_1'a_2'a_3'$ sind perspektiv.

Nun folgt, daß man zwei polare Vierseite folgendermaßen konstruieren kann. Man geht von einem beliebigen Dreiseite $a_1a_2a_3$ aus, konstruiert das polare $b_1'b_2'b_3'$ und zu diesem ein perspektives $b_1b_2b_3$, mit der Axe b_4; es ist nun von selbst dessen polares Dreieck $a_1'a_2'a_3'$ zu $a_1a_2a_3$ perspektiv, und wenn a_4 die Axe ist, so sind

$$\begin{matrix} a_1a_2a_3a_4 \\ b_1b_2b_3b_4 \end{matrix}$$

polar. In der Tat, a_2a_3 hat b_1' zur Polare; diese trifft sich mit b_1 auf b_4; also sind a_2a_3 und b_1b_4 konjugiert, usw.

Die Korrelation besitzt ∞^{11} Paare polarer Vierseite (und ebenso viele Paare polarer Vierecke). Denn $a_1a_2a_3$ kann in ∞^6 Lagen gewählt werden und zu $b_1'b_2'b_3'$ gibt es ∞^5 perspektive Dreiecke.

---

1) „Konjugiert" scheint zunächst richtiger, aber die Benennung „polar" wird sich später rechtfertigen. — Vgl. hierzu Rosanes Journ. f. Math., Bd. 90, S. 315 und Bd. 95, S. 240. Es sind diese Vierseite wohl zu unterscheiden von einem Vierecke und einem Vierseite, die im eigentlichen Sinne polar, d. h. bei denen die Ecken des ersten zu den Seiten des zweiten polar sind.

Und weil in den beiden Feldern $\infty^{2\cdot 8}$ Paare von Vierseiten vorhanden sind, so ist es eine fünffache Bedingung für zwei Vierseite (Vierecke), polar in einer gegebenen Korrelation zu sein, und von den ∞^{11} Paaren polarer Vierseite, die zu einer Korrelation gehören, gehören ∞^{6} noch zu einer zweiten Korrelation zwischen denselben Feldern. Also:

Zwei Korrelationen zwischen denselben Feldern haben ∞^{6} Paare polarer Vierseite (bzw. Vierecke), gemein.

Polare Dreiecke besitzt eine Korrelation ∞^{6}; so daß die Bedingung, weil die Anzahl von Dreieckspaaren $\infty^{2\cdot 6}$ ist, eine sechsfache ist, und zwei Korrelationen zwischen denselben Feldern nur eine endliche Anzahl von gemeinsamen Paaren polarer Dreiecke haben; wir werden finden: ein Paar.

§ 40. Metrische Eigenschaften kollinearer Felder, Fluchtgeraden, gleiche Punktreihen, Herstellung der perspektiven Lage, gleiche Strahlenbüschel.

274 Wir sind schon mit dem Begriffe der unendlich fernen Gerade einer Ebene vertraut und schließen daher sofort: Jedes von zwei kollinearen Feldern Σ, Σ' besitzt eine Fluchtgerade r, bzw. q', die der unendlich fernen Gerade r'^{∞}, q^{∞} des andern entspricht. Sind die Felder in perspektiver Lage, so wird in jedes die Fluchtgerade durch die Ebene eingeschnitten, welche durch das Perspektivitätszentrum parallel zur Ebene des andern geht; denn zwei entsprechende Geraden liegen immer in einer Ebene durch dieses Zentrum. Beide Fluchtgeraden sind dann zur Schnittlinie der Ebenen parallel.

Eine Strecke AB in Σ, deren Endpunkte zu verschiedenen Seiten von r liegen, geht in die Strecke $A' \cdot B'$ über, und ein Dreieck ABC, von dessen Ecken A, B auf der einen, C auf der andern Seite von r liegen, geht in ein Dreieck $A'B' \cdot C'$ über, wie es in Nr. 43 beschrieben wird. Sein Umfang geht zweimal „durch das Unendliche“, wie der von jenem zweimal über r.

Parallelen Geraden des einen Feldes müssen also im andern Geraden entsprechen, die durch einen Punkt auf der Fluchtgerade gehen. Machen wir uns dieses wichtige Ergebnis direkt klar. Parallele Geraden in Σ schneiden in zwei beliebige Geraden dieses Feldes ähnliche und perspektive Punktreihen ein. Diese gehen zwar nicht in ähnliche Punktreihen über, denn die Ähnlichkeit (oder Proportionalität) ist keine projektive Eigenschaft, wohl aber in projektive Punktreihen; die Perspektivität jedoch, die Eigenschaft, daß der Schnittpunkt sich selbst entspricht, ist projektiv. Also ergeben sich in Σ' projektive Punktreihen in perspektiver Lage; die Geraden, welche entsprechende Punkte verbinden, bilden einen

Büschel. Das sind die den parallelen Geraden von Σ entsprechenden. Also entspricht jedem Parallelstrahlen-Büschel von Σ in Σ' ein Büschel um einen (im allgemeinen endlichen) Punkt, der dadurch dem unendlich fernen Scheitel jenes Büschels entsprechend wird.

Wir nehmen nun zwei Büschel A, B in Σ und lassen die parallelen Strahlen in ihnen entsprechen, also den gemeinsamen Strahl AB sich selbst, so werden die Büschel dadurch gleich und perspektiv. Sie gehen durch die Kollineation über in zwei Büschel A', B', welche projektiv (im allgemeinen nicht mehr gleich) und in perspektiver Lage sind. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen von A', B', also derer, welche durch die Kollineation parallelen Strahlen von A, B entsprechen, erzeugen eine Gerade; d. h. die Punkte von Σ', welche den unendlich fernen Punkten von Σ entsprechen, oder besser, die Scheitel derjenigen Strahlenbüschel von Σ', welche den Parallelstrahlen-Büscheln von Σ entsprechen, erfüllen eine (im allgemeinen endliche) Gerade. Die Büschel A, B enthalten alle Richtungen in Σ.

Je nachdem ein Kegelschnitt (insbesondere ein Kreis) des einen Feldes die Fluchtgerade desselben nicht (reell) schneidet, berührt, (reell) schneidet, hat der entsprechende Kegelschnitt das nämliche Verhalten zur unendlich fernen Gerade seines Feldes, ist Ellipse, Parabel, Hyperbel.

Der Pol der Fluchtgerade jenes Kegelschnitts geht über in den Mittelpunkt dieses[1]).

Da zur Festlegung einer Kollineation Geraden gegeben werden können, so kann man jede Gerade zur Fluchtgerade machen, indem man ihr die unendlich ferne Gerade des andern Feldes zuordnet. Tut man dies z. B. mit einer Diagonale eines vollständigen Vierecks, so geht es in ein Parallelogramm über. An diesem sind die harmonischen Würfe einfacher zu erkennen; man kann sie also „durch Kollineation“ für den allgemeinen Fall beweisen.

In den projektiven Punktreihen auf zwei entsprechenden Geraden 275
a, a' kollinearer Felder sind die Schnitte ar, $a'q'$ mit den Fluchtgeraden ersichtlich die Fluchtpunkte. Wird daher a zu r parallel, so wird der Fluchtpunkt auf a unendlich fern; d. h. auf a und a' entsprechen sich die unendlich fernen Punkte gegenseitig, die Punktreihen auf ihnen sind ähnlich, und der Fluchtpunkt $a'q'$ auf a' ist auch unendlich fern; auch a' ist zu q' parallel.

Wenn eine Gerade zur Fluchtgerade ihres Feldes parallel ist, so gilt dies auch für die entsprechende Gerade. Sie tragen dann und nur dann ähnliche Punktreihen.

---

1) Die Aufgabe, eine Ellipse und einen Punkt in ihrem Inneren in einen Kreis und seinen Mittelpunkt zu projizieren, behandelt schon Pappus im 6. Buche der Collectio.

Bei perspektiv gelegenen kollinearen Feldern werden solche entsprechenden Geraden durch Ebenen aus dem Perspektivitätszentrum O eingeschnitten, welche zur Schnittlinie der beiden Trägerebenen parallel sind, zu der in diesem Falle ja auch die beiden Fluchtgeraden parallel sind.

Um zu ermitteln, ob es unter den Paaren entsprechender Geraden, die zu r, bzw. q' parallel sind und ähnliche Punktreihen tragen, solche gibt, bei denen die Punktreihen gleich sind, ziehen wir in Σ zwei parallele Geraden a, b, zwischen denen dann auf den Parallelen zu r Strecken von konstanter Länge liegen; a, b gehen über in auf q' sich schneidende Geraden a', b'. Diese schneiden auf den Parallelen zu q' Strecken von verschiedener Länge ein, von 0 bis ∞. Auf zweien s' und s_1', die zu beiden Seiten von q' in gleicher Entfernung liegen, wird daher jene konstante Strecke eingeschnitten. Sind s und s_1 die ihnen entsprechenden Geraden von Σ, so haben wir auf s und s', s_1 und s_1' ähnliche Punktreihen mit einmal zwei gleichen entsprechenden Strecken, also durchweg gleichen entsprechenden Strecken, gleiche Punktreihen. Natürlich haben auch s und s_1 gleiche Entfernung von von r.

Es gibt mithin in Σ zwei (stets reelle) gleichweit von r entfernte Parallelen s, s_1 zu dieser Fluchtgerade r, denen eben solche Parallelen s', s_1' zu q' entsprechen, so daß die auf s und s', s_1 und s_1' gelegenen Punktreihen gleich sind[1]).

276 Zwei derartige entsprechenden Geraden mit gleichen Punktreihen ermöglichen die Herstellung der perspektiven Lage der beiden kollinearen Felder. Denn wir brauchen nur zwei solche gleichen Punktreihen mit ihnen entsprechenden Punkten aufeinander zu legen, was wegen der Gleichheit möglich ist, so haben wir kollineare Felder, bei denen jeder Punkt der Schnittlinie sich selbst entspricht; wir wissen aus Nr. 265, daß solche Felder in perspektiver Lage sind.

Entsprechende Kurven liegen dann stets auf demselben Kegel aus dem Perspektivitätszentrum. Da wir nun einen beliebigen Kegelschnitt und einen Kreis zu entsprechenden Kurven in kol-

---

1) Gefunden wurden diese ausgezeichneten Geraden von Möbius (Barycentrischer Calcul, § 320); H. Smith nennt sie in einer interessanten Abhandlung über die „Fokaleigenschaften“ kollinearer Felder (Proceed. London Math. Society, Bd. 2, S. 196; Mathematical Papers, Bd. 1, S. 545) equisegmental axes, was wohl mit „gleichstreckigen Geraden“ wiedergegeben werden kann. An diese Smithsche Abhandlung knüpft eine von Reye an, Math. Annalen Bd. 46, S. 423. — Vgl. auch Kilbingers Straßburger Dissertation von 1880 und das Progr. des Gymn. zu Saargemünd 1883, sowie Marc. Großmanns Züricher Dissertation von 1902 und Fiedlers Darstellende Geometrie und Geometrie der Lage.

linearen Feldern machen können, so können wir sie also auch auf denselben Kegel bringen. Und wir sehen, daß die von uns Kegelschnitte genannten Kurven 2. Grades (die Erzeugnisse projektiver Strahlenbüschel oder Punktreihen) in der Tat mit diesem Namen „Kegelschnitte“ benannt werden können, welchen die Griechen den ebenen Schnitten eines Kegels über einem Kreise gegeben haben.

Die Fluchtgerade der Ebene Σ des Kreises ist die Schnittlinie der Ebene Φ', welche durch die Kegelspitze, das Perspektivitätszentrum, parallel zur Ebene Σ' geht, in der der Kegelschnitt liegt; und dieser ist nach obigem Ellipse, Parabel, Hyperbel, je nach dem diese Fluchtgerade den Kreis nicht schneidet, berührt oder schneidet, oder je nachdem die genannte Parallelebene Φ' zu Σ' durch die Spitze den Kegel nur in der Spitze trifft und die beiden Halbmäntel zu verschiedenen Seiten sind, oder den Kegel berührt[1]) oder ihn (beide Halbmäntel) in zwei Kanten schneidet. Diese Kanten sind dann zu Σ' parallel und liefern die unendlich fernen Punkte der Hyperbel; diese entsprechen den beiden Punkten S, T des Kreises, durch welche jene Kanten gehen. Von den beiden Bogen ST des Kreises liegt der eine auf derselben Seite von Φ' wie Σ', der andere auf der andern. Von den Kanten des Kegels, die nach den Punkten des ersteren Bogens gehen, trifft diejenige Halbkante, die den Kreis trifft, auch Σ', und enthält den entsprechenden Punkt der Hyperbel. Diesem Bogen entspricht derjenige Ast der Hyperbel, welcher mit dem Kreise auf dem nämlichen Halbmantel liegt; von den Kanten nach dem andern Bogen trifft die andre Halbkante die Σ', und diesem Bogen entspricht der auf dem andern Halbmantel gelegene Ast der Hyperbel. Die unendlich fernen Punkte vermitteln den Übergang von einem Aste zum andern; und der kontinuierlichen Durchlaufung des Kreises entspricht die kontinuierliche Durchlaufung der beiden Äste des Hyperbel[2]).

Den beiden Tangenten des Kreises in S, T entsprechen, da die sie aus der Kegelspitze projizierenden Ebenen nicht zu Σ' parallel sind, endliche Tangenten der Hyperbel, aber mit unendlich fernen Berührungspunkten S', T': die Asymptoten der Hyperbel, wie die Griechen sie schon genannt haben.

---

1) Es ist inkorrekt, zu sagen, wie es häufig geschieht: eine Ebene schneidet aus dem Kegel eine Parabel, wenn sie zu einer Kante parallel ist; mindestens muß gesagt werden: zu einer und nur zu einer Kante; da ja eine Ebene, die eine Hyperbel ausschneidet, auch zu Kanten parallel ist. Wesentlich besser ist, wie oben gesagt wurde.

2) Nur langsam sind sich die Griechen der Zusammengehörigkeit der beiden Äste bewußt geworden; bei Apollonius bricht die Erkenntnis durch, wenn er auch den Namen „Gegenschnitte“ noch beibehält.

Im Falle der Parabel berührt r den Kreis; die Tangentialebene Φ' des Kegels durch diese Tangente ist zu Σ' parallel und liefert die unendlich ferne Tangente der Parabel, ihre Berührungskante den zugehörigen unendlich fernen Berührungspunkt.

277 Wie es in zwei kollinearen Feldern zwei Paare entsprechender Geraden mit gleichen Punktreihen gibt, so gibt es auch zwei Paare entsprechender Punkte mit gleichen Strahlenbüscheln[1]), von Smith gleichwinklige Punkte und noch einfacher Brennpunkte genannt. Dieser letztere Name wird noch seine Rechtfertigung finden.

In dem Büschel mit auf q' gelegenem Scheitel von Σ', der dem Parallelstrahlen-Büschel der zu r, s, s_1 senkrechten Strahlen von Σ entspricht, gibt es einen zu q', s', s_1' senkrechten Strahl n'. Und so haben wir zwei ausgezeichnete entsprechende Geraden n, n', von denen n zu r, s, s_1 und n' zu q', s', s_1', senkrecht ist: nach Reye die Hauptgeraden (bei Smith die Fokalgeraden) der beiden Felder. Die Schnitte nr, ns, ns_1 seien R, S, S_1 und ebenso $n'q'$, $n's'$, $n's_1'$: Q', S', S_1'. In den projektiven Punktreihen auf n, n' haben wir zwei Paare entsprechender gleicher Strecken, die mit S, S' anfangen; die einen seien SF, $S'F'$, die andern SF_1, $S'F_1'$; wir wissen aus Nr. 57, daß R die Mitte von FF_1 und Q' die von $F'F_1'$ ist, und da diese Punkte R, Q' auch SS_1, $S'S_1'$ halbieren, so sind auch S_1F, $S_1'F'$, und S_1F_1, $S_1'F_1'$ gleich; wir kommen zu denselben Punkten F, auch von S_1 und S_1' ausgehend. Kongruente Dreiecke belehren uns, daß die Strahlenbüschel um F und F', weil sie die gleichen Punktreihen auf s und s' (oder s_1 und s_1') projizieren und F und F' gleich weit entfernt von diesen auf in entsprechenden Punkten errichteten Loten liegen, gleich sind, und ebenso die um F_1 und F_1'.

Aus diesen Kongruenzen ergibt sich auch, daß entsprechende Strahlen x, x' von F und F' (oder F_1 und F_1') mit r, s, s_1, bzw. q', s', s_1' gleiche Winkel bilden.

Man kann sich auch umgekehrt klar machen, daß, wenn die entsprechenden Strahlenbüschel um F und F' gleich sind, dann die zu s und s' (oder r und q') parallelen und die zu s und s' normalen Strahlen entsprechend sind und F und F' von den entsprechenden Punkten, welche letztere in s, s' einschneiden, gleichweit entfernt sind. Beide Paare gleichwinkliger Punkte kann man also schon aus dem einen Paare gleichstreckiger Geraden ableiten; das andere führt ebenfalls zu ihnen. Das geht aber auch aus der symmetrischen Lage von S, F und S_1, F_1 in bezug auf r und derjenigen von S', F' und S_1', F_1'

---

1) Ein Paar hat Magnus erkannt: Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analyt. Geometrie der Ebene, S. 41; doch führt seine Erörterung auch zum zweiten Paare.

in bezug auf q' hervor, wobei die gleichbezeichneten Punkte je auf derselben Seite der Symmetrieaxe liegen mögen.

Die Brennpunkte F, F_1 und F', F_1' liegen ungleichartig zu den Parallelstreifen ss_1, bzw. $s's_1'$. Dies folgt aus:

$$RS = Q'F', \quad RF = Q'S',$$

welche den Formeln:

$$RY_1 = Q'X', \quad RX = Q'Y_1'$$

von Nr. 57 entsprechen. Und ebenso auf der andern Seite:

$$RS_1 = Q'F_1', \quad RF_1 = Q'S_1'.$$

Demnach:

$$FF_1 = S'S_1', \quad SS_1 = F'F_1',$$

oder:

$$FF_1 = (s's_1'),$$
$$(ss_1) = F'F_1'.$$

Die gleichwinkligen Punkte des einen Feldes haben dieselbe Entfernung voneinander wie die gleichstreckigen Geraden des andern. Beide Strecken sind also in beiden Feldern enthalten; Smith nennt ihre Hälften die Parameter der beiden kollinearen Felder, und zwar, die Entfernungen der Brennpunkte bevorzugend, RF den Parameter des ersten, $Q'F'$ denjenigen des zweiten Feldes.

Die beiden Punktreihen $FSRS_1F_1$ und $S'F'Q'F_1'\check{S}_1'$ sind gleich; wobei $FF_1 > (ss_1)$ angenommen ist.

Wenn $(ss_1) = (s's_1')$, so fallen F, F_1, F', F_1 auf s, s_1, s', s_1' in die Punkte $S, \ldots$.

Bei perspektiver Lage der beiden kollinearen Felder ergeben sich die Brennpunkte als die Schnitte der Ebenen Σ, Σ' mit den Loten, welche aus dem Perspektivitätszentrum O auf die Halbierungsebenen der Flächenwinkel dieser Ebenen gefällt sind. Aus O betrachtet, sind die einen gleichen Strahlenbüschel gleichlaufend, die andern ungleichlaufend, daher ähnliche, unähnliche Brennpunkte (similar, dissimilar foci, Smith). Die einen gleichstreckigen Punktreihen s und s' vereinigen sich in der Schnittlinie; die andern s_1, s_1' ergeben sich durch den Büschel $\mathfrak{S}$ aus O in der Ebene, welche zur Verbindungsebene der in diesem Falle zueinander parallelen Fluchtgeraden parallel ist; die Schnitte mit Σ, Σ' sind parallel zu r, q', daher normal zu den Hauptgeraden n, n', welche durch die Symmetrieebene der Figur, die Ebene durch O senkrecht zu Σ und Σ', eingeschnitten werden. In jeder Ebene durch einen Strahl jenes Büschels $\mathfrak{S}$ ist derselbe parallel zu der einen Diagonale des Parallelogrammes, das sie aus Σ, Σ' und den beiden Parallelebenen durch O ausschneidet; folglich liegt

O in der Mitte zwischen den entsprechenden Punkten, welche der Strahl einschneidet; daraus ergibt sich die Gleichheit und der ungleiche Sinn der Punktreihen auf s_1, s_1'.

Es ist leicht, für diese Lage die Gleichheit von FF_1 und $F'F_1'$ mit $(s's_1')$ und (ss_1) zu bestätigen.

§ 41. Fokaleigenschaften[1]) der Kollineation. Metrische Eigenschaften der Korrelation.

278 Die Schnittpunkte $R = rn$, $Q' = q'n'$ nennt Smith die Mittelpunkte der beiden kollinearen Felder, und nicht mit Unrecht. Denn Fluchtgerade und Hauptgerade teilen jedes Feld in vier kongruente Viertelfelder, welche denen des andern korrespondieren. Jedes der Viertelfelder von Σ ist eingeschlossen von einem Teile von n, einem Teile von r und von einem Teile von q^∞, also muß das entsprechende von einem Teile von n', einem von r'^∞ und einem Teile von q' eingeschlossen sein, ist daher eins der durch n' und q' gebildeten Viertelfelder. Ersichtlich korrespondieren die beiden von s durchzogenen Felder I, II den beiden von s' durchzogenen I', II', und ebenso die beiden von s_1 durchzogenen III, IV den von s_1' durchzogenen III', IV'. Aber wenn III neben II und IV neben I liegt, so gilt im andern Felde nicht dasselbe; denn einer zu r senkrechten und II, III durchziehenden Gerade entspricht, weil Q' dem unendlich fernen Punkt derselben homolog ist, eine durch Q', also aus II' ins Scheitelfeld gehende Gerade, und III' ist das Scheitelfeld von II' und IV' das Scheitelfeld von I'.

Ziehen wir noch durch F, F_1 die Parallelen f, f_1 zu r und durch F', F_1' die Parallelen f', f_1' zu q', so entsprechen den Parallelstreifen $q^\infty f$, fs, sr, rs_1, s_1f_1, f_1q^∞ die Streifen $q'f'$, $f's'$, $s'r'^\infty$, $r'^\infty s_1'$, $s_1'f_1'$, $f_1'q'$.

Daraus folgt, daß, wenn etwa X dem Brennpunkte F näher liegt, als dem F_1, und daher X' dem F' näher, dann die Fokalstrahlen F_1X, $F_1'X'$ mit F_1F, bzw. $F_1'F'$ gleiche Winkel bilden, aber FX, $F'X'$ mit FF_1, $F'F_1'$ supplementäre Winkel.

Sind die beiden Paare der Brennpunkte F, F_1; F', F_1' gegeben, so ist es leicht, zu jedem X den entsprechenden X' zu konstruieren. Zunächst muß aber entschieden werden, auf welcher Seite von F_1F_1' er liegen soll. Ist das geschehen, so ergibt sich X' durch die eben besprochenen Winkelbeziehungen eindeutig, und nun auch zu jedem weitern Y der Y'. An sich ist die Kollineation durch die beiden Paare der Brennpunkte zweideutig bestimmt.

---

1) So hat Smith die im folgenden erörterten Eigenschaften genannt.

Ferner einem Punkte von Σ, der innerhalb oder außerhalb ss_1 liegt, entspricht ein Punkt von Σ' außerhalb oder innerhalb $s's_1'$, einer Gerade von Σ, welche F und F_1 auf verschiedenen oder auf derselben Seite hat (oder FF_1 bzw. $F \cdot F_1$ trifft) entspricht eine Gerade, welche F', F_1' auf derselben oder verschiedenen Seiten hat.

Zwei projektive Punktreihen auf s, s_1 werden von einem außerhalb ss_1 gelegenen Punkte X durch projektive Büschel projiziert, die ebenso gleichlaufend oder ungleichlaufend sind wie die Punktreihen; die entsprechenden Strahlenbüschel um X' sind ebenso, aber, da X' innerhalb $s's_1'$ liegt, so schneiden sie ungleichlaufende bzw. gleichlaufende Punktreihen in s', s_1' ein.

Zwei in F, F_1 gelegte projektive Büschel, die gleich- oder ungleichlaufend sind, bewirken auf einer Gerade x von Σ, welche F, F_1 auf derselben Seite hat, ebensolche projektive Punktreihen; die entsprechenden Punktreihen auf x' sind gleichfalls so beschaffen, und da nun F', F_1' auf verschiedenen Seiten liegen, so sind die projizierenden Büschel umgekehrt beschaffen.

Wird z. B. über FF_1 als Durchmesser ein Kreis konstruiert, so bewirkt dieser um F, F_1 gleiche und gleichlaufende Büschel; ihnen entsprechen in F', F_1' gleiche, aber ungleichlaufende Büschel, also entsteht eine gleichseitige Hyperbel; denn, parallel ineinander geschoben, geben diese Büschel eine gleichseitig-hyperbolische Involution. Die Rechtwinkligkeit zwischen Tangente und Durchmesser bei F, F_1 geht über; also sind F', F_1' die Scheitel der Hyperbel. Eine Hyperbel mußte entstehen, weil der Kreis die r reell schneidet.

Der rechtwinkligen Involution im Büschel F entspricht die recht- 279
winklige im Büschel F'; diese beiden Involutionen schneiden in die Fluchtgeraden r, q' die elliptischen Involutionen (r), (q') ein, welche den absoluten Involutionen (r'^{∞}), (q^{∞}) entsprechen, nach denen ja die rechtwinkligen Involutionen in F', F gehen; aber ebenso auch die in F_1 und F_1'. Zwei rechtwinkligen Geraden von Σ, welche durch ein Paar von (r) gehen, entsprechen zwei rechtwinklige Geraden in Σ', weil sie durch das entsprechende Paar von (r'^{∞}) gehen; sie gehen auch durch ein Paar von (q'), dasjenige, welches dem Paare von (q^{∞}) entspricht, durch welches jene gehen. Den beiden Involutionen (q^{∞}), (r) ist eine dritte Involution verbunden auf der Gerade, welche die dem Schnittpunkte $q^{\infty} r$ gepaarten Punkte verbindet (Nr. 82), also auf n, die auf r im Zentralpunkte R von (r) senkrecht steht. Jede zwei Geraden, welche durch ein Paar von (q^{∞}) und eins von (r) gehen, also zwei rechtwinklige Geraden, denen wiederum rechtwinklige Geraden korrespondieren, — es sei gestattet, sie pernormale Geraden zu nennen — schneiden auch ein Paar dieser dritten Involution (n) ein, und die entsprechenden rechtwinkligen Geraden ein Paar der

ebenso aus (r'^{∞}) und (q') auf n' sich ergebenden verbundenen Involution (n'). Ein rechtwinkliges Paar in F (oder F_1) geht durch zwei Paare von (q^{∞}) und (r); also sind F und F_1 die Doppelpunkte dieser dritten notwendig hyperbolischen Involution (n), und F', F_1' die von (n'). Jedes Paar pernormaler Geraden liegt harmonisch zu F und F_1 und das der entsprechenden Geraden zu F', F_1'.

Es seien I_+, I_- die absoluten Punkte von Σ (mit dem positiven, negativen Sinne behaftet, Nr. 78), also I_+', I_-' die ihnen entsprechenden Doppelpunkte der Involution (q'), ebenso J_+', J_-' die absoluten Punkte von Σ' und J_+, J_- die ihnen entsprechenden Doppelpunkte von (r), so wissen wir (Nr. 82), daß die sechs Doppelpunkte in Σ die Gegeneckenpaare eines vollständigen Vierseits bilden, und ebenso in Σ'. Es sei also $F = (I_+J_+, I_-J_-)$ und $F_1 = (I_+J_-, I_-J_+)$, $F' = (I_+'J_+', I_-'J_-')$, $F_1' = (I_+'J_-', I_-'J_+')$; den Strahlen aus F nach den absoluten Punkten I_+, I_- entsprechen in F' die Strahlen nach I_+' und I_-', also nach J_+' und J_-'; den Strahlen aus F_1 nach I_+, I_- in F_1' die Strahlen nach I_+' und I_-', also nach J_-' und J_+'. Die gleichen Büschel F, F' haben bei dieser Festsetzung beide den positiven Sinn (oder beide den negativen Sinn), die F_1, F_1' aber ungleichartigen Sinn.

280 Kreise von Σ, zu welchen (r) als Involution konjugierter Punkte gehört, gehen in Kegelschnitte über, welche die absolute Involution auf r'^{∞} zur zugehörigen haben, also in Kreise; da jenen (q^{∞}) zugehört, so gehört zu diesen die Involution (q'). So ergibt sich in jedem der Felder ein Kreisbüschel, dem in der Kollineation der andere entspricht: Fokalkreise. Die endlichen Grundpunkte sind imaginär, durch die elliptischen Involutionen (r), (q') dargestellt; r, q' sind also die Potenzlinien; und beide Büschel zerfallen in zwei Reihen auf der einen und andern Seite von r, bzw. q'. Dem Paare der absoluten Involution (q^{∞}), das auf r, n liegt, entspricht auf q' der unendlich ferne Punkt und Q', also ist Q' Zentralpunkt von (q') und R von (r). Daher sind n und n' die Zentralen der beiden Büschel. Irgend ein rechter Winkel aus F, der ja gepaarte Punkte in (r) einschneidet, lehrt, daß die Potenz von (r) gleich $-RF^2$ ist. Die vom Kreisbüschel in Σ in die Zentrale n eingeschnittene Involution ist die den beiden Involutionen (r) und (q^{∞}) konjugierter Punkte, die den Kreisen des Büschels gemeinsam sind, verbundene und eben erwähnte Involution (n) (Nr. 124) und hat denselben Zentralpunkt wie (r), aber entgegengesetzt gleiche Potenz (Nr. 82). Die gemeinsame Potenz von R in bezug auf die Kreise des Büschels ist RF^2. Daraus folgt, daß F und F_1 die sogenannten Grenzpunkte des Büschels sind, d. h. die Mittelpunkte der Punktkreise (Paare von isotropen Geraden) desselben. Entsprechende Kreise gehen in entsprechende Punktkreise durch Be-

wegung in den Büscheln über; entsprechende Kreise schließen also entsprechende Brennpunkte ein.

Sind A, B; A', B' die Durchmesser-Endpunkte, auf n, n', entsprechender Kreise, so ist, wie eben gefunden:

$$RA \cdot RB = RF^2, \quad Q'A' \cdot Q'B' = Q'F'^2.$$

Dazu tritt wegen der Potenz der Punktreihen auf n und n':

$$RA \cdot Q'A' = RB \cdot Q'B',$$

oder:

$$\frac{RA}{Q'B'} = \frac{RB}{Q'A'} = m,$$

also:

$$\frac{RA - RB}{Q'B' - Q'A'} = \frac{RA + RB}{Q'B' + Q'A'} = m;$$

links steht das Verhältnis der Radien r, r' der beiden Kreise, rechts dasjenige der Entfernung d, d' der Mittelpunkte von R, bzw. Q'; also $r : r' = d : d' = m$. Aus den obigen Gleichungen folgt aber, daß (absolut) auch $\frac{RF}{Q'F'} = m$ ist.

Daher verhalten sich sowohl die Radien entsprechender Kreise der Büschel, als auch die Entfernungen der Mittelpunkte von den Fluchtgeraden wie die Parameter RF und $Q'F'$, und werden gleich, wenn diese gleich sind, so daß entsprechende Kreise dann zur Deckung gebracht werden können.

Es seien X, Y die Schnitte eines Fokalkreises k mit einer Gerade durch den Brennpunkt F_1, der zunächst der ausgeschlossene sei, so daß k auf der andern Seite von r liegt, und X', Y' die Schnitte des entsprechenden Kreises k' mit der entsprechenden Gerade durch F_1', der ebenfalls ausgeschlossen ist. Wenn Y entfernter von r ist als X, so ist Y' näher an q' als X'. Die Winkel von F_1XY mit n und von $F_1'Y'X'$ mit n' sind gleich, hingegen bilden FX und $F'X'$ supplementäre Winkel mit FF_1, bzw. $F'F_1'$ und ebenso FY und $F'Y'$; so daß $XFY = Y'F'X'$. Die Doppelpunkte F und F_1 der Schnittinvolution des Büschels mit n sind konjugiert in bezug auf k, daher halbiert die Senkrechte in F auf n, welche Polare von F ist, den Winkel XFY und ebenso die Senkrechte in F' auf n' den Winkel $X'F'Y'$. Daher $\sphericalangle F_1FX = F_1'F'Y'$, $F_1FY = F_1'F'X'$; die gleichnamigen Dreiecke sind ähnlich, also auch $\triangle XFY \sim Y'F'X'$. Und das nämliche gilt, wenn F_1 und F_1' eingeschlossene Brennpunkte sind.

Wenn wieder X und X' den Brennpunkten F und F' näher 281
liegen, so sind, wie wir fanden, in den Dreiecken XFF_1 und $X'F'F_1'$ die Winkel F_1 und F_1' gleich, die Winkel F und F' supplementär; also liefert der Sinussatz, auf beide Dreiecke angewandt:

$$\frac{FX}{F_1X} = \frac{F'X'}{F_1'X'}.$$

Zwei entsprechende Punkte haben also proportionale Brennstrahlen.

Wir führen die Hauptgeraden n, n' als Abszissen- und die Fluchtgeraden r, q' als Ordinatenaxen ein; so daß wenn XN, $X'P'$ die Lote auf die letzteren sind, $x = NX$, $x' = P'X'$, $y = RN$, $y' = Q'P'$. Sind V, W' die Schnitte von FX mit r und von $F'X'$ mit q', also die Fluchtpunkte auf diesen entsprechenden Geraden, so ist:

$$VX \cdot W'X' = VF \cdot W'F',$$

oder wenn proportionale Größen eingesetzt werden:

$$NX \cdot P'X' = RF \cdot Q'F',$$

d. h. gleich dem Produkte der Parameter, so daß wenn diese nun mit c und c' bezeichnet werden:

$$1) \quad xx' = cc'.$$

Die Vierecke $XFRN$ und $F'X'P'Q'$ sind ähnlich. Also ist:

$$2) \quad xy' = c'y$$

und

$$yx' = cy';$$

welche aber aus 1) und 2) folgt.

Das sind Chasles' kanonische Gleichungen der Kollineation[1]).

Zwei Kurven k und l in Σ mögen sich in P berühren: mit der Tangente t; entsprechend seien k', l', P', t'. Durch P sei eine Gerade unter kleinem Winkel gegen t gezogen, welche k, l in den dem P nahe gelegenen Punkten K, L trifft; entsprechend seien wieder K', L'. Die Kreise, welche t in P berühren und durch K, bzw. L gehen, seien konstruiert, ihre Radien verhalten sich wie $PK : PL$; auf der Grenze werden sie die Krümmungskreise in P an k, l; und ähnlich in Σ'.

Es seien ds und ds_1 die Bogenelemente PK, PL, ds', ds_1' die entsprechenden, φ, φ' die Winkel der PKL, $P'K'L'$ gegen die x-Axen n, n', x, x' die Abszissen von P, P' und dx, dx_1, dx', dx_1' die den Bogenelementen entsprechenden Differentiale, so ist:

$$ds \cdot \cos\varphi = dx, \quad ds' \cdot \cos\varphi' = dx, \quad ds_1 \cos\varphi = dx_1, \quad ds_1' \cos\varphi' = dx_1'.$$

Da $x' = \frac{cc'}{x}$, so ist $dx' = -\frac{cc'}{x^2}\,dx$, $dx_1' = -\frac{cc'}{x^2}\,dx_1$.

Sind nun ρ, ρ_1; ρ', ρ_1' die Krümmungsradien, so ist:

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{ds}{ds_1} = \frac{dx}{dx_1}, \quad \frac{\rho'}{\rho_1'} = \frac{ds'}{ds_1'} = \frac{dx'}{dx_1'} = \frac{dx}{dx_1};$$

also:

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{\rho'}{\rho_1'}.$$

---

1) Chasles, Géométrie supérieure, Nr. 543.

Die Krümmungsradien zweier sich berührender Kurven im Berührungspunkte verhalten sich wie diejenigen der entsprechenden Kurven[1]).

Um in zwei entsprechenden Büscheln X, X' entsprechende gleiche (nicht supplementäre) Winkel zu erhalten, schneidet man durch einen Kreis, der durch X und den näheren Brennpunkt F geht, die Fluchtgerade r in Y, Z, denen die unendlich fernen Punkte Y', Z' korrespondieren; weil X und F auf derselben Seite von r liegen, ist:

$$\sphericalangle YXZ = YFZ = Y'F'Z' = Y'X'Z';$$

F_1 würde zu einem supplementären Winkel geführt haben.

Schneidet man zwei entsprechende Geraden x, x' mit s und r in $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}$, mit s', q' in $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{Q}'$, so ist $\mathfrak{R}\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{Q}'\mathfrak{S}'$ die Potenz der projektiven Beziehung, und die hyperbolische Involution auf x, welche $\mathfrak{R}$ zum Zentralpunkte und das μ-fache dieser Potenz zu ihrer Potenz hat, liefert die Strecken auf x, welche μ-mal so groß sind, als die entsprechenden auf x' und zwar im engeren Sinne (Nr. 57).

Damit sind wir imstande, ähnliche entsprechende Dreiecke zu konstruieren mit gegebenem Ähnlichkeits-Verhältnis μ und so, daß die endlichen Seiten einander entsprechen. Wir konstruieren, nach dem eben Gesagten, zwei entsprechende Strecken AB und $A'B' = \frac{1}{\mu} AB$, tragen in A und A' an AB, $A'B'$ die einzigen entsprechenden gleichen Winkel an. Da der Halbstrahl AB dem $A'B'$ entspricht und unsere entsprechenden Winkel von entsprechenden Halbstrahlen durchlaufen werden, so sind auch die freien Schenkel entsprechende Halbstrahlen. Die einzig möglichen entsprechenden Strecken AC, $A'C'$, welche beide endlich und das Verhältnis μ haben, fallen also entweder beide auf diese Halbstrahlen oder beide auf die ergänzenden. Die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ sind in der gewünschten Weise ähnlich.

Ein Kegelschnitt in Σ, der in einem Brennpunkt F der 282
Kollineation seinen einen Brennpunkt hat, geht in einen andern Kegelschnitt über, der im entsprechenden F' einen Brennpunkt hat; weil dem Brennpunkt eines Kegelschnitts in bezug auf denselben eine rechtwinklige Involution konjugierter Strahlen zukommt[2]).

Ist der erste Kegelschnitt ein Kreis um F, so ergibt sich für den zweiten q' als zum Brennpunkte F' gehörige Direktrix. Die Exzentrizität dieses Kegelschnitts ist $\frac{F'X'}{X'P'}$, was $= \frac{FX}{RF}$ ist infolge

---

1) Gefunden von Smith, mit ausführlicherem Beweise bei Reye.

2) Vorläufig verweisen wir, um dies nicht zu verschieben, auf Steiner-Schröters Vorlesungen, § 35; wir kommen in Nr. 317 beim Polarfelde auf die Fokaleigenschaften des Kegelschnitts zu sprechen.

der obigen Ähnlichkeit von $XFRN$ und $F'X'P'Q'$; sie ist also gleich dem Verhältnis des Radius des gegebenen Kreises zum Parameter seines Feldes.

Betrachten wir nun die Schar konfokaler Kegelschnitte (F, F_1), welche F und F_1 zu Brennpunkten hat. Sie geht über in die Schar konfokaler Kegelschnitte (F', F'_1), und zwar die Ellipsen und Hyperbeln in die Hyperbeln und Ellipsen; denn wie jene sich zu r verhalten, auf welche alle Nebenaxen fallen, so verhalten sich diese zur unendlich fernen Gerade r'^{∞}.

Die Involutionen (n), (n') sind die Fokalinvolutionen, welche die reellen Brennpunkte definieren, und (r), (q') definieren die imaginären. Zwei pernormale Geraden des ersten Feldes, welche durch Paare von (r) und (n) gehen, sind rechtwinklig konjugiert in bezug auf alle Kegelschnitte der Schar (F, F_1), und die entsprechenden in bezug auf alle von (F', F_1').

Sind A, A' entsprechende Scheitel auf den Hauptaxen n, n', so ist:

$$RA \cdot Q'A' = RF \cdot Q'F';$$

das Produkt der halben Hauptaxen entsprechender Kurven aus diesen Scharen ist gleich dem Produkte der Parameter der beiden Felder. Schreibt man dies in der Form:

$$\frac{RF}{RA} = \frac{Q'A'}{Q'F'},$$

so bedeutet es, daß die Exzentrizitäten der beiden Kurven reziprok sind.

Es seien X, X' zwei entsprechende Punkte der Felder; durch jeden seien die beiden Kurven aus der betreffenden Schar gelegt. Die rechtwinkligen Tangenten in X an Ellipse und Hyperbel seien t_e, t_h; sie sind zugleich Normalen an Hyperbel und Ellipse n_h, n_e; ebenso haben wir im andern Felde ihnen bzw. entsprechend $t_h' \equiv n_e'$, $t_e' \equiv n_h'$. Dies sind die beiden entsprechenden rechten Winkel in den Büscheln X und X'.

Weil also auch die Normalen entsprechender Kurven der beiden Scharen in homologen Punkten entsprechend sind, so gilt das auch für die Krümmungsmittelpunkte und für die Evoluten.

Bezeichnen wir die Fokalstrahlen nach den entsprechenden Punkten X, X' mit ρ, ρ_1; ρ', ρ_1' und die halben Hauptaxen mit a_e, a_h, a_h', a_e', so ist bekanntlich:

$$\rho + \rho_1 = 2\,a_e, \quad \rho_1 - \rho = 2\,a_h, \quad \rho' + \rho_1' = 2\,a_e', \quad \rho_1' - \rho' = 2\,a_h';$$
$$\tfrac{1}{4}(\rho + \rho_1)(\rho_1' - \rho') = a_e a_h', \quad \tfrac{1}{4}(\rho_1 - \rho)(\rho' + \rho_1') = a_h a_e'.$$

Aus der in Nr. 281 gefundenen Proportion $\rho : \rho_1 = \rho' : \rho_1'$ folgt aber, daß die links stehenden Produkte gleich sind, also ist:

$$a_e a_h' = a_e' a_h \quad \text{oder} \quad \frac{a_e}{a_h} = \frac{a_e'}{a_h'}.$$

Die Hauptaxen zweier ungleichartigen Kurven der einen Schar sind umgekehrt proportional denen der entsprechenden Kurven der andern Schar, direkt proportional denen der gleichartigen unter diesen entsprechenden.

Kommen X und X' in entsprechende Scheitel auf den Hauptaxen, so wird:

$$\tfrac{1}{4}(\rho + \rho_1)(\rho_1' - \rho') = \tfrac{1}{4}(\rho_1 - \rho)(\rho' + \rho_1') = RF \cdot Q'F' = cc'.$$

Folglich ist cc' der gemeinsame und konstante Wert von $a_e a_h'$ und $a_h a_e'$, aber auch der gemeinsame Wert der beiden gleichen Produkte $\frac{1}{4}(\rho + \rho_1)(\rho_1' - \rho')$ und $\frac{1}{4}(\rho_1 - \rho)(\rho' + \rho_1')$, wenn $\rho, \ldots$ wieder die Fokalstrahlen aus beliebigen entsprechenden Punkten sind.

In den entsprechenden Büscheln X, X' sind n_e und n_e' die Halbierungslinien der Winkel FXF_1, $F'X'F_1'$, nicht entsprechende Schenkel der entsprechenden rechten Winkel; daher ist, wenn wir die Winkel der Dreiecke FXF_1, $F'X'F_1'$ nur durch die Ecken bezeichnen, die Potenz der projektiven Beziehung:

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} X \cdot \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} X' = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(F + F_1) \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(F' + F_1')$$
$$= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(F + F_1) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\pi - F + F_1) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(F + F_1) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(F - F_1)$$
$$= \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(F + F_1)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(F - F_1)} \text{ und ebenso } = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(F' + F_1')}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(F' - F_1')};$$

also:

$$\frac{\rho + \rho_1}{\rho_1 - \rho} = \frac{\rho' + \rho_1'}{\rho_1' - \rho_1},$$

wie wir schon wissen.

Zwei korrelative Felder Σ, Σ' enthalten zwei ausgezeich- 283
nete Punkte R, Q', welche je der unendlich fernen Gerade r'^∞, q^∞ des andern Feldes entsprechen und die Mittelpunkte der Felder genannt werden. Ein Parallelstrahlen-Büschel in Σ geht über in eine Punktreihe auf einer Gerade durch Q', und zwei Büschel A, B, deren parallele Strahlen einander zugeordnet sind, werden projektive Punktreihen in perspektiver Lage mit dem Zentrum Q'.

Je nachdem R innerhalb, auf oder außerhalb eines Kegelschnitts in Σ liegt, ist der entsprechende in Σ' Ellipse, Parabel, Hyperbel; die Polare von R in bezug auf jenen geht in den Mittelpunkt von diesem über, und dem Mittelpunkte des ersteren entspricht die Polare von Q' in bezug auf den zweiten. Den absoluten Involutionen

(q^∞), (r'^∞) entsprechen elliptische Strahleninvolutionen (Q'), (R). Sei $S^\infty T^\infty$ das Paar von (q^∞), welchem das rechtwinklige Paar $s't'$ von (Q') entspricht, so sind RS^∞ und RT^∞ die Polaren, in der Korrelation, der unendlich fernen Punkte von s', t', die ihrerseits ein Paar in (r'^∞) bilden; also bilden $R(S^\infty, T^\infty)$ das rechtwinklige Paar st in (R). Die Geraden s, t des einen rechtwinkligen Paars in den Involutionen (R), (Q') sind daher den Geraden s', t' des andern konjugiert (Nr. 267).

Ein Kreis in Σ geht in einen Kreis über, wenn ihm die Involution (R) als Involution konjugierter Strahlen zugehört, dem entsprechenden Kreise gehört dann (Q') zu. Zu der Involution (R) gehören zwei Systeme von Kreisen, welche die Mittelpunkte auf den Schenkeln s, t des rechtwinkligen Paars haben, und zwar, wenn t innerhalb des stumpfen Winkels eines und dann aller Paare liegt, führen deren Punkte zu reellen Kreisen $\mathfrak{K}_t$, während die von s, die innerhalb der spitzen Winkel liegt, imaginäre Kreise $\mathfrak{K}_s$ liefern (Nr. 116).

Wenn M auf s oder t liegt, so ist die Polare von R in bezug auf den zugehörigen Kreis von M senkrecht zu s, bzw. t; R und diese seine Polare gehen durch die Korrelation über in die unendlich ferne Gerade r'^∞ und den Mittelpunkt des entsprechenden Kreises; da jene Polare durch T^∞, bzw. S^∞ geht, so liegt dieser Mittelpunkt auf t', bzw. s'. In Σ' trägt also s' die Mittelpunkte der reellen Kreise $\mathfrak{K}'_{s'}$, die den $\mathfrak{K}_t$ entsprechen, und t' die der imaginären $\mathfrak{K}'_{t'}$, welche den $\mathfrak{K}_s$ korrespondieren, also liegt s' in den stumpfen Winkeln der Paare von (Q') und t' in den spitzen Winkeln.

Den Übergang von den reellen $\mathfrak{K}_t$ zu den imaginären $\mathfrak{K}_s$ bilden der Nullkreis um R oder das Paar der isotropen Geraden aus R und das Paar der absoluten Punkte auf q^∞, denen durch die Korrelation das Paar der absoluten Punkte auf r'^∞ und der Nullkreis um Q' entsprechen.

§ 42. Besondere Fälle der Kollineation: Affinität, Ähnlichkeit, Kongruenz.

284 Die Kollineation wird Affinität genannt[1]), wenn die unendlich fernen Geraden sich gegenseitig entsprechen: q^∞ und q'^∞. Es gibt dann keine endlichen Fluchtgeraden und die Ergebnisse der vorangehenden Betrachtungen, welche solche voraussetzen, gelten nicht. Jedem endlichen Punkte entspricht ein ebensolcher, sich

1) Den Namen hat wiederum Möbius geschaffen: Barycentrischer Calcul, § 147. Er erwähnt, daß von affinen Kurven schon Euler in der Introductio in Analysin infinitorum gesprochen habe (Bd. II, Kap. 18).

schneidende oder parallele Geraden gehen in gleichartige über; jeder Richtung entspricht eine Richtung.

Affine Felder in perspektiver Lage ergeben sich, wenn das Perspektivitätszentrum unendlich fern ist in einer Richtung, die in keiner der beiden Ebenen enthalten ist, oder wenn die beiden Ebenen parallel sind; doch ist dies eine Lage, die einem weiteren Spezialfalle zugehört.

Jeder der drei Kegelschnitte geht in einen gleichartigen über, da das Verhalten zu den entsprechenden Geraden q^∞ und q'^∞ dasselbe ist. Die Mittelpunkte sind entsprechend, als Pole dieser entsprechenden Geraden.

Die Punktreihen auf entsprechenden Geraden haben durchweg ihre unendlich fernen Punkte zu entsprechenden, sind also ähnlich. Jedes Teilverhältnis geht von der einen Ebene unverändert in die andere über.

Es sei k das konstante Verhältnis $A'B':AB$ entsprechender Strecken auf den entsprechenden Geraden a', a, und b zu a parallel, dann ist b' zu a' parallel; es sei weiter CD auf b gleich AB auf a, so daß $ABDC$ ein Parallelogramm ist; also ist $AC \parallel BD$ und daher $A'C' \parallel B'D'$, und weil auch $C'D' \parallel A'B'$, so ist $C'D' = A'B'$; mithin $\frac{C'D'}{CD} = \frac{A'B'}{AB} = k$. Es gehört also k nicht bloß zu a' und a, sondern auch zu b' und b.

Zu jeden zwei entsprechenden Richtungen gehört ein konstantes Verhältnis entsprechender Strecken von diesen Richtungen.

Wenn es daher entsprechende Geraden mit gleichen Punktreihen gibt ($|k| = 1$), so müssen durch jede zwei entsprechenden Punkte A, A' solche gehen; A, A' müssen Anfangspunkte von entsprechenden gleichen Strecken sein. Wir legen um A als Mittelpunkt einen Kreis, ihm entspricht eine Ellipse um A' als Mittelpunkt. Nun ist aber möglich, daß alle Halbmesser der Ellipse größer oder alle kleiner sind als der Radius des Kreises; dann gibt es in den affinen Feldern keine entsprechenden gleichen Strecken. Wenn aber der Radius des Kreises von den Halbaxen der Ellipse seiner Größe nach eingeschlossen wird, so enthält diese zwei ihm gleiche Halbmesser; es gehen durch A zwei Geraden, deren Punktreihen den entsprechenden durch A' gleich sind, und wir haben dann zwei entsprechende Parallelstrahlen-Büschel, deren homologe Geraden gleiche Punktreihen tragen. Wir suchen nach einem Kennzeichen.

Die beiden entsprechenden rechten Winkel in zwei entsprechenden Strahlenbüscheln führen uns sofort zu zwei ausgezeichneten

Richtungen der einen Ebene, die zueinander rechtwinklig sind und deren entsprechende es ebenfalls sind. Also haben in allen Büscheln des einen Feldes diese beiden Geraden, die selbst rechtwinklig sind und denen rechtwinklige Geraden korrespondieren, feste Richtungen: pernormale Richtungen. Die ihnen zukommenden konstanten Verhältnisse seien σ, τ. Aus R, R' ziehen wir entsprechende Strecken von diesen Richtungen:

$$RS = s,\quad R'S' = s',\quad RT = t,\quad R'T' = t';\ \text{also}\ \frac{s'}{s} = \sigma,\ \frac{t'}{t} = \tau.$$

Die Geraden ST, $S'T'$ sind entsprechend. Wenn durch R, R' entsprechende Geraden mit gleichen Punktreihen gehen, so müssen sie ST, $S'T'$ in X und X' so schneiden, daß $RX = R'X'$, und ein Paar gleicher entsprechender Strecken reicht hin, die Ähnlichkeit der Punktreihen in Gleichheit zu verwandeln.

Wegen der ähnlichen Punktreihen auf ST, $S'T'$ haben wir:

$$\frac{SX}{TX} = \frac{S'X'}{T'X'} = \lambda.$$

Es seien XX_1, XX_2 die Lote aus X auf RS, RT, so ist, weil $XX_1 \| RT$, $XX_2 \| RS$:

$$\frac{RX_1}{RS} = \frac{TX}{TS} = \frac{TX}{TX - SX} = \frac{1}{1-\lambda},\quad \frac{RX_2}{RT} = \frac{SX}{ST} = \frac{SX}{SX - TX} = -\frac{\lambda}{1-\lambda};$$

nun ist: $RX^2 = XX_1{}^2 + XX_2{}^2$, also:

$$= \frac{s^2 + \lambda^2 t^2}{(1-\lambda)^2}:$$

ebenso:

$$R'X'^2 = \frac{s'^2 + \lambda^2 t'^2}{(1-\lambda)^2};$$

folglich muß sein: $s^2 + \lambda^2 t^2 = s'^2 + \lambda^2 t'^2$,

$$\lambda^2 = \frac{s - s'^2}{t'^2 - t^2} = \frac{s^2}{t^2}\,\frac{1-\sigma^2}{\tau^2 - 1} = \frac{s'^2}{t'^2}\cdot\frac{\frac{1}{\sigma^2} - 1}{1 - \frac{1}{\tau^2}}.$$

Nun ist $\lambda = \dfrac{SX}{TX} = \dfrac{s}{t}\,\dfrac{\sin \mathfrak{s}\mathfrak{g}}{\sin \mathfrak{t}\mathfrak{g}}$, $\lambda = \dfrac{S'X'}{T'X'} = \dfrac{s'}{t'}\cdot\dfrac{\sin \mathfrak{s}'\mathfrak{g}'}{\sin \mathfrak{t}'\mathfrak{g}'}$ (Nr. 53), wenn die Geraden RS, RT, RX, $R'S'$, ... mit $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{s}'$, ... bezeichnet werden; $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ sind entsprechende Geraden, wie wir sie suchen. Also:

$$\left(\frac{\sin \mathfrak{s}\mathfrak{g}}{\sin \mathfrak{t}\mathfrak{g}}\right)^2 = \operatorname{tang} \mathfrak{s}\mathfrak{g}^2 = \frac{1-\sigma^2}{\tau^2 - 1},\quad \left(\frac{\sin \mathfrak{s}'\mathfrak{g}'}{\sin \mathfrak{t}'\mathfrak{g}'}\right)^2 = \operatorname{tang} \mathfrak{s}'\mathfrak{g}'^2 = \frac{\frac{1}{\sigma^2} - 1}{1 - \frac{1}{\tau^2}}.$$

Für die Realität der $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ ist also erforderlich und hinreichend, daß σ, τ ungleichartig sind, das eine echt, das andere unecht.

Zwei affine Felder haben also stets und nur dann zwei reelle Paare entsprechender Richtungen mit entsprechenden gleichen Strecken, — gleichstreckige Richtungen —, wenn von den beiden konstanten Verhältnissen, welche zu den beiden Paaren entsprechender Richtungen gehören, die sowohl in dem einen als im andern Felde rechtwinklig sind, das eine echt, das andere unecht ist[1]).

Das bedeutet für einen Kreis und seine entsprechende Ellipse, daß $a' > r > b'$.

Weil die beiden Teilverhältnisse $\frac{\sin \mathfrak{s}\mathfrak{g}}{\sin \mathfrak{t}\mathfrak{g}}$ entgegengesetzt gleich sind, so sind die beiden Geraden $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ durch R zu den rechtwinkligen Geraden $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ harmonisch, und ebenso in der andern Ebene.

Wenn affine Felder keine entsprechenden gleichstreckigen Geraden haben, so können sie nicht in perspektive Lage gebracht werden.

Im andern Falle aber ist, weil die Perspektivmachung zu einer endlichen Schnittlinie führt, das Perspektivitätszentrum unendlich fern; in der Tat, wenn die Punktreihen $ABC \ldots E$ und $A'B'C' \ldots E'$ ähnlich sind und E' mit E sich auf der Schnittlinie deckt, so sind AA', BB', CC', ... parallel.

Affine Felder haben im allgemeinen keine entsprechenden Kreise; denn die absoluten Involutionen entsprechen einander nicht. Tun sie es, so tritt der spezielle Fall der Affinität, den wir mit Ähnlichkeit bezeichnen werden und in dem dann jedem Kreis ein Kreis entspricht, ein.

Das Verhältnis der Flächeninhalte zweier entsprechen- 285
der Figuren affiner Felder ist konstant.

Es seien ABC, ABD zwei Dreiecke des einen Feldes mit einer gemeinsamen Seite, $A'B'C'$, $A'B'D'$ die entsprechenden Dreiecke; ferner sei E der Schnitt (AB, CD) und $E' = (A'B', C'D')$ der entsprechende. Es ist (Nr. 52) auch dem Vorzeichen nach:

$$\triangle\, ABC : ABD = CE : DE,$$
$$\triangle\, A'B'C' : A'B'D' = C'E' : D'E';$$

nun ist aber, weil die Punktreihen auf CDE, $C'D'E'$ ähnlich sind:

$$CE : DE = C'E' : D'E';$$

also auch:

$$\triangle\, ABC : ABD = \triangle\, A'B'C' : A'B'D'.$$

Weil dies auch dem Vorzeichen nach gilt, so folgt, daß die einen und andern Dreiecke gleichartig liegen, in beiden

1) Vgl. Journal f. Mathem., Bd. 99, S. 318. — Ein weniger einfaches Kennzeichen hat Möbius ohne Beweis mitgeteilt: Barycentrischer Calcul, § 230.

Feldern auf derselben Seite von AB, bzw. $A'B'$ oder in beiden auf verschiedenen Seiten.

Diese Formel folgt aus der Möbiusschen (Nr. 264):

$$\frac{ABC}{ABD}:\frac{AEC}{AED}=\frac{A'B'C'}{A'B'D'}:\frac{A'E'C'}{A'E'D'},$$

wenn E auf der Parallelen durch A zu CD und daher E' auf der Parallelen durch A' zu $C'D'$ liegt; denn es ist dann:

$$\frac{AEC}{AED}=\frac{A'E'C'}{A'E'D'}=1.$$

Wir geben der Proportion die Form:

$$\triangle\, ABC:A'B'C'=\triangle\, ABD:A'B'C'.$$

Sind nun ABC, DEF zwei beliebige Dreiecke in Σ und $A'B'C'$, $D'E'F'$ die entsprechenden in Σ', so ziehe man AD, BD, BE, $A'D'$, ... und hat:

$$\triangle\, ABC:A'B'C'=\triangle\, ABD:A'B'D'$$
$$=\triangle\, BDE:B'D'E'=\triangle\, DEF:D'E'F'.$$

Daher gilt die Proportion für beliebige zwei Dreiecke und ihre entsprechenden.

Andere geschlossene Figuren teilt man in Dreiecke (die unendlich klein anzunehmen sind, wenn die Umfänge krummlinig werden), und da in den entsprechenden Figuren die durch entsprechende Teilung entstandenen Teildreiecke gleichartig gelagert sind, so folgt der Satz auch für solche Figuren.

Wenn unter einer Reihe von Figuren des einen Feldes eine dem Inhalte nach die größte oder kleinste ist, so gilt das nämliche auch für die entsprechenden Figuren im andern Felde.

Wenn das zweite Feld die Orthogonalprojektion des ersten ist, so projiziert sich ein rechtwinkliges Dreieck ACB in Σ, von dem eine Kathete AC in die Schnittlinie der beiden Ebenen fällt, in ein ebensolches rechtwinkliges Dreieck $AB'C$; denn aus B ist BC auf die Schnittlinie senkrecht gezogen mit dem Fußpunkte C; ferner ist BB' senkrecht auf Σ', folglich ist $B'C$ senkrecht zur Schnittlinie. Da BCB' der Neigungswinkel α der Ebenen Σ, Σ' ist, so ist $\frac{B'C}{BC}=\cos\alpha$; die rechtwinkligen Dreiecke mit derselben Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen BC, $B'C'$, also ist auch: $\frac{\triangle\, AB'C}{\triangle\, ABC}=\cos\alpha$.

Das konstante Verhältnis entsprechender Flächen ist in diesem Falle gleich dem Kosinus des Neigungswinkels der beiden Ebenen.

Der Mittelpunkt eines Kegelschnitts geht in denjenigen des entsprechenden Kegelschnitts über, und da schon bei der allgemeinen Kollineation konjugierte Elemente in ebensolche übergehen, so gehen jetzt bei der Affinität konjugierte Durchmesser in konjugierte Durchmesser, bei einer Hyperbel die Asymptoten in die Asymptoten der entsprechenden Hyperbel über. 286

Drei Paare entsprechender Punkte oder drei Paare entsprechender Geraden, also zwei entsprechende Dreiecke bestimmen, neben den unendlich fernen Geraden, die Affinität vollständig und eindeutig (Nr. 264, 266).

Um zwei Ellipsen affin zu machen, lasse man den Mittelpunkt und zwei Punkte der einen, nach denen konjugierte Durchmesser gehen, dem Mittelpunkte und zwei eben solchen Punkten der andern entsprechen; in der dadurch bestimmten Affinität entspricht der ersten Ellipse eine Ellipse, die mit der zweiten den Mittelpunkt und zwei konjugierte Halbmesser gemeinsam hat, also, weil eine Ellipse dadurch eindeutig bestimmt wird, mit ihr identisch ist.

Zwei Hyperbeln macht man affin, wenn man die Asymptoten und eine Tangente der einen den Asymptoten und einer Tangente der andern entsprechen läßt; denn durch diese Elemente ist die Hyperbel eindeutig bestimmt.

Zwei Parabeln macht man affin, indem man einen Durchmesser der einen, seine Endpunktstangente und eine zweite Tangente ebensolchen Elementen der zweiten zuordnet; denn wiederum bestimmen diese Elemente die Parabel eindeutig.

Insbesondere kann man jede beliebige Ellipse und einen Kreis zu entsprechenden Kurven in affinen Feldern machen.

Wir wollen, als Anwendung der Affinität, hieraus und aus dem obigen Satze über größte und kleinste Figuren einige interessante Folgerungen ziehen.

Wenn einem Kreise ein gleichseitiges Dreieck eingeschrieben ist, so halbiert jede Seite den ergänzenden Halbmesser desjenigen, der nach der Gegenecke geht, und ist zu der Tangente in dieser Ecke parallel. Für die affine Ellipse gilt dasselbe, denn diese Eigenschaften bleiben erhalten, die Gleichseitigkeit aber nicht. Und wenn diese Eigenschaft bei einem dem Kreise eingeschriebenen Dreiecke für eine Seite und Gegenecke gilt, so ist es gleichseitig und die Eigenschaft gilt auch für die andern Seiten und Gegenecken.

Umgekehrt, jedes einer Ellipse eingeschriebene Dreieck, in welchem eine Seite den Halbmesser halbiert, welcher den nach der Gegenecke gehenden ergänzt, und zur Tangente in dieser Ecke parallel ist, geht in einer Affinität, in der die Ellipse einem Kreise entspricht, in ein dem Kreise eingeschriebenes Dreieck über, für das in bezug auf die

Seite und die Gegenecke, welche jenen entsprechen, dasselbe gilt, welches infolge dessen ein gleichseitiges Dreieck ist und bei dem diese Eigenschaften dann auch für die beiden andern Seiten und Gegenecken eintritt; so daß letzteres wiederum auch für die Ellipse gilt.

Der Mittelpunkt des Kreises ist der Schwerpunkt des gleichseitigen Dreiecks; die Halbierungen, die ihn als solchen charakterisieren, bleiben bei der Affinität erhalten, so daß der Mittelpunkt der Ellipse ebenfalls Schwerpunkt des eingeschriebenen Dreiecks ist.

Konstruieren wir nun alle derartig der Ellipse eingeschriebenen Dreiecke, so erhalten wir im andern Felde alle dem Kreise eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecke. Diese sind von demselben Inhalt und größer als alle andern dem Kreise eingeschriebenen Dreiecke[1]). Folglich gilt dasselbe auch für die der Ellipse in der obigen Weise eingeschriebenen Dreiecke. Wir erhalten:

Es gibt ∞^1 einer Ellipse eingeschriebene Dreiecke, welche, untereinander gleich, größer sind als alle übrigen eingeschriebenen Dreiecke und alle den Mittelpunkt der Ellipse zum Schwerpunkte haben. Jeder Punkt X der Ellipse liefert eins; ist nämlich XMX_1 der nach ihm gehende Durchmesser, so ziehe man zu der Tangente in X durch die Mitte des Halbmessers MX_1 die Parallele, welche die Ellipse in den beiden andern Ecken Y, Z schneidet. Bei jedem dieser Dreiecke ist auch ZX parallel zur Tangente von Y und halbiert MY_1, XY parallel zur Tangente von Z und halbiert MZ_1.

Ebenso erhält man aus dem Satze, daß unter allen einem Kreise umgeschriebenen Dreiecken die gleichseitigen den kleinsten Inhalt haben, folgenden Satz für die Ellipse. Es gibt ∞^1 einer Ellipse umgeschriebene Dreiecke, welche, untereinander gleich, kleiner sind als die übrigen umgeschriebenen und alle den Mittelpunkt zum Schwerpunkte haben. Jede Tangente x liefert eins; der Halbmesser MX_1 nach ihrem Berührungspunkte X_1 werde über den Mittelpunkt so weit bis X verlängert, daß $MX = 2X_1M$; die Tangenten aus X sind die beiden andern Seiten, und für jede von ihnen und die Gegenecke gilt dasselbe wie für x und X.

Und ähnlich:

Die Parallelogramme, welche in den Endpunkten zweier konjugierten Durchmesser einer Ellipse ihre Ecken haben, haben gleichen Inhalt und sind größer als alle andern eingeschriebenen Parallelogramme.

Die Parallelogramme, welche mit ihren Seiten eine Ellipse in den Endpunkten konjugierter Durchmesser be-

1) Es kommt uns hier nicht auf den Beweis dieses Kreissatzes an, den wir als bekannt voraussetzen, sondern nur auf seine Übertragung auf die Ellipse.

rühren, haben gleichen Inhalt und sind kleiner als alle andern umgeschriebenen Parallelogramme.

Und auch:

Die Sehnen, welche von einer Ellipse Segmente gleichen Inhalts abschneiden, umhüllen eine ihr konzentrische Ellipse mit derselben Involution konjugierter Durchmesser.

Denjenigen speziellen Fall der Affinität, in welchem das kon- 287
stante Verhältnis entsprechender Flächen 1 ist, bezeichnet Möbius als Gleichheit[1]).

Zwei flächengleiche Dreiecke legen eine Gleichheit fest.

Sind die Dreiecke, durch deren Entsprechen die Affinität festgelegt wird, ähnlich, so gilt dies für jede zwei entsprechenden Figuren.

Die gegebenen Dreiecke seien $ABC \equiv abc$ und $A'B'C' \equiv a'b'c'$. Die entsprechenden Geraden x und x' mögen b, c in Y, Z, b', c' in Y', Z' schneiden. Wegen der ähnlichen Punktreihen auf b und b', c und c' gilt:

$$AY : A'Y' = AC : A'C', \quad AZ : A'Z' = AB : A'B';$$

wegen der vorausgesetzten Ähnlichkeit ist:

$$AC : A'C' = AB : A'B';$$

also:

$$AY : A'Y' = AZ : A'Z'.$$

Ferner ist $\sphericalangle\, YAZ = Y'A'Z'$. Denn wegen der auch dem Vorzeichen nach geltenden Proportionalität in den ähnlichen Punktreihen auf b und b' liegen Y und Y' beide auf denjenigen Seiten von A und A', auf denen C und C' liegen, oder beide auf den andern, und ebenso liegen Z und Z' auf c und c'; daher sind YAZ und $Y'A'Z'$ beide die Winkel von ABC und $A'B'C'$ oder beide deren Scheitelwinkel oder beide Außenwinkel, also jedenfalls gleich. Demnach ist $\triangle\, xbc \sim x'b'c'$, wo wir a und a' durch x und x' ersetzt haben; ebenso ist $xyc \sim x'y'c'$ und $xyz \sim x'y'z'$. Das sind beliebige entsprechende Dreiecke. Zwei entsprechende Polygone mit mehr Seiten teilt man durch entsprechende Diagonalen in Dreiecke; folglich bestehen die beiden Figuren aus ähnlichen und, wie in Nr. 285 erkannt wurde, ähnlich gelagerten Teildreiecken und sind selbst ähnlich. Zwei von krummen Linien umschlossene entsprechende Figuren haben die Eigenschaft, daß jedem Polygone, das der einen Figur eingeschrieben ist, ein der andern Figur eingeschriebenes entspricht, dessen Ecken den Ecken des ersteren korrespondieren, und das daher ihm ähnlich ist. Die Figuren sind als ähnlich zu bezeichnen; denn das ist die Definition ähnlicher Figuren, welche krummlinig begrenzt sind.

---

1) Barycentrischer Calcul, § 161.

Während bei der allgemeinen Affinität das Verhältnis k entsprechender Strecken sich ändert, wenn von zwei entsprechenden Richtungen zu andern übergegangen wird, ist es im jetzigen Falle konstant. Denn seien b und b', c und c' beliebige entsprechende Geraden mit den Schnitten $A = bc$, $A' = b'c'$ und den entsprechenden Punkten C und C' auf den ersteren, B und B' auf den letzteren, so ist für b und b' und ihre Richtungen $k_b = \frac{A'C'}{AC}$, für c und c' und ihre Richtungen $k_c = \frac{A'B'}{AB}$. Aber wegen der Ähnlichkeit von ABC und $A'B'C'$ ist $k_b = k_c = k$.

Und diejenige absolute Konstante, die schon bei der allgemeinen Affinität vorkommt, das Verhältnis entsprechender Flächen, ist das Quadrat dieser nunmehr auch absoluten Konstante k.

Dieser Spezialfall der Affinität heißt Ähnlichkeit. Die Ähnlichkeit entsprechender Figuren bedingt durchgängige Gleichheit entsprechender Winkel, durchgängige Gleichheit entsprechender Büschel.

Wenn zwei affine Felder ein Paar entsprechender Büschel haben, welche gleich sind, so ist es möglich, diese Büschel parallel zu stellen, d. h. jeden Strahl des einen parallel zu seinem entsprechenden. Die beiden Ebenen sind auch dann parallel. Die entsprechenden unendlich fernen Geraden decken sich und zwar entspricht jeder Punkt dieser Gerade sich selbst, weil immer zwei entsprechende Geraden aus den beiden Büscheln nach ihm gehen. Folglich müssen auch zwei andere entsprechende Geraden der beiden Felder den unendlich fernen Punkt gemeinsam haben, also parallel sein. In der Tat, wenn die beliebige Gerade x des ersten Feldes mit der Gerade y des obigen Büschels in diesem Felde parallel ist, dann sind, wegen der Affinität, auch x' und y' parallel; y und y' haben wir parallel gestellt, also sind auch x und x' parallel.

Weil aber in der jetzigen Stellung der beiden Ebenen jede zwei entsprechenden Geraden parallel sind, so sind stets zwei entsprechende Winkel gleich, zwei entsprechende Dreiecke ähnlich; die Affinität ist Ähnlichkeit, und daran ändert die Zurückverlegung der Ebene in die ursprüngliche Lage nichts. Also:

Wenn zwei affine Felder ein Paar entsprechender Büschel besitzen, welche gleich sind, so gilt dies durchweg; es liegt Ähnlichkeit vor. In zwei affinen Feldern, die nicht ähnlich sind, gibt es keine gleichen entsprechenden Büschel.

In ähnlichen Feldern entspricht, eben wegen der Ähnlichkeit, jedem Kreise wieder ein Kreis; also sind die einen absoluten Punkte den andern absoluten Punkten entsprechend, weil diese Punkte Schnitte entsprechender Kurven mit entsprechenden Geraden sind. Die absoluten Punkte bestimmen, je als Doppelpunkte, die absolute Involution.

Es entspricht daher auch der einen absoluten Involution die andere, und in der Tat, wegen der Gleichheit entsprechender Winkel, entsprechen zwei rechtwinkligen Geraden des einen Feldes zwei eben solche im andern, den unendlich fernen Punkten jener die unendlich fernen Punkte dieser, also jedem Paare der einen absoluten Involution ein Paar der andern.

Und umgekehrt, das Entsprechen der absoluten Punkte, oder, was dasselbe ist, der absoluten Involutionen ist Kennzeichen der Ähnlichkeit. Denn zunächst sind die Träger dieser Involutionen entsprechend, also liegt Affinität vor; ferner entsprechen ja, wegen der Korrespondenz der beiden Involutionen, rechtwinkligen Geraden wiederum rechtwinklige Geraden. Einem Quadrate des einen Feldes, d. h. einem Parallelogramme, bei dem die einen Gegenseiten zu den andern und auch die Diagonalen zueinander rechtwinklig sind, entspricht ein ebenso beschaffenes Parallelogramm, also ein Quadrat; daher sind entsprechende Teildreiecke dieser Quadrate ähnlich; wir haben Ähnlichkeit.

Oder, einem Kreise K des einen Feldes, als einem Kegelschnitte, zu welchem die absolute Involution desselben als Involution konjugierter Punkte gehört und der daher durch ihre Doppelpunkte geht, entspricht ein ebenso zur andern absoluten Involution und ihren Doppelpunkten sich verhaltender Kegelschnitt im andern Felde, mithin ein Kreis K'. Seien ABC und $A'B'C'$ ihnen eingeschriebene entsprechende Dreiecke, und $M\mathfrak{A}$, $M\mathfrak{B}$, $M\mathfrak{C}$ zu BC, CA, AB parallele Radien von K, so entsprechen ihnen, wegen der Affinität, zu $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ parallele Radien $M'\mathfrak{A}'$, $M'\mathfrak{B}'$, $M'\mathfrak{C}'$. Nun ist, ebenfalls wegen der Affinität, $B'C' : BC = M'\mathfrak{A}' : M\mathfrak{A}, \ldots$; ferner ist ersichtlich:

$$M\mathfrak{A} : M\mathfrak{B} : M\mathfrak{C} = M'\mathfrak{A}' : M'\mathfrak{B}' : M'\mathfrak{C}';$$

daher auch: $BC : CA : AB = B'C' : C'A' : A'B'$; also $\triangle\, ABC \sim A'B'C'$.

Durch zwei Paare entsprechender Punkte A, A'; B, B' ist die Ähnlichkeit zweier Felder festgelegt, aber zweideutig; denn wenn im ersten ein dritter Punkt C gegeben ist, so kann der entsprechende C', der mit $A'B'$ ein dem ABC ähnliches Dreieck bilden soll, in zwei Lagen genommen werden, die symmetrisch zueinander sind in bezug auf $A'B'$ oder von denen jede durch Umklappung der andern um $A'B'$ sich ergibt. Ist dann eine dieser Lagen gewählt, so ist für jeden weitern Punkt D nunmehr der entsprechende D' eindeutig bestimmt; wiederum soll $A'B'D'$ zu ABD ähnlich sein, aber es müssen $A'B'D'$ und $A'B'C'$ gelagert sein wie ABD und ABC, d. h. ebenso in gleichem oder ungleichem Sinne umlaufen sein oder auf derselben oder verschiedenen Seiten von $A'B'$ liegen, wie es bei ABD und ABC der Fall ist.

288 Wenn die Konstante $k = 1$ ist, so sind entsprechende Figuren kongruent, und die Beziehung heißt deshalb Kongruenz[1]); sie wird wohl auch Identität genannt, weil kongruente Felder mit allen ihren entsprechenden Elementen zur Deckung gebracht werden können; aber dieser Name ist doch eben nur dann richtig, wenn diese Deckung erzielt ist.

Man kann in diesem Falle nur ein Paar entsprechender A, A' geben; ist dann B gegeben, so darf B' nur auf einem gewissen Kreise um A' liegen.

Bei kongruenten Feldern tragen jede zwei entsprechenden Geraden gleiche Punktreihen, bei ähnlichen, die nicht kongruent sind, gibt es keine endlichen entsprechenden Geraden mit gleichen Punktreihen.

Aber wir haben oben gesehen, daß die unendlich fernen Punktreihen ähnlicher Felder durchweg mit ihren entsprechenden Punkten zur Deckung gebracht werden können. Dadurch wird die perspektive Lage erreicht. Denn es sind dann entsprechende Geraden parallel und entsprechende Dreieke perspektiv geworden, mit unendlich ferner Perspektivitätsaxe; der weitere Beweis ist wie Nr. 265. Da AB und $A'B'$ parallel und ungleich sind, so ist das Perspektivitätszentrum endlich. Bei kongruenten Feldern hingegen ist es, wenn die perspektive Lage ebenfalls durch Vereinigung der entsprechenden unendlich fernen Punkte bewirkt wird, entweder unendlich fern oder kommt in die Mittelebene zwischen den beiden parallelen Ebenen zu liegen.

Bei kongruenten Feldern können aber beliebige zwei entsprechende Geraden mit den entsprechenden Punkten aufeinander gelegt werden; das Perspektivitätszentrum liegt dann auch unendlich fern und zwar in senkrechter Richtung zu der Halbierungsebene derjenigen Flächenwinkel der Ebenen, welche von entsprechenden Halbebenen eingeschlossen werden.

Umgekehrt ist unmittelbar ersichtlich, daß zwei Felder in parallelen Ebenen, die in perspektiver Lage sich befinden, ähnlich sind und kongruent werden, wenn das Zentrum die genannten Lagen hat, und daß zwei beliebig gelegene Felder kongruent sind, wenn das Zentrum unendlich fern liegt in senkrechter Richtung zu einer der beiden Halbierungsebenen der Flächenwinkel.

Endlich, wenn die unendlich fernen Punktreihen affiner Felder gleich sind, d. h. mit ihren entsprechenden Punkten zur Deckung gebracht werden können, so werden entsprechende Geraden

---

1) Bei Möbius Gleichheit und Ähnlichkeit: Barycentrischer Calcul, § 139.

durch diese Deckung parallel; also müssen die Felder ähnlich sein. Folglich können nicht ähnliche affine Felder nur durch Aufeinanderlegen endlicher gleicher entsprechender Punktreihen in perspektive Lage gebracht werden, und sind solche nicht vorhanden (Nr. 284), so ist perspektive Lage nicht möglich.

Man kann sie dann durch zwei perspektive Lagen verbinden, indem man das eine Feld Σ aus einem endlichen Zentrum auf eine nicht parallele Ebene Σ'' projiziert, wodurch allgemeine Kollineation zunächst zwischen Σ und Σ'' und infolgedessen auch zwischen Σ'' und Σ' entsteht, und dann Σ' und Σ'' in perspektive Lage bringt.

§ 43. Ebene Kollineation.

Eben wollen wir eine Kollineation oder Korrelation von Feldern nennen, wenn sie in der nämlichen Ebene sich befinden. Da stoßen wir bei der Kollineation auf die Frage nach sich selbst entsprechenden Elementen, bei der Korrelation auf die nach inzidenten entsprechenden Elementen, bei beiden auf die Frage nach doppelt, in beiderlei Sinne oder involutorisch sich entsprechenden Elementen und ob es ganz involutorische Verwandtschaften gibt. 289

Wenden wir uns zu der Kollineation. Wir bemerken zuerst, daß jede Gerade $a \equiv b'$ der Ebene zwei entsprechende Geraden a', b hat, und es liegen daher auf ihr zwei entsprechende Punkte ab, $a'b'$; und nur ein Paar. Zwei Paare würde sie zu einer sich selbst entsprechenden Gerade machen. Ebenso hat jeder Punkt $A \equiv B'$ zwei entsprechende Punkte A', B, und es gehen durch ihn zwei entsprechende Geraden AB, $A'B'$.

Ist U ein sich selbst entsprechender Punkt oder Koinzidenzpunkt, so gehen von den beiden projektiven Büscheln um zwei entsprechende Punkte zwei homologe Strahlen durch ihn; also liegt er auf dem durch dieselben erzeugten Kegelschnitt, und ebenso auf jedem der ∞^2 in dieser Weise entstehenden Kegelschnitte. Zwei derselben, etwa von A, A'; B, B' herrührend, haben ersichtlich den Punkt $(AB, A'B')$ gemeinsam, also noch drei weitere; nach jedem von ihnen gehen zwei entsprechende Strahlen a, a' von A, A' und zwei von ihnen verschiedene b, b' von B, B'; also ist er sowohl ab, als $a'b'$, daher ein sich selbst entsprechender Punkt.

Zwei kollineare Felder derselben Ebene haben im allgemeinen drei Koinzidenzpunkte U, V, W[1]). Durch sie gehen alle durch entsprechende Büschel erzeugten Kegelschnitte.

1) Gefunden von Chasles, Aperçu historique, 1. Aufl. (S. 834 der 2. Aufl.)

Ebenso haben sie, wie der duale Beweis lehrt, drei Koinzidenzgeraden u, v, w, welche von allen durch entsprechende Punktreihen erzeugten Kegelschnitten berührt werden.

Aber ersichtlich sind diese Geraden die Verbindungslinien jener Punkte, und ihr Dreieck (oder Dreiseit) bezeichnen wir als das Koinzidenzdreieck (oft auch Hauptdreieck genannt) der ebenen Kollineation.

Weil der Punkt (AB, $A'B'$) immer reell ist, so haben wir zwei allgemeine Fälle: das ganze Dreieck ist reell, oder nur eine Ecke U und die Gegenseite u. Die andern Ecken V, W sind dann durch die Involution konjugierter Punkte auf u repräsentiert, welche den beiden Kegelschnitten (und allen ∞^2) gemeinsam ist, und w, v durch die zu ihr perspektive um U.

Die beiden Kegelschnitte können zerfallen in Geradenpaare und diese eine Gerade gemeinsam haben; dann ergeben sich unendlich viele in gerader Linie liegende Koinzidenzpunkte. Wir kommen auf diesen speziellen Fall (Homologie) zurück.

Man kann zwei kollineare Felder immer so aufeinander legen, daß sie drei reelle Koinzidenzpunkte erhalten; man braucht nur die Endpunkte zweier entsprechender gleicher Strecken irgend welcher entsprechender Punktreihen zur Deckung zu bringen. Die beiden so erhaltenen Koinzidenzpunkte seien U, V, der dritte W ist dann von selber reell; er ergibt sich als Durchschnitt der Perspektivitätsaxen der perspektiven Büschel A, A'; B, B', wenn diese Punkte auf die sich selbst entsprechende Gerade $w = UV$ gelegt werden. Es seien nun G und G' die Scheitel zweier gleicher und gleichlaufender entsprechender Büschel der beiden vereinigten Felder — wenn solche vorhanden sind —, so ist ihr Erzeugnis ein durch U, V, W gehender Kreis; G' ist sein vierter Schnitt mit dem ebenfalls durch U, V, W gehenden ihm im zweiten Felde entsprechenden Kegelschnitte, wenn der Kreis zum ersten Felde gerechnet wird, und G der vierte Schnitt mit dem analogen andern Kegelschnitte. Da durch U, V, W nur ein Kreis geht (ev. Nr. 116), so sind diese beiden Punkte eindeutig und reell bestimmt. Das Erzeugnis der entsprechenden Büschel um G und G' geht durch diese Punkte und durch U, V, W, ist also mit dem Kreis identisch; daher sind die Büschel gleich und gleichlaufend. Es gibt also ein und nur ein Paar entsprechender gleicher und gleichlaufender Büschel. Entsprechend sind nämlich G und G' als vierte Schnitte zweier Kegelschnitte und ihrer entsprechenden, neben den Koinzidenzpunkten.

Klappt man die eine Ebene um und zwar um UV, damit die Realität der Koinzidenzpunkte bestehen bleibt, so erhält man das zweite Paar entsprechender gleicher Strahlenbüschel, die jetzt gleichlaufend sind, also vorhin ungleichlaufend waren. Von den beiden

Paaren gleicher entsprechender Strahlenbüschel zweier kollinearer Felder werden, wenn diese ineinander gelegt werden, die des einen gleich-, die des andern ungleichlaufend. Eine etwaige Verschiebung der Felder ineinander, aus der Lage, wo die drei Koinzidenzpunkte reell sind, in eine solche, wo nur einer es ist (oder umgekehrt), ändert daran nichts.

In Nr. 166 erzeugten wir eine Kurve 4. Ordnung durch zwei projektive Kegelschnitte derselben Ebene, indem die entsprechenden Tangenten geschnitten wurden. Durch diese Projektivität entstehen (Nr. 268) in der Ebene kollineare Felder, in denen homologe Punkte und Tangenten der beiden Kegelschnitte ebenfalls homolog sind. Die drei Koinzidenzpunkte, von denen jeder zwei Tangenten an beide Kurven sendet, von welchen die einen den andern entsprechen, sind die drei Doppelpunkte der erzeugten Kurve, auf die a. a. O. aus dem Geschlechte 0 derselben geschlossen wurde.

Wir verwerten die Sätze über das Fünfeck (Nr. 270) für die 290
ebene Kollineation und das Fünfeck aus den drei Koinzidenzpunkten und zwei entsprechenden Punkten.

Die Fünfecke, für alle Paare entsprechender Punkte konstruiert, haben projektive Würfe, und man kann daher vom Wurf der Kollineation sprechen[1]).

Es seien X, X'; Y, Y' zwei Paare entsprechender Punkte. Die beiden projektiven Strahlenbüschel um X und X' erzeugen einen durch U, V, W gehenden Kegelschnitt, und ebenso die um Y, Y'; der vierte Schnittpunkt Z derselben ist der Schnittpunkt entsprechender Strahlen XY, $X'Y'$. Wenn $\mathfrak{X}$ irgend ein Punkt des ersten Kegelschnitts und $\mathfrak{Y}$ irgend einer des zweiten ist, so ist:

$$\mathfrak{X}(U, V, W, X', X) \barwedge Z(U, V, W, X'Y', XY),$$
$$\mathfrak{Y}(U, V, W, Y', Y) \barwedge Z(U, V, W, Y'X', YX);$$

daher:

$$\mathfrak{X}(U, V, W, X', X) \barwedge \mathfrak{Y}(U, V, W, Y', Y);$$

also sind die beiden krummen Punktreihen $UVWX'X$ und $UVWY'Y$ projektiv.

Die beiden Tangenten in X und Y sind die Strahlen x, y, welche den Strahlen $X'X$, $Y'Y$ als Strahlen des zweiten Feldes korrespondieren; projizieren wir also die projektiven krummen Punktreihen aus X und Y, so ergibt sich:

$$X(U, V, W, X', x) \barwedge Y(U, V, W, Y', y)$$ [2]);

---

1) Kohn, a. in Nr. 270 a. O.

2) Zu der Form:

$$X(U, V, W, X') \barwedge Y(U, V, W, Y')$$

vgl. Liniengeometrie I, Nr. 258.

und ebenso:

$$X'(U, V, W, X, x_1') \;\overline{\wedge}\; Y'(U, V, W, Y, y_1'),$$

wo x_1', y_1' den XX', YY' als Strahlen des ersten Feldes korrespondieren.

Aus der Projektivität der Würfe $UVWX'X$ und $UVWY'Y$ folgt, daß in einer zweiten Kollineation, welche ebenfalls U, V, W zu Koinzidenzpunkten hat, den X, X' die Y, Y' korrespondieren, während in der gegebenen den X, Y die X', Y' entsprechen[1]).

Schneiden wir $X'X$ mit den Koinzidenzgeraden VW, WU, UV oder u, v, w in $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, so haben wir in

$$\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}XX'$$

den Wurf in anderer Form; also sind auf allen ∞^2 Verbindungslinien entsprechender Punkte diese fünfpunktigen Reihen projektiv. Man kann es auch erkennen mit Hilfe des Kegelschnitts, der durch die projektiven Punktreihen auf XY, $X'Y'$ erzeugt wird; er berührt diese Geraden, aber auch XX', YY' und u, v, w; folglich entstehen auf XX', YY' durch $u, v, w, XY, X'Y'$ projektive Punktreihen; das sind die beiden, um die es sich handelt.

Wir kommen so zu verschiedenen Invarianten:

$$\lambda_{vw} = (\mathfrak{V}\mathfrak{W}XX'),\ \lambda_{wu} = (\mathfrak{W}\mathfrak{U}XX'),\ \lambda_{uv} = (\mathfrak{U}\mathfrak{V}XX'),$$

ferner auch:

$$(\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}X),\ (\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}X')^{2)}.$$

Für jene drei, die wir bevorzugen werden, gilt ersichtlich:

$$\lambda_{vw} \cdot \lambda_{wu} \cdot \lambda_{uv} = 1,$$

so daß sie mit zweien äquivalent sind.

Zwei von ihnen sind also echt, die dritte unecht, oder umgekehrt. Sie sind alle drei imaginär, wenn nur ein Koinzidenzpunkt U und die gegenüberliegende Gerade u reell sind, und dann von der Gestalt:

$$\lambda_{uv} = \alpha + \beta i,\ \lambda_{wu} = \frac{1}{\alpha - \beta i},\ \lambda_{vw} = \frac{\alpha - \beta i}{\alpha + \beta i}.$$

Wenn X, X' auf eine Koinzidenzgerade w fallen, so ist

$$\lambda_{uv} = (VUXX')$$

die Invariante der konjektiven Punktreihen auf derselben; der den vollen fünfelementigen Wurf auf dieser XX' ergänzende Punkt ist das Zentrum der Perspektivität für die beiden Punktreihen WX, WX'.

---

1) Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, Nr. 515.

2) Nennen wir diese Invarianten ξ und ξ', so ist:

$$\lambda_{vw} = \frac{\xi' - 1}{\xi - 1} \cdot \frac{\xi}{\xi'},\ \lambda_{wu} = \frac{\xi - 1}{\xi' - 1},\ \lambda_{uv} = \frac{\xi'}{\xi}.$$

Auch hieraus folgt, daß die drei λ mit zwei Invarianten äquivalent sind.

Ebenso ist, wenn $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die Strahlen aus dem Schnittpunkt xx' entsprechender Geraden nach U, V, W sind, der Wurf $\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}x'x$ projektiv.

Ist y, y' ein zweites Paar entsprechender Geraden, so können wir diese Projektivität vermittelst des durch die beiden Büschel um die entsprechenden Punkte $X = xy$, $X' = x'y'$ erzeugten Kegelschnitts erkennen, der durch U, V, W geht, so wie durch xx', yy'. Projizieren wir aus diesen letzten Punkten die fünf andern, so ergibt sich:

$$xx'(U, V, W, X', X) \barwedge yy'(U, V, W, X', X)$$

oder:

$$\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}x'x \barwedge \mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_1\mathfrak{w}_1y'y;$$

damit ist die Behauptung bewiesen. Der zugehörige krumme Wurf (im Tangentenbüschel eines Kegelschnitts) ist $uvwxx'$. Also ist:

$$uvwxx' \barwedge \mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}x'x.$$

Dieser Strahlenwurf $\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}x'x$ steht, weil X und X' auf x und x' liegen, über dem krummen Punktwurfe $UVWX'X$ und kommt aus einem Punkte des tragenden Kegelschnitts; denn x und x' sind entsprechend in den projektiven Büscheln X und X', folglich liegt xx' auf dem durch sie erzeugten Kegelschnitte, der durch X, X', U, V, W geht und daher der den krummen Punktwurf $UVWX'X$ tragende Kegelschnitt ist. So zeigt sich, daß zwischen den beiden dualen Würfen die Beziehung besteht:

$$UVWX'X \barwedge uvwxx',$$

oder, wenn sie in der andern Form geschrieben werden:

$$\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}XX' \barwedge \mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{w}x'x\text{[1]}.$$

Also sind die drei Invarianten:

$$(\mathfrak{v}\mathfrak{w}xx'),\ (\mathfrak{w}\mathfrak{u}xx'),\ (\mathfrak{u}\mathfrak{v}xx')$$

zu den dualen Invarianten:

$$(\mathfrak{V}\mathfrak{W}XX'),\ (\mathfrak{W}\mathfrak{U}XX'),\ (\mathfrak{U}\mathfrak{V}XX')$$

reziprok. Ferner ist:

$$X(U, V, W, X') \barwedge x'(u, v, w, x),\ \ X'(U, V, W, X) \barwedge x(u, v, w, x').$$

Wir wollen nun voraussetzen, daß U, V, W reell sind und die 291
zu Nr. 147 analoge Konvergenzbetrachtung vornehmen. In der Reihe der Punkte

$$X, X_1, \ldots X_i \ldots$$

entspreche jedem Punkte, zum ersten Felde gehörig, der folgende im zweiten. Wir projizieren, indem wir annehmen, daß

---

1) Vgl. Kohn a. a. O.

λ_{wu} und λ_{uv} die beiden gleichartigen Invarianten seien, welche a) beide echt oder b) beide unecht sind, aus V auf v in die Reihe $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ und aus W auf w in die Reihe $Z, Z_1, Z_2, \ldots$, so daß $X_i = (VY_i, WZ_i)$.

$\lambda_{wu} = (UWYY')$ ist die Invariante der beiden konjektiven Punktreihen auf v; daher ist der Konvergenzpunkt der Reihe der Y der Punkt W im Falle a), der Punkt V im Falle b) (Nr. 147). Ebenso ergibt sich, weil $\lambda_{uv} = (VUZZ')$, als Konvergenzpunkt der Reihe der Z in jenem Falle U, in diesem V. Nun ist $(VW, WU) = W$, $(VU, WV) = V$. Daher ist Konvergenzpunkt der Reihe X im Falle a) der Punkt W, im Falle b) der Punkt V.

Wird aber mit einem Punkte des zweiten Feldes angefangen, so vertauschen sich auf v und w die Konvergenzpunkte und daher auch die der Reihe der X; es ergibt sich im ersten Falle V, im zweiten W. Diese Konvergenzpunkte entsprechen also den Zeigern der dritten ungleichartigen Invariante λ_{vw}; und für den Übergang vom ersten zum zweiten Felde, für den die Bezeichnung der Invarianten eingerichtet ist und die wir vorzugsweise ins Auge fassen, entspricht der Konvergenzpunkt dem hintern, bzw. vordern Zeiger, je nachdem diese dritte Invariante unecht oder echt ist. Macht man denselben Prozeß mit den Geraden, deren Invarianten ja die reziproken Werte haben, so ergibt sich für den Übergang vom ersten ins zweite Feld, Konvergenz nach w, wenn $\frac{1}{\lambda_{vw}}$ unecht, folglich λ_{vw} echt ist, und Konvergenz nach v, wenn λ_{vw} unecht ist.

Wenn also z. B. λ_{vw} unecht ist und die beiden andern echt sind, so konvergiert die Reihe der Punkte nach W, die der Geraden nach v, die mit W inzident ist. Das ist notwendig; denn wir können ja von zwei inzidenten Elementen X und x ausgehen; es besteht die Inzidenz durchweg und daher auch für die Konvergenzelemente.

Die Konvergenzelemente für die Punkte in dem einen, für die Geraden in dem andern Sinne liegen im Koinzidenzdreiecke einander gegenüber.

Bleiben wir bei der Voraussetzung: λ_{vw} unecht, λ_{wu}, λ_{uv} echt und beim Übergang aus dem ersten ins zweite Feld. Die Fluchtgerade r des ersten Feldes treffe u, v, w in R_u, R_v, R_w; dann ist, wenn wir die Invarianten bzw. auf u, v, w vermittelst dieser Fluchtpunkte herstellen:

$$\lambda_{vw} = (WVR_uR'_{u,\infty}) = \frac{WR_u}{VR_u}, \quad \lambda_{wu} = \frac{UR_v}{WR_v}, \quad \lambda_{uv} = \frac{VR_w}{UR_w}.$$

Folglich ist W weiter von R_u und von r entfernt als V, W weiter als U, U weiter als V; der Konvergenzpunkt W ist am weitesten von r entfernt.

Der Konvergenzpunkt ist derjenige Eckpunkt des Koinzidenzdreiecks, der von der Fluchtgerade des Feldes, von dem ausgegangen wird, am weitesten entfernt ist, und an der Fluchtgerade q' des andern Feldes ist er der nächste[1]).

Denn

$$\lambda_{vw} = (WVQ_{u,\infty}\, Q'_u) = \frac{VQ'_u}{WQ'_u}, \quad \lambda_{wu} = \frac{WQ'_v}{UQ'_v}, \quad \lambda_{uv} = \frac{UQ'_w}{VQ'_w}.$$

Der dritte Koinzidenzpunkt U ist Konvergenzpunkt des Schnittpunktes der beiden Geraden x_i^+, x_i^-, welche aus x in dem einen und in dem andern Sinne sich ergeben; denn x_i^+ konvergiert nach v, x_i^- nach w, der Schnitt also nach U. Ja, man braucht nicht einmal von derselben Gerade auszugehen: U ist Konvergenzpunkt von x_i^+, y_i^-.

Bei zwei affinen Feldern der nämlichen Ebene ist die unendlich ferne Gerade eine Koinzidenzgerade u, so daß U der (reelle) endliche Koinzidenzpunkt ist. Das eben besprochene auf die Fluchtgeraden bezügliche Kennzeichen versagt; wir gehen auf die λ zurück und bilden $\lambda_{wu} = \frac{YU}{Y'U}$ auf v, $\lambda_{uv} = \frac{Z'U}{ZU}$ auf w. Sind beide gleicher Art, so sind beide Konvergenzpunkte unendlich fern; sind sie ungleicher Art, so ist der eine endlich, der andere unendlich fern.

§ 44. Ebene Ähnlichkeit und Kongruenz.

Die unendlich ferne Gerade ist bei der ebenen Ähnlichkeit eine Seite des Koinzidenzdreiecks; es bleibt also nur ein endlicher Koinzidenzpunkt U, der (seit Euler, 1777) Ähnlichkeitspunkt genannt wird. Mit je zwei entsprechenden Strecken bildet er ähnliche Dreiecke, sie werden aus ihm unter gleichem Winkel gesehen. 292

Zwei entsprechende Strecken AB, $A'B'$ bestimmen zwei Ähnlichkeiten, bei der einen sind entsprechende Figuren durchweg in demselben Sinne, bei der andern durchweg in entgegengesetztem Sinne umlaufen, bei jener sind entsprechende Strahlenbüschel gleich und gleichlaufend, bei dieser gleich und ungleichlaufend (Nr. 287); daher unterscheiden wir gleichsinnige und ungleichsinnige Ähnlichkeit und die Ähnlichkeitspunkte als U_1, U_2.

Hinsichtlich der unendlich fernen Koinzidenzpunkte V, W gilt folgendes: Im Falle der Gleichsinnigkeit erzeugen zwei entsprechende Strahlenbüschel, weil gleich und gleichlaufend, einen Kreis;

---

1) Dies Kennzeichen wurde mir von London mitgeteilt; vgl. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Jahrg. 11, S. 274; dort wird Amodeo, Giornale di Matematiche, Bd. 27, S. 40 zitiert.

ist der Kreis $K_{\mathfrak{M}}$ über $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1$ als Durchmesser der Kreis, auf dem sich immer U_1 und U_2 befinden müssen; er heißt daher der Ähnlichkeitskreis der beiden Kreise. Er geht durch die gemeinsamen Punkte von (M) und (M'), denn für jeden derselben gibt es zwei Ähnlichkeiten, in denen er sich selbst entspricht, also U_1, bzw. U_2 ist.

293 Wir wenden uns zur Kongruenz, wo $AB = A'B'$ ist. Die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sind unendlich fern geworden, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ die Mitten von AA', BB', also ist U_2 der unendlich ferne Punkt von $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$. Die Kreise $K_{\mathfrak{A}}$ und $K_{\mathfrak{B}}$ sind in die Mittelsenkrechten in $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ auf AA', BB' übergegangen; U_1 ist der Schnitt dieser Geraden, und immer noch der zweite Schnitt der Kreise $AA'S$, $BB'S$, welche nicht ausgeartet sind.

Bei der direkten ähnlichen Lage decken sich die beiden Felder, während sie bei der inversen symmetrisch in bezug auf U_1 geworden sind.

Kongruente ungleichsinnige Felder haben keinen endlichen Koinzidenzpunkt mehr. Von den beiden endlichen Koinzidenzgeraden hat sich $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = v$ mit der schon im Unendlichen gelegenen u vereinigt, während $w = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ endlich geblieben ist. Der bisher endliche Koinzidenzpunkt $U_2 = wv$ liegt unendlich fern so neben dem einen schon im allgemeinen Falle unendlich fernen V, daß die bestimmte Verbindungslinie U_2V die endliche Gerade w ist.

Wir verlegen $A'B'$ parallel nach AB_1; C und C' seien die Mitten von BB_1 und $B'B_1$. In den Dreiecken $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1C'$ und ACB_1 sind $\mathfrak{A}_1C'$ und $\mathfrak{B}_1C'$ gleich, parallel und von gleichem Sinne mit AB_1 und CB_1, also gilt dies auch für $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ und AC. Diese AC ist Höhe im gleichschenkligen Dreiecke ABB_1, also gemeinsame (Orthogonal-) Projektion von AB und AB_1: folglich haben auch AB und $A'B'$ gleiche und gleichsinnige Projektionen auf $w = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$.

Wir können also das eine Feld so längs w verschieben, daß diese Projektionen sich decken. Da nun die Lote aus A und A' auf w gleich sind und auf verschiedenen Seiten von w liegen und ebenso die aus B und B', so kommen durch diese Verschiebung AB und $A'B'$ in symmetrische Lage in bezug auf w. In dieser Lage ist klar, daß w sich selbst entspricht, ferner tun es alle zu ihr senkrechten Geraden. Durch die Verschiebung wird w nur in sich bewegt und diese Geraden behalten ihre Richtung; daraus folgt, daß auch in der früheren Lage w und der unendlich ferne Punkt der Senkrechten zu ihr sich selbst entsprechen; dieser ist der w gegenüberliegende Koinzidenzpunkt W, der andere V auf der unendlich fernen Gerade gehört zu der dazu senkrechten Richtung, liegt also auf w[1]).

---

1) Vgl. Baltzer, Elemente der Mathematik, Bd. II, § 7, 2—4, § 12, 4—6.

§ 45. Ebene Homologie.

Wir haben im vorangehenden einige ebene Kollineationen kennen 294
gelernt, welche mehr Koinzidenzelemente besitzen, als die Ecken und Seiten eines Dreiecks, nämlich zwei ähnliche Felder in ähnlicher Lage und zwei Felder, die in bezug auf eine Axe symmetrisch sind. Bei jenen sind sich selbst entsprechend der Ähnlichkeitspunkt und alle Strahlen durch ihn, die unendlich ferne Gerade und alle Punkte auf ihr; bei diesen die Symmetrieaxe und alle Punkte auf ihr, und der unendlich ferne Punkt in senkrechter Richtung zu ihr und alle Strahlen durch ihn; also beidemal ist eine Punktreihe mit lauter sich selbst entsprechenden Punkten und ein Strahlenbüschel mit lauter sich selbst entsprechenden Strahlen vorhanden. Wie eine solche Punktreihe möglich ist, haben wir schon in Nr. 289 erkannt.

Da gilt nun der Satz:

Wenn zwei kollineare Felder derselben Ebene eine Punktreihe s von lauter sich selbst entsprechenden Punkten besitzen, so besitzen sie auch einen Strahlenbüschel S mit lauter sich selbst entsprechenden Strahlen; und umgekehrt.

Wir haben bewiesen (Nr. 265), daß zwei kollineare Felder in verschiedenen Ebenen, bei denen alle Punkte der Schnittlinie sich selbst entsprechen, in perspektiver Lage sind. Wir können genau den dortigen Beweis wiederholen, nur, daß wir, statt mit perspektiven Dreiecken im Raume, mit solchen in der Ebene arbeiten, und erhalten, daß alle Verbindungslinien entsprechender Punkte in einen Punkt S zusammenlaufen, der hier natürlich in die gemeinsame Ebene der beiden Felder zu liegen kommt; und infolge dessen ergibt sich nicht ein Bündel von solchen Verbindungsstrahlen, von denen jeder nur ein Paar entsprechender Punkte verbindet, sondern nur ein Büschel von Strahlen, von denen jeder ∞^1 Paar entsprechender Punkte verbindet; denn ist $AA'S$ ein solcher Verbindungsstrahl und B auf ihm gelegen, so liegt, da BB' auch durch S geht, B' ebenfalls auf ihm. Daraus folgt, daß dieser Strahl, weil er zugleich AB und $A'B'$ ist, sich selbst entspricht und so jeder Strahl durch S in der Ebene.

Der Umkehrungssatz ist dual.

Auf jedem Strahle durch S erhalten wir also zwei konjektive Punktreihen, deren Koinzidenzpunkte S und der Schnitt $\mathfrak{S}$ mit s sind, und ebenso um jeden der sich selbst entsprechenden Punkte von s zwei konjektive Strahlenbüschel, deren Koinzidenzstrahlen s und der Strahl $\mathfrak{s}$ nach S sind. Zwei entsprechende Punkte liegen in gerader Linie mit S, zwei entsprechende Geraden schneiden sich auf s.

Die Figur ist in sich dual und kann durch Projektion in den Bündel übertragen werden.

Man hat diesen Spezialfall auch perspektive ebene Kollineation genannt; aber es ist besser, das prägnante Wort Poncelet's (ebene) Homologie[1]) zu gebrauchen; s heißt dann die Axe und S Zentrum der Homologie. Man verfährt undual, die Punktverwandtschaft bevorzugend, wenn man die Strahlen durch S Homologiestrahlen nennt und nicht auch den Punkten auf s einen entsprechenden Namen gibt; nennen wir jene Strahlen Zentrumsstrahlen, diese Punkte Axenpunkte.

Wenn für eine ebene Kollineation vier sich selbst entsprechende Punkte gegeben werden, von denen keine drei in gerader Linie liegen, so ist sie eindeutig bestimmt; die Konstruktion von Nr. 264 zeigt dann, daß jeder Punkt sich selbst entspricht und es sich um Identität handelt.

Liegen aber drei in gerader Linie, so wird diese eine Koinzidenzgerade mit lauter sich selbst entsprechenden Punkten, und außerhalb ist noch der vierte Koinzidenzpunkt, dessen sämtliche Strahlen dann auch sich selbst entsprechen. Wir haben eine Homologie, aber nur Axe und Zentrum, wodurch sie noch nicht bestimmt ist, wir wissen, daß A, B, C, D und A', B', C', D', von denen sowohl B, C, D, als B', C', D' in gerader Linie liegen, eine Kollineation noch nicht bestimmen (Nr. 264).

295 Die Homologie besitzt ∞^2 Koinzidenzdreiecke mit fester Ecke S und fester Gegenseite s, auf der die andern Ecken beliebig gewählt werden können.

Werden entsprechende Punkte X, X' auf einem Zentrumsstrahle bewegt, so bleibt $(S\mathfrak{S}XX')$ konstant (Nr. 71) wegen der Eigenschaft konjektiver Punktreihen; liegen X, X' und Y, Y' auf verschiedenen Zentrumsstrahlen, so schneiden sich XY und $X'Y'$, als entsprechende Geraden, auf s; die beiden Punktwürfe $S\mathfrak{S}XX'$ und $S\mathfrak{S}_1YY'$ sind perspektiv. So stellt sich $(S\mathfrak{S}XX')$ als Invariante heraus. Sie steht aber in Zusammenhang mit den in Nr. 290 besprochenen Invarianten; in der Tat, nimmt man irgendeins der Koinzidenzdreiecke, von dem U in S, V, W auf s liegen, so ist $\lambda_{vw} = 1$ und verliert dadurch an Wert; unsere Invariante ist sowohl $\lambda_{vu} = \frac{1}{\lambda_{uv}}$, als λ_{wu}; so daß wir auf eine Invariante (oder zwei reziproke) reduziert sind.

Man hat $(S\mathfrak{S}XX')$ auch Charakteristik und Modulus genannt. Umgekehrt, nehmen wir an, eine der Invarianten, etwa λ_{vw} sei $= 1$, wodurch $\lambda_{uv} = \lambda_{uw}$ wird, so folgt daraus, daß alle Verbindungslinien XX' die v und w in demselben Punkte, also in U treffen; es liegt Homologie vor.

1) Traité des propriétés projectives 1822 (Zweite Ausgabe 1865, Bd. I.) Nr. 297.

Die Strahlen führen auch zu einer Invariante $(s\mathfrak{s}xx')$, wo $\mathfrak{s}$ der Strahl aus dem Punkte xx' auf s nach S ist; schneiden wir aber x und x' mit einem Zentrumsstrahle in X, X', so ergibt sich, wegen perspektiver Lage, $(s\mathfrak{s}xx') = (\mathfrak{S}SXX') = 1 : (S\mathfrak{S}XX')$; so daß die „Strahleninvariante" zur „Punktinvariante" reziprok ist, wie das wegen Nr. 290 auch notwendig ist. Wir können uns mit $(S\mathfrak{S}XX')$ begnügen.

Auch q^∞ und q', r und r'^∞ schneiden sich auf s.

Die Fluchtgeraden r, q' homologischer Felder sind zur Axe parallel.

Sind auf einem Zentrumsstrahle noch R, Q' die Schnitte mit r, q', die Fluchtpunkte der konjektiven Punktreihen, so bekommt die Invariante die Form $(S\mathfrak{S}RR'^\infty) = \frac{SR}{\mathfrak{S}R}$ und $(S\mathfrak{S}Q^\infty Q') = \frac{\mathfrak{S}Q'}{SQ'}$, es ist ja $RS \cdot Q'S = R\mathfrak{S} \cdot Q'\mathfrak{S}$ die Potenz der konjektiven Punktreihen. Man hat auch:

$$\frac{(Sr)}{(sr)} = \frac{(sq')}{(Sq')},$$

wenn die Klammern wiederum Entfernungen bedeuten. Daraus folgt:

$$(sr) = (q'S),\ (sq') = (rS).$$

Also stimmt die Entfernung vom Zentrum nach der einen Fluchtgerade in Größe und Sinn überein mit der von der andern nach der Axe. Zentrum und Axe schließen beide Fluchtgeraden aus oder ein, je nachdem die Invariante positiv oder negativ ist.

Wenn x, x' entsprechende Geraden sind, so sind $x'q^\infty$ und $x'q'$, xr und $x'r'^\infty$ entsprechende Punkte, je in gerader Linie mit S, d. h. der Strahl aus S nach $x'q'$ ist zu x und der nach xr zu x' parallel.

Ist die Invariante 1, so besteht entweder Identität oder S und s sind inzident. Deckt sich in einer Homologie ein von S verschiedener und nicht auf s gelegener Punkt mit seinem entsprechenden, so tun es alle.

Hat die Invariante $(S\mathfrak{S}XX')$ den Wert -1, der dann auch $(s\mathfrak{s}xx')$ zukommt, so vereinigen sich die Fluchtgeraden r, q' in die Mittelparallele zwischen S und s. Diese Gerade und die unendlich ferne entsprechen sich involutorisch. Aber die ganze Beziehung ist involutorisch; denn auf jedem Strahle durch S und um jeden Punkt von s haben wir (hyperbolisch-) involutorische Punktreihen, bzw. Strahlenbüschel; auf dem Parallelstrahle durch S zu s wird der eine Doppelpunkt unendlich fern, die Involution also gleichseitig-hyperbolisch. Diese Homologie wird daher die involutorische oder harmonische genannt.

Hat eine Homologie ein Paar sich involutorisch entsprechender Elemente, so ist sie ganz involutorisch; denn die Invariante ist -1.

Eine Homologie ist vollständig bestimmt, wenn das Zentrum, die Axe und die Invariante gegeben sind oder, statt letzterer, zwei Punkte auf einem Zentrumsstrahle oder zwei Geraden durch einen Axenpunkt, die sich entsprechen sollen.

Von letzterem ist Spezialfall, daß eine Fluchtgerade (parallel zur Axe) gegeben ist.

Sind z. B. S, s, r gegeben, so ergibt sich zu x die entsprechende x' als die Parallele durch sx zu dem Strahle von S nach xr; da q' nach dem obigen Satze leicht konstruiert werden kann, so hat man als Kontrolle, daß der Strahl aus S nach $x'q'$ zu x parallel sein muß. Ist X gegeben, so sei x durch ihn gezogen, x' konstruiert und mit SX in X' geschnitten.

Wenn S, s, X, X' (auf einem Zentrumsstrahle) gegeben sind, so liegt der zu Y gehörige Y' so auf SY, daß XY, $X'Y'$ sich auf s schneiden; fällt also X' mit X zusammen, so tun es auch Y und Y'.

Man wende diese Konstruktionen auch auf den Spezialfall an, daß S und s inzidieren.

In einer involutorischen Homologie ist ein Kegelschnitt sich selbst entsprechend, wenn ein Pol und seine Polare Zentrum und Axe sind.

K und K_1 seien zwei Kegelschnitte, unter deren Schnittpunkten sich reelle befinden; S sei einer von ihnen und s beliebig; durch die involutorische Homologie (S, s) gehe K in K' über; die drei weiteren gemeinsamen Punkte von K' und K_1 beweisen, daß es drei Geraden durch S gibt, welche s in einem Punkte treffen, der dem S harmonisch zugeordnet ist in bezug auf die beiden zweiten Schnitte mit K und K_1.

296 Wenn die unendlich ferne Gerade sich selbst entspricht (und daher keine Fluchtgeraden vorhanden sind), so muß sie entweder Zentrumsstrahl oder die Axe sein. Im ersteren Fall ist das Zentrum S unendlich fern, und wir haben homologische Affinität; die Invariante $(S\mathfrak{S}XX')$ ist in das einfache Verhältnis $\frac{\mathfrak{S}X'}{\mathfrak{S}X}$ übergegangen. Die parallelen Strecken zwischen entsprechenden Punkten werden in diesem Verhältnisse durch die Affinitätsaxe s geteilt. Je nachdem es positiv oder negativ ist, also entsprechende Punkte auf derselben oder verschiedenen Seiten von s liegen, haben entsprechende Figuren gleichen oder ungleichen Umlaufungssinn.

Ist die Invariante wiederum -1, so heißt die involutorische Beziehung Symmetrie in bezug auf die Axe s und zwar im allgemeinen Falle schräge Symmetrie, im besondern, wo die Strahlen XX' zu s normal sind, normale Symmetrie oder Symmetrie schlechthin. Entsprechende Figuren sind ungleichsinnig.

Auch im allgemeinen Falle der Symmetrie sind entsprechende Figuren flächengleich. Denn bei zwei entsprechenden Dreiecken mit zur Axe parallelen Grundlinien sind diese und die Höhen gleich; und andere Figuren kann man ja in solche Dreiecke zerlegen. In bezug auf jeden Durchmesser ist ein Kegelschnitt in sich symmetrisch, wobei die Verbindungslinien symmetrischer Punkte dem konjugierten Durchmesser parallel sind.

Bei normaler Symmetrie sind entsprechende Strecken und Winkel gleich, entsprechende Figuren kongruent; es liegt ungleichsinnige Kongruenz vor. Ein Kreis geht also in einen Kreis über, und absolute Punkten entsprechen sich involutorisch. Durch Umklappung um die Axe kommen die Felder zur Deckung.

Wird aber die Axe s unendlich fern, so daß alle unendlich fernen Punkte sich selbst entsprechen und entsprechende Geraden parallel sind, so liegt homologische Ähnlichkeit oder Ähnlichkeit verbunden mit ähnlicher Lage (Nr. 292) vor. S ist der Ähnlichkeitspunkt und die Invariante ist $\frac{SX}{SX'}$, das Ähnlichkeits-Verhältnis. Die ähnliche Lage ist direkt oder invers, je nachdem die Invariante > 0 oder < 0 ist. In beiden Fällen sind entsprechende Figuren gleichsinnig.

Ähnliche und ähnlich gelegene Figuren konstruiert man mit Hilfe des Pantographen oder Storchschnabels (Scheiner, 1631). Auf drei Seiten AB, AD, BC eines Parallelogramms, in dessen Ecken sich Scharniere befinden, liegen drei Punkte (Stifte) S, X, X' in gerader Linie. Sie bleiben in gerader Linie und $SX : SX'$ bleibt konstant, wenn das Parallelogramm in den Scharnieren bewegt wird; denn $SX : SX' = SA : SB = AX : BX'$. Wird S festgemacht, so beschreiben X und X' ähnliche Figuren, die in bezug auf S ähnlich liegen.

Der Wert -1 führt zu kongruenten Feldern mit gleichem Umlaufungssinne entsprechender Figuren; man nennt diese Verwandtschaft Symmetrie in bezug auf das Zentrum. Das Wort „symmetrisch" wird oft für zwei solche kongruente Figuren derselben Ebene gebraucht, die durch bloßes Verschieben in der Ebene nicht zur Deckung gebracht werden können. Symmetrisch in diesem Sinne sind entsprechende Figuren bei der (normalen) Symmetrie in bezug auf eine Axe, nicht aber bei dieser Symmetrie in bezug auf ein Zentrum.

Bei dieser gleichsinnigen Symmetrie entspricht jeder der absoluten Punkte sich selbst.

Es können beide ausgezeichneten Elemente S, s unendlich fern sein, wobei sie inzidieren. Entsprechende Figuren sind dann ebenfalls gleichsinnig kongruent.

In den Fällen ohne Fluchtgeraden ergab sich, daß entsprechende Figuren durchweg gleich- oder durchweg ungleichsinnig sind. Im allgemeinen Falle ist beides möglich. Es seien ABC und $A'B'C'$ zwei entsprechende eigentliche Dreiecke, d. h. jenes ganz auf einer Seite von r gelegen, und daher dieses ganz auf einer Seite von q'.

Nehmen wir an, sie haben gleichen Umlaufungssinn, so mögen A, B, A', B' festgehalten werden, während C, auf derselben Seite von AB bleibend, etwa auf seinem Zentrumsstrahle bewegt wird über r weg; C' geht dann durch das Unendliche, und $A'B'C'$ ändert seinen Umlaufungssinn. Freilich entspricht nunmehr dem eigentlichen Dreieck ABC nicht mehr das eigentliche, sondern $A'B' \cdot C'$; aber dies hat keinen bestimmten Umlaufungssinn; vielmehr, wenn es kontinuierlich durchlaufen wird: $\infty A'B' \infty C' \infty$, so hat $\infty A'B' \infty$ den einen Sinn, $\infty C' \infty$ den andern, ebenso wie die beiden Äste einer Hyperbel bei kontinuierlicher Durchlaufung.

297 Die involutorische Homologie ist die einzige ebene Kollineation, welche durchweg involutorisch ist[1]).

Es sei $A \equiv B'$ und $B \equiv A'$ ein involutorisches Paar; dann ist $AB \equiv A'B'$ eine Koinzidenzgerade und trägt, wegen jenes Paares, involutorische konjektive Punktreihen. Es sei weiter $C \equiv D'$, $D \equiv C'$ ein zweites involutorisches Paar, auf einer andern Gerade gelegen, für die dann dasselbe gilt. Es ist $S = (AB, CD)$ mit $S' = (A'B', C'D')$, $T = (AC, BD)$ mit $T' = (B'D', A'C')$, $U = (AD, BC)$ mit $U' = (B'C', A'D')$ identisch; auf der Verbindungslinie $s = TU$ haben wir vier sich selbst entsprechende Punkte: T, U und die Schnitte mit AB, CD, also eine Gerade s mit lauter sich selbst entsprechenden Punkten und daher einen Punkt, nämlich S, mit lauter sich selbst entsprechenden Strahlen, also Homologie, und das vollständige Viereck $ABCD$ lehrt, daß es harmonische Homologie ist.

Wenn in einer ebenen Kollineation zwei gleichartige Paare involutorisch entsprechender Elemente, nicht auf derselben Gerade gelegen oder durch denselben Punkt gehend, vorhanden sind, so ist sie durchweg involutorisch und involutorische Homologie.

Dagegen können wohl die Punktreihen auf einer Koinzidenzgerade, und dann zugleich die Büschel um den gegenüberliegenden Koinzidenzpunkt, involutorisch sein, ohne daß das für die ganze Verwandtschaft gilt.

Zu einer involutorischen Homologie sind wir schon beim Problem der ebenen Projektivität gekommen (Nr. 230).

298 Bei der Homologie fallen die einen entsprechenden gleichen Punktreihen s, s' (Nr. 275) in die sich deckenden

1) Staudt, Geometrie der Lage, Nr. 227.

Punktreihen auf der Axe s; für die andern gleichstreckigen Geraden s_1, s_1' gilt:

$$(sr) = (rs_1),\ (sq') = (q's_1');$$

da aber (Nr. 295):

$$(sr) = (q'S),\ (sq') = (rS),$$

so ist auch:

$$(q'S) = (rs_1),\ (rS) = (q's_1'),$$

also:

$$(q'S) - (q's_1') = (rs_1) - (rS)$$

oder:

$$(s_1'S) = (Ss_1);$$

so daß die beiden parallelen Geraden s_1 und s_1' das Zentrum S in der Mitte zwischen sich haben; woraus folgt, daß die beiden gleichen Punktreihen auf ihnen ungleichen Sinn haben.

Aus $(q'S) = (rs_1)$, $(rS) = (q's_1')$ ergibt sich:

Bei der involutorischen Homologie, bei welcher r und q' sich vereinigt haben, fallen s_1 und s_1' in die Parallele durch S zu s zusammen; auf ihr bilden, wie wir schon bemerkten, die konjektiven Punktreihen eine gleichseitig-hyperbolische Involution, d. h. sie sind gleich.

Bei ihr ist also $(ss_1) = (s's_1')$. Bei beliebigen kollinearen Feldern sind diese Entfernungen zwischen den gleichstreckigen Geraden nicht gleich. Daher können beliebige kollineare Felder im allgemeinen nicht in involutorische Lage gebracht werden.

Haben aber zwei kollineare Felder die Eigenschaft, daß

$$(ss_1) = (s's_1'),$$

und infolgedessen auch $FF_1 = F'F_1'$, so daß F und F_1 auf s und s_1, F' und F_1' auf s' und s_1' fallen (Nr. 277), so lege man sie so aufeinander, daß die gleichen Punktreihen s und s' sich Punkt für Punkt decken und die Geraden s_1 und s_1' aufeinander fallen. Wegen der Punktreihe s mit lauter sich selbst entsprechenden Punkten entsteht Homologie. Die sich selbst entsprechende Gerade $s_1 \equiv s_1'$ muß durch das Zentrum gehen; weil sie der Axe parallel ist, liegen auf ihr zwei gleiche Punktreihen mit einem endlichen Koinzidenzpunkte (S) und einem unendlich fernen (auf s), folglich bilden sie eine gleichseitig-hyperbolische Involution und sind ungleichlaufend. Die Invariante der Homologie ist daher -1. Zwei kollineare Felder mit der obigen speziellen Eigenschaft $(ss_1) = (s's_1')$ und nur solche lassen sich involutorisch machen. Andern muß man erst, etwa durch eine Ähnlichkeitstransformation, gleiche Parameter verschaffen. Zwei perspektiv gelegene Felder z. B., von denen das Perspektivitätszentrum gleiche Entfernung hat, haben gleiche Parameter.

Im Zentrum S jeder Homologie liegen zwei entsprechende Brennpunkte F, F' übereinander, so daß die gleichen Strahlenbüschel sich Strahl für Strahl decken, und umgekehrt, indem man entsprechende gleiche Strahlenbüschel zur Deckung bringt, macht man kollineare Felder homologisch. Die andern Brennpunkte F_1 und F_1' liegen auf dem Lote aus S auf s symmetrisch zu S in bezug auf r, bzw. q', und vereinigen sich im Fußpunkte $\mathfrak{F}_1$ desselben, wenn die Homologie involutorisch ist; die gleichen, diesmal ungleichlaufenden Büschel bilden dann eine gleichseitige hyperbolische Involution.

Die isotropen Strahlen aus dem Zentrum S schneiden in die Fluchtgerade $r \equiv q'$ die den absoluten Punkten entsprechenden Punkte $\mathfrak{J}_+$, $\mathfrak{J}_-$ ein, und die darstellende Involution, durch die rechtwinklige Involution um S eingeschnitten, ist die der absoluten entsprechende. Die Kreise durch diese Punkte, oder mit dieser Involution als der zugehörigen Involution konjugierter Punkte, bilden einen Büschel mit dem Zentrum $S \equiv F$ und jenem Fußpunkte $\mathfrak{F}_1$ als Grenzpunkten. Sie gehen durch die involutorische Homologie in sich selbst über; denn S und s sind für sie Pol und Polare. Von der genannten Involution auf r ist der Fußpunkt O des Lotes aus S auf s und r der Zentralpunkt; daher ist dieses Lot die Zentrale des Kreisbüschels. Wenn P und P_1 in der Involution gepaart sind, so gehen SP, SP_1 nach zwei unendlich fernen Punkten Q, Q_1, welche in bezug auf alle Kreise der Ebene konjugiert sind. P und P_1 sind es für unsere Kreise; also sind, nach dem Satze von Hesse (Nr. 112), auch $S = (PQ, P_1Q_1)$ und (PQ_1, P_1Q) für diese Kreise konjugiert. Der letztere Punkt liegt, als vierte Ecke des Rechtecks PSP_1, auf s; also ist s die Polare von S.

Diese in sich selbst übergehenden Kreise durch $\mathfrak{J}_+$, $\mathfrak{J}_-$ sind die einzigen Kreise, welche wiederum in Kreise übergehen. Folglich gibt es bei der involutorischen Homologie keinen Kreis, der in einen von ihm verschiedenen Kreis transformiert wird.

Es ergibt sich auch:

In die Mittelparallele zwischen Pol und Polare in bezug auf einen Kreis schneidet die rechtwinklige Involution um den Pol die Involution der konjugierten Punkte ein.

299 Man kann fünf gegebene Punkte oder Geraden (von denen keine drei in gerader Linie liegen, bzw. durch denselben Punkt gehen) in Punkte oder Tangenten eines Kreises projizieren oder, was dasselbe ist, eine Homologie herstellen, in der jenen Elementen solche Elemente entsprechen.

Es seien fünf Punkte gegeben: A, B, C, D, E. Wir bilden aus A, B, C, D ein solches einfaches Vierseit, daß die Gegeneckenpaare des zugehörigen vollständigen Vierseits aus E durch eine elliptische

Involution projiziert werden, was nach Nr. 48 immer möglich ist. Es sei $ABCD$ dies Vierseit; sind dann $P = (AB, CD)$, $Q = (BC, AD)$ die Schnittpunkte der Gegenseiten oder die dritten Gegenecken des vollständigen Vierseits, so liegen die Punkte P, Q zu den Schnitten T, U ihrer Verbindungslinie mit $E(A, C)$ elliptisch. Wir machen PQ zur Fluchtlinie r der Homologie, während das Zentrum S in einen der Schnitte der beiden Kreise über PQ und TU als Durchmessern gelegt wird, welche wegen der elliptischen Lage reell sind. Wenn $A', \ldots E'$ den $A, \ldots E$ entsprechen, so sind $A'B'$ und $C'D'$ zu SP, $B'C'$ und $D'A'$ zu SQ parallel und diese zu jenen rechtwinklig; daher ist $A'B'C'D'$ ein Rechteck; da ferner $E'A'$ und $E'C'$ zu ST und SU parallel werden und auch rechtwinklig sind, so fällt E' auf den dem Rechteck $A'B'C'D'$ umgeschriebenen Kreis, von dem $A'C'$ ein Durchmesser ist.

Wenn fünf Geraden a, b, c, d, e gegeben sind, so bilden wir aus den vier Geraden a, b, c, d ein solches einfaches Viereck $ABCD$, daß das zugehörige vollständige Viereck von e in einer elliptischen Involution geschnitten wird. Wiederum seien die Schnittpunkte $P = (AB, CD)$, $Q = (BC, DA)$ der Gegenseiten und der Schnittpunkt $M = (AC, BD)$ der Diagonalen konstruiert; die Schnitte F, G von e mit AB, CD liegen elliptisch zu den Schnitten von e mit den Diagonalen AC, BD, also liegen auch die Schnitte T, U von PQ mit den Diagonalen zu denen V, W mit MF, MG elliptisch. Nimmt man daher auch hier PQ als Fluchtgerade r der Homologie und als Zentrum S einen der reellen Schnitte der beiden Kreise über den Durchmessern TU, VW, so wird $A'B'C'D'$ ein Parallelogramm mit rechtwinkligen Diagonalen, also ein Rhombus; M' ist der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises. Ferner schneidet e' die Gegenseiten $A'B'$ und $C'D'$ so in F', G', daß $\sphericalangle F'M'G'$ ein rechter ist. Daraus folgt, daß e' jenen Kreis berührt, denn wenn H' und I' in bezug auf M' zu F' und G' symmetrisch sind, so ist $F'G'H'I'$ ebenfalls ein Rhombus, mit dem Mittelpunkte M'; seine Gegenseiten $I'F'$, $G'H'$, in den Geraden $A'B'$, $C'D'$ liegend, berühren den Kreis; also tun es auch die beiden andern $F'G'$ und $H'I'$[1]).

Beide Ergebnisse lehren von neuem (Nr. 268), daß jeder Kegelschnitt in einen Kreis projiziert werden kann.

Zwei in verschiedenen Ebenen liegende kollineare Felder Σ, Σ', die in perspektiver Lage sind, kann man durch Drehen der einen Ebene um die Schnittlinie s, bis sie sich mit der andern vereinigt, in Homologie bringen. 300

In der Tat, in der perspektiven Lage entsprechen alle Punkte

1) Vgl. Schlömilch, Pelz und Schur, Zeitschr. für Math. und Phys., Bd. 39, S. 117, 245, 247.

auf der Schnittlinie sich selbst, und umgekehrt, wenn dies der Fall ist, besteht perspektive Lage. Durch die Drehung wird diese Eigenschaft der Punkte der Schnittlinie nicht aufgehoben; mithin findet in jedem Moment der Drehung perspektive Lage statt und, wenn die Vereinigung erreicht ist, Homologie, weil bei der dann eingetretenen ebenen Kollineation eine Gerade s vorhanden ist mit lauter sich selbst entsprechenden Punkten (Nr. 294).

Es sei O das Perspektivitätszentrum in der Ausgangslage, Σ die Ebene, welche gedreht wird, Σ_0 ihre Lage, wenn sie mit Σ' vereinigt ist, Φ die Parallelebene durch O zu Σ, welche in Σ' die (zu s parallele) Fluchtgerade q' einschneidet. Diese Φ drehen wir in demselben Sinne um q' derartig, daß stets Σ und Φ parallel sind und gleichzeitig mit Σ' sich vereinigen. Ein beliebiger Punkt X von Σ, dem X' in Σ' entspreche, und das Zentrum O komme durch die Drehung von Σ und Φ nach X_0 und O_0 in $\Sigma_0 \equiv \Sigma'$, so daß X_0 von Σ_0 und X' von Σ' in der Homologie entsprechend sind. Bei den Drehungen beschreiben X und O Kreisbogen in parallelen Ebenen, die senkrecht zu s und q' sind, um Mittelpunkte, die auf diesen Geraden liegen, und mit gleichen Zentriwinkeln, Neigungswinkeln der gleichen Flächenwinkel $\Sigma\Sigma'$, $\Phi\Sigma'$, durch welche gedreht wird. Da sie parallele Schenkel haben, so sind auch die Sehnen XX_0, OO_0 parallel; projiziert man also die drei in gerader Linie liegenden Punkte X, X', O in der Richtung dieser Sehnen auf die Σ', so ergeben sich drei wiederum in gerader Linie liegende Punkte X_0, X', O_0. Alle Verbindungslinien X_0X' in der Homologie entsprechender Punkte gehen durch O_0; dieser Punkt ist das Zentrum, während s die Axe ist.

Die Fluchtgerade r in Σ wird von der Parallelebene durch O zu Σ' eingeschnitten; sie ist parallel zu s, bleibt dies und Fluchtgerade, wenn sie mit Σ nach r_0 in Σ_0 gedreht wird. Die in Nr. 295 angegebene Lage von s, O_0, r_0, q' geht hier aus der Eigenschaft des von Σ, Σ' und den beiden Parallelebenen durch O eingeschlossenen parallelopipedischen Raumes hervor. Mit der Ebene $\mathfrak{S}$ des Bogens OO_0 — offenbar einer Symmetrieebene unserer Figur — schneiden wir s, r, q' in S, R, Q'; die letzteren Punkte R, Q' entsprechen den unendlich fernen Punkten auf den von $\mathfrak{S}$ eingeschnittenen Geraden SQ', SR, den Hauptgeraden n', n (Nr. 277). O ist der Schnitt der Parallelen durch R zu n' und durch Q' zu n. In einem gewissen Momente der Drehung sei R nach R_1 gekommen; dieser entspricht demselben unendlich fernen Punkte von Σ' wie vorher R; dem Q' aber entspricht der unendlich ferne Punkt auf SR_1, in den der auf SR durch die Drehung übergegangen ist. Der Schnitt der Parallelen durch R_1 zu SQ', durch Q' zu SR_1 ist das diesem Momente zugehörige Perspektivitätszentrum O_1; es ist $Q'O_1 = SR_1 = SR = Q'O$, und da R_1 und die genannten Parallelen in $\mathfrak{S}$ liegen, so gilt dies auch für O_1; also liegt er auf dem Kreise, zu dem der Bogen OO_0 gehört, und dieser Bogen OO_0 wird von dem Perspektivitätszentrum durchlaufen.

In dem Büschel um O_0 decken sich gleiche entsprechende Strahlenbüschel der vereinigten Felder Σ_0 und Σ'; O_0 ist also der eine Brennpunkt F' von Σ', und wenn die Gerade $OO_0 \equiv OF'$ die Σ (in der ursprünglichen Lage) in F trifft, so ist dies der entsprechende Brennpunkt. Diese Gerade FF', von der Richtung der oben erwähnten Sehnen, steht senkrecht auf der Halbierungsebene des Flächenwinkels $\Sigma\Sigma'$, durch den die Drehung erfolgt. Wird O von diesem Flächenwinkel ausgeschlossen, so sind die Büschel F, F', aus O betrachtet, gleichlaufend, also F und F' ähnliche Brennpunkte (Nr. 277); im andern Falle vereinigen sich unähnliche im Homologiezentrum. F' und F_1' liegen symmetrisch in bezug auf q'; es ist also $\frac{1}{2}F'F_1' = (O_0 q') = (Oq')$. Die in s vereinigten gleichstreckigen Geraden seien s und s', die andern s_1 und s_1'; s und s_1 sind symmetrisch in bezug auf r, also ist $\frac{1}{2}(ss_1) = (sr) = (Oq')$, und so zeigt sich auch hier: $(ss_1) = F'F_1'$.

Wir wollen nun die Punktreihen auf s_1 und s_1' zur Deckung bringen und richten unsere Aufmerksamkeit vorzugsweise auf den Schnitt mit $\mathfrak{S}$, in der ja $S \equiv S'$, R, Q' und die F liegen. Ihre Schnitte mit s_1 und s_1' seien S_1, S_1'. Indem wir nun s_1 als $\bar{s}_1$ auf s_1' legen, stellen wir der Einfachheit halber, da es auf den Winkel der Ebenen nicht ankommt, Σ als $\bar{\Sigma}$ parallel zur früheren Σ; S_1 sei als $\bar{S}_1$ auf S_1' gelegt. Vorhin, wo s und s' Punkt für Punkt vereinigt waren, waren s_1 und s_1' ungleichlaufend (Nr. 277); folglich muß die Ebene $\bar{\Sigma}$ in sich um $\bar{S}_1 \equiv S_1'$ um 180^0 gedreht werden, damit die Punktreihen auf $\bar{s}_1$ und s_1' sich decken. Wir wissen, q' halbiert den Streifen $(s's_1') \equiv (s\bar{s}_1)$, also Φ den Raumstreifen $\Sigma\bar{\Sigma}$; ferner O liegt auf $S_1S_1' \equiv S_1\bar{S}_1$ und in Φ, also halbiert er diese Strecke. Daraus folgt, daß durch jene Drehung das Feld $\bar{\Sigma}$ symmetrisch zu Σ in bezug auf O geworden ist; also ist $\bar{S}_1\bar{R}$ gleich und von entgegengesetztem Sinne mit S_1R, demnach gleich und von gleichem Sinn mit SR; also fällt das Perspektivitätszentrum, der Schnitt der Parallelen durch $\bar{R}$ zu $S_1'Q'$ und durch Q' zu $\bar{S}_1\bar{R}$, in denselben Punkt O wie vorhin. Die Brennpunkte in Σ' liegen auf $Q'S_1'$ in der Entfernung $Q'O$, sind ja dieselben wie vorhin; und die entsprechenden $\bar{F}$ und $\bar{F}_1$ sind die Schnitte von OF' und OF_1' mit $\bar{\Sigma}$, also symmetrisch, in bezug auf O, zu den Schnitten F, F_1 derselben Geraden mit Σ; jene Punkte sind die neuen Lagen dieser Punkte.

Ein endliches Perspektivitätszentrum O führt zu einem endlichen Homologiezentrum O_0; soll daher durch die im vorangehenden beschriebene Umlegung homologische Affinität sich ergeben, so muß O unendlich fern sein. In der Tat, dann sind die Strahlen XX', YY',... parallel, die Sehnen der Bogen XX_0, YY_0,... sind es immer; folglich sind es auch die Ebenen $XX'X_0$, $YY'Y_0$... und ihre Schnitte $X'X_0$, $Y'Y_0$,... mit Σ', also ihr Konkurrenzpunkt O_0 unendlich fern.

Perspektiv gelegene Felder in parallelen Ebenen sind ersichtlich ähnlich. Die Drehungskreise XX_0,... haben unendlich ferne Mittelpunkte, auf der Schnittlinie s der beiden Ebenen, bekommen, und sind in die geraden Linien übergegangen, welche auf den beiden Ebenen normal sind. Die „Drehung" der Ebene Σ in die Ebene Σ', durch welche Ähnlichkeit in ähnlicher Lage erzielt wird, ist diejenige Bewegung, bei welcher die Punkte sich auf diesen Normalen bewegen; auch O beschreibt ein solches Lot und das Zentrum O_0 (Ähnlichkeitspunkt) ist der Fußpunkt desselben in Σ'. In der Tat, wenn X in Σ, X' in Σ' mit O in gerader Linie liegen, so liegen auch die Orthogonalprojektionen X_0 und O_0 von X und O auf Σ' und X' in gerader Linie.

Die beiden Felder werden kongruent, wenn O unendlich fern ist oder in der Mitte zwischen den parallelen Ebenen Σ, Σ' liegt. Die genannte Verschiebung macht sie homologisch-kongruent mit unendlich fernem Zentrum, bzw. symmetrisch in bezug auf die Projektion O_0.

301 Wenn zwei Kegelschnitte in einer Homologie einander entsprechen, so ist das Zentrum S ein Umbilikalpunkt (Nr. 269), denn die Tangenten aus ihm an den einen Kegelschnitt müssen auch den andern berühren, und die Axe s eine gemeinsame Sekante, denn ihre Schnitte mit dem einen Kegelschnitte liegen auch auf dem andern. Oder wenn wir nur mit reellen Elementen operieren wollen: die Involutionen konjugierter Strahlen um das Zentrum und diejenige konjugierter Punkte auf der Axe sind den beiden Kegelschnitten gemeinsam.

Dieser Umbilikalpunkt und diese gemeinsame Sekante sind korrespondierend in dem in Nr. 269 erläuterten Chasles-schen Sinne und, wie dort erkannt wurde, gleichzeitig reell, weil die Kegelschnitte es sind. Denn weil S auf einer Seite des gemeinsamen Polardreiecks liegt, müssen seine beiden Polaren durch die Gegenecke, ihren gemeinsamen Pol, gehen; sie sind aber in der Homologie entsprechende Geraden und schneiden sich auf der Axe s; also ist diese eine der diesem Umbilikalpunkte S korrespondierenden gemeinsamen Sekanten.

Umgekehrt, wenn zwei (gleichzeitig reelle) Kegelschnitte k und k' vorliegen, und S ein reeller Umbilikalpunkt, s eine dann auch reelle korrespondierende gemeinsame Sekante ist, so kann man die Kegelschnitte zu homologischen Figuren machen. Man bestimme die Homologie durch S und s als Zentrum und Axe und die beiden Polaren p, p' von S, die sich ja auf s, in der Gegenecke der Seite des Polardreiecks, auf welcher S liegt, schneiden, als entsprechende Geraden (oder die beiden Pole von s als entsprechende Punkte). Die Involutionen konjugierter Punkte, welche den beiden Kegelschnitten auf p und p' zugehören, sind zu der ihnen gemeinsamen Involution konjugierter Strahlen um S perspektiv; folglich sind sie auch in der Homologie entsprechend.

Daher hat der Kegelschnitt, in welchen k durch die Homologie übergeht, mit k' sowohl die Involution konjugierter Strahlen um S, welche nicht verändert wird, als auch die Involution konjugierter Punkte auf p' gemeinsam, so daß diese Kegelschnitte in den Doppelpunkten der letzteren eine doppelte Berührung eingehen mit den Doppelstrahlen der ersteren als Tangenten; sodann aber haben sie auch die Involution konjugierter Punkte auf s (oder ihre Doppelpunkte) gemeinsam. Daraus folgt die Identität der beiden Kurven.

Es ergibt sich weiter, daß jeder Strahl durch S, welcher die eine Kurve reell trifft, auch die andere so schneidet. Wenn die gemeinsamen Tangenten aus S imaginär sind, ist das selbstverständlich; bei reellen Tangenten aber könnte die eine Kurve in dem einen, die andere in dem andern (vollen) Winkel derselben liegen; was reelle Schnittpunkte ausschließt. Aber dann wären die beiden korrespondierenden gemeinsamen Sekanten nicht reell; denn eine reelle gemeinsame Sekante führt mit einem reellen korrespondierenden Umbilikalpunkte zu einer reellen Homologie, in der die Kegelschnitte entsprechend sind und gleichartig von den Strahlen durch das Zentrum geschnitten werden (vgl. Nr. 269).

Die vier reellen Homologien zwischen zwei Kreisen haben einen der Ähnlichkeitspunkte zum Zentrum und entweder die unendlich ferne Gerade oder die Potenzlinie zur Axe; im ersteren Falle entsteht Ähnlichkeit in ähnlicher Lage (direkte beim äußern, inverse beim innern Ähnlichkeitspunkte). In den andern Homologien sind die sogenannten „potenzhaltenden" Punkte der beiden Kreise entsprechend; die Tangenten in ihnen schneiden sich auf der Potenzlinie als der Axe; also sind sie gleich lang und man sieht, daß in potenzhaltenden Punkten die Kreise von einem dritten berührt werden können.

Wenn die beiden Kegelschnitte k und k' sich doppelt be- 302
rühren, dann ist dem Berührungspole S als Umbilikalpunkt die Berührungssehne s korrespondierend, in welche die beiden korrespondierenden gemeinsamen Sekanten sich vereinigt haben; sie ist stets reell, hat aber auch die beiden Polaren p, p' in sich aufgenommen, so daß diese nicht mehr zur Verfügung stehen für die Festlegung einer reellen Homologie zwischen den Kegelschnitten, und es ist ersichtlich, daß, wenn die Tangenten reell sind und die beiden Kegelschnitte in verschiedenen vollen Winkeln derselben liegen, reelle Homologie nicht

eintreten kann. Werden aber, bei reeller doppelter Berührung, beide Kegelschnitte von denselben Strahlen durch den Berührungspol S reell getroffen, oder ist die doppelte Berührung imaginär, wo dann alle Strahlen durch S beide Kurven treffen, so kann reelle Homologie hergestellt werden und zwar, je nachdem man die Schnitte entsprechen läßt, auf zwei Weisen. Wenn A, B; A', B' die Schnitte mit einem (reell schneidenden) Strahle durch S sind, so sei die Homologie (S, s) hergestellt, in der A und A' entsprechend sind. Sie führt k in einen Kegelschnitt über, der durch A' geht und dem die k und k' gemeinsamen Involutionen konjugierter Elemente auf s, um S, weil sie zu k gehören, d. h. dem die Berührungen auch zukommen, der also mit k' identisch ist; so daß auch B und B' einander entsprechen. Daher ist die Invariante der Homologie

$$\lambda = (S\mathfrak{S}AA') = (S\mathfrak{S}BB'),$$

wo $\mathfrak{S}$ der Schnitt mit s ist. Ein zweiter Strahl durch S treffe in A_1, B_1; A'_1, B'_1, so seien A_1 und A'_1, B_1 und B'_1 in der Homologie entsprechend. Daher treffen sich AA_1 und $A'A_1'$, BB_1 und $B'B_1'$ auf s, als entsprechende Geraden der Homologie, aber auch AA_1 und BB_1, $A'A_1'$ und $B'B_1'$ tun es, weil S und s in bezug auf beide Kegelschnitte polar sind; folglich gehen alle vier Verbindungslinien durch den nämlichen Punkt auf s, und es ist:

$$(ABA'B') = (A_1B_1A_1'B_1').$$

Die beiden Kegelschnitte werden also von allen Strahlen durch S nach konstantem Doppelverhältnisse geschnitten.

Wir wissen (Nr. 5): aus $(FGHA) = \alpha$, $(FGHB) = \beta$, $(FGHC) = \gamma$, $(FGHD) = \delta$ folgt: $(ABCD) = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \cdot \frac{\beta - \delta}{\alpha - \delta}$; nun ist: $(S\mathfrak{S}AA) = 1$, $(S\mathfrak{S}AB) = -1$, $(S\mathfrak{S}AA') = \lambda$, $(S\mathfrak{S}AB') = (S\mathfrak{S}AA'). (S\mathfrak{S}A'B') = -\lambda$; also ist

$$(ABA'B') = \left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}\right)^2;$$

so daß die beiden Punktepaare hyperbolische Lage haben.

$$(S\mathfrak{S}AB') = (S\mathfrak{S}BA') = -\lambda$$

ist die Invariante der zweiten Homologie, in welcher A und B', B und A' entsprechend sind.

303 Wenn aber die — immer noch reell vorausgesetzten — Kegelschnitte in verschiedenen vollen Winkeln der reellen Tangenten liegen, so daß die Strahlen durch den Berührungspol nicht gleichzeitig reell treffen, so sind beide Homologien imaginär, also auch ihre Invarianten, daher auch, im allgemeinen, das Schnitt-Doppelverhältnis $(ABA'B')$

bzw. $(ABB'A')$. Nur wenn $\lambda = \pm i$ ist, wird dies Doppelverhältnis reell $= -1$. Umgekehrt, wenn die Schnitte A, B; A', B' harmonisch werden, muß (Nr. 85), weil beide Paare auch zu S, $\mathfrak{S}$ harmonisch sind, das eine Paar reell sein, das andere reell-imaginär[1]).

Man nennt dann die Kegelschnitte harmonisch zugeordnet, bisweilen Kegelschnitte in Involution.

Die Überführung des einen von zwei harmonisch zugeordneten Kegelschnitten in doppelter Berührung in den andern vermittelst der beiden imaginären Homologien, welche Berührungspol und Berührungssehne zu Zentrum und Axe und die Invariante $\pm i$ haben, hat Chr. Wiener[2]) Imaginärprojektion genannt. Es ist leicht, den einen Kegelschnitt aus dem andern reell zu konstruieren. Ist k der gegebene und S und s in bezug auf ihn polar, zunächst so, daß S außerhalb liegt, so konstruiere man auf einem durch S gehenden Strahle l, welcher k nicht reell schneidet, in der elliptischen Involution konjugierter Punkte das stets reelle Paar CD, dessen Punkte zu S und $Q = ls$, welche selbst ein Paar der Involution bilden, harmonisch sind (Nr. 114). Diese Paare CD, auf allen derartigen Strahlen l hergestellt, bilden den gesuchten Kegelschnitt.

In der Tat, es seien U, V die — infolge der Annahme reellen — Schnitte von s mit k, l' der Strahl durch S, der zu l konjugiert ist in bezug auf k und daher reell schneidet: in A, B und R der Schnitt $l's$; so sind die andern Diagonalpunkte $C = (UA, VB)$, $D = (UB, VA)$ die gesuchten Punkte. Denn RCD, als Diagonaldreieck von $UVAB$, ist Polardreieck von k; also geht CD, als Polare von R, durch S und ist konjugiert zu $l' = SR$, daher die l. Die C, D sind ferner konjugiert in bezug auf k, also jener Involution auf l angehörig, aber auch harmonisch zu S und Q, weil QAB Diagonaldreieck von $UVCD$ ist.

Daß C, D einen Kegelschnitt k' erzeugen, welcher in U, V die nämlichen Tangenten hat wie k, erhellt daraus, daß sie Schnitte entsprechender Strahlen der projektiven Strahlenbüschel U, V sind, welche die involutorischen Punktreihen auf k (mit S als Zentrum) projizieren.

Man sieht, wie k in derselben Weise aus k' entsteht.

SQR ist gemeinsames Polardreieck für beide Kegelschnitte; also sind RC, RD die Tangenten von k' in C, D. Weil aber RCD Polardreieck für k ist, so hat jeder der beiden Punkte C, D von k' die Tangente des andern zur Polare in bezug auf k; d. h. k' ist zu sich selbst polar in bezug auf k; und jeder Punkt von k' und der Berührungspunkt der polaren Tangente sind entsprechend

1) Vgl. Steiner-Schröters Vorlesungen, 3. Aufl., Nr. 259, 260.

2) Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, Bd. I, Nr. 400ff. — Vgl. auch V. Retali, Memorie dell'Istituto di Bologna, Ser. IV, Bd. 7.

in der involutorischen Homologie (S, s), welche k' in sich selbst transformiert. Ebenso ist k zu sich selbst polar in bezug auf k'.

Der bekannteste Fall ist der von zwei konjugierten Hyperbeln, bei denen S der gemeinsame Mittelpunkt und s die unendlich ferne Gerade ist. Wiener gebraucht daher das Wort konjugiert auch im allgemeinen Falle, und nennt S und s Zentrum und Axe der Konjunktion.

Wenn aber S im Innern von k liegt, U, V also imaginär sind, so ist die Involution konjugierter Punkte auf allen Strahlen durch S hyperbolisch und C, D, gepaart in dieser Involution und zu S, Q harmonisch, sind immer konjugiert imaginär (Nr. 85), also k' reell-imaginär. Dies gilt z. B. für die konjugierte Kurve einer Ellipse in bezug auf den Mittelpunkt als Zentrum der Konjunktion.

Indem die gegebene Kurve k auch in bezug auf diese imaginäre Kurve k' zu sich selbst polar ist, hat jeder Punkt A von k die Tangente im zweiten Schnitte B mit SA zur Polare in bezug auf k'. Folglich kann zunächst für jeden äußeren Punkt von k die Polare nach k' konstruiert werden, und dann auch für jeden innern Punkt.

Dies weist hin auf die Polarität in bezug auf eine reell-imaginäre Kurve, mit der wir uns bald genauer beschäftigen werden. Weil jeder Strahl durch den Berührungspol zwei harmonisch zugeordnete Kegelschnitte ungleichartig schneidet, so ist, wenn die Berührung imaginär ist, der eine Kegelschnitt reell, der andere reell-imaginär; ist sie reell, so ist die endliche Strecke UV für die eine Kurve Außen-, für die andere Innensehne; also muß, da nur die Hyperbel Außensehnen besitzt, mindestens eine der beiden Kurven Hyperbel sein, so daß nur folgende Zusammenstellungen harmonisch zugeordneter Kegelschnitte möglich sind:

Zwei Hyperbeln, Hyperbel und Ellipse, Hyperbel und reell-imaginäre Kurve, Ellipse und reell-imaginäre Kurve.

Jedes Paar polarer Elemente S, s für k liefert einen diesem Kegelschnitte harmonisch zugeordneten, und er besitzt deshalb ∞^2.

Die beiden Tangenten in den Punkten A und B auf k, die in gerader Linie mit S liegen: die Polaren von A in bezug auf k und k', werden durch S und s harmonisch getrennt; durch S geht die Polare von A in bezug auf das Geradenpaar der gemeinsamen Tangenten, s ist die Polare in bezug auf das Punktepaar der Berührungspunkte; daher sind diese vier Polaren harmonisch.

Also sind zwei harmonisch zugeordnete Kegelschnitte in ihrer Büschel-Schar harmonisch zu den beiden ausgearteten Elementen desselben, dem Geradenpaare und dem Punktepaare.

Was für jede zwei Kegelschnitte einer Büschel-Schar sich doppelt berührender Kegelschnitte gilt, daß nämlich die beiden Polaren eines Punktes sich auf der Berührungssehne, der Polare nach der Doppelgerade des Büschels, schneiden (Büschel-Eigenschaft) und die Pole einer Gerade mit dem Berührungspole, dem Pol nach dem Doppelpunkt der Schar, in gerader Linie liegen, (Schar-Eigenschaft) das gilt speziell für zwei harmonisch zugeordnete Kegelschnitte.

§ 46. Hermitesche ebene Kollineation.

Aus Nr. 268 folgt, daß zwei ineinander liegende Felder so kolli- 304
near gemacht werden können, daß ein gegebener Kegelschnitt K^2 sich selbst entspricht. Die Koinzidenzpunkte der durch die Kollineation auf ihm entstehenden konjektiven Punktreihen sind Koinzidenzpunkte der Kollineation, und weil in entsprechenden Punkten entsprechende Tangenten berühren, so sind die ihnen zugehörigen Tangenten — die Koinzidenzstrahlen der Projektivität, die im Tangentenbüschel entsteht, — Koinzidenzgeraden der Kollineation.

Ein Kegelschnitt, der in einer ebenen Kollineation sich selbst entspricht, geht durch zwei Ecken des Koinzidenzdreiecks und berührt in ihnen die Seiten, die nach der dritten Ecke gehen.

Jene Ecken seien V, W, also die zugehörigen Tangenten w, v; sind dann X und X' entsprechende Punkte auf K^2, so ist wegen der Kegelschnitt-Eigenschaft:

$$V(V,\ W,\ X,\ X') = W(V,\ W,\ X,\ X')$$

oder:

$$V(w,\ u,\ X,\ X') = W(u,\ v,\ X,\ X').$$

Sind also wieder $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ die Schnitte von XX' mit u, v, w, so ist:

$$(\mathfrak{W}\mathfrak{U}XX') = (\mathfrak{U}\mathfrak{V}XX')$$

oder:

$$\lambda_{wu} = \lambda_{uv}.$$

Eine ebene Kollineation transformiert nur dann einen Kegelschnitt in sich selbst, wenn zwei ihrer zyklisch gebildeten Invarianten gleich sind, also im allgemeinen keinen.

Diese Gleichheit:

$$(\mathfrak{W}\mathfrak{U}XX') = (\mathfrak{U}\mathfrak{V}XX') = (\mathfrak{V}\mathfrak{U}X'X)$$

bedeutet, daß:

$$\mathfrak{U}\mathfrak{U},\ \mathfrak{V}\mathfrak{W},\ XX'$$

in Involution sind, oder, weil die gerade Punktreihe $\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}XX'$ der Kegelschnitt-Punktreihe $UVWX'X$ projektiv ist (Nr. 270), daß:

$$UU,\ VW,\ XX'$$

in Involution sind[1]).

Umgekehrt, diese Bedingung:

$$\lambda_{wu} = \lambda_{uv}$$

werde erfüllt, so sei auf einem Kegelschnitte, der in V, W die w, v berührt, X ein beliebiger Punkt und X' der korrespondierende in der Kollineation, so sind $\mathfrak{U}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}\mathfrak{W}$, XX' in Involution. Ist dann X_1' der zweite Schnitt von XX' mit dem Kegelschnitte, so finden wir wie oben:

$$V(V,\ W,\ X,\ X_1') = W(V,\ W,\ X,\ X_1'),$$

also:

$$(\mathfrak{W}\mathfrak{U}XX_1') = (\mathfrak{U}\mathfrak{V}XX_1') = (\mathfrak{V}\mathfrak{U}X_1'X);$$

somit sind $\mathfrak{U}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}\mathfrak{W}$, XX_1' in Involution, also ist X_1' mit X' identisch. Jedem Punkt unseres Kegelschnitts entspricht daher ein diesem ebenfalls angehöriger, also der Kegelschnitt sich selbst, und so jeder Kegelschnitt der Büschel-Schar sich in V, W doppelt berührenden Kegelschnitte mit den Tangenten w, v.

Wenn daher bei einer ebenen Kollineation zwei zyklisch gebildete Invarianten, etwa λ_{wu} und λ_{uv}, gleich sind, so sind alle Kegelschnitte der Büschel-Schar sich doppelt berührender Kegelschnitte mit den Berührungspunkten V, W und zugehörigen Tangenten w, v sich selbst entsprechend.

Und wenn ein eigentlicher Kegelschnitt aus dieser Büschel-Schar sich selbst entspricht, so tun es alle.

Die ausgearteten Mitglieder dieser Büschel-Schar, die wir, um der Dualität gerecht zu werden, beide als Geraden- und als Punktepaar auffassen:

$$(v,\ w;\ U,\ U),\quad (u,\ u;\ V,\ W),$$

entsprechen sich immer selbst.

Ferner wird jedenfalls ein Kegelschnitt dieser Büschel-Schar durch die Kollineation in einen andern aus ihr übergeführt, weil eben dieser entsprechende Kegelschnitt ebenfalls durch V, W gehen und dort w, v berühren muß. So entsteht in ihr eine Projektivität mit den in der Kollineation korrespondierenden Kegelschnitten als entsprechenden Elementen. Koinzidenzen sind die genannten Ausartungen. Kommt also noch ein eigentlicher aus der Büschel-Schar als sich selbst entsprechend hinzu, so wird wegen der drei Koinzidenzen die Projektivität Identität: jeder Kegelschnitt der Büschel-Schar entspricht sich selbst.

1) Kohn, Math. Annalen, Bd. 46, S. 294.

Eine derartige Kollineation, welche einen sich selbst entsprechenden Kegelschnitt besitzt, und deshalb eine ganze Büschel-Schar solcher Kegelschnitte, und durch die Gleichheit zweier zyklischen Invarianten charakterisiert wird, heißt Hermitesche Kollineation[1]). Zwei ineinander liegende kongruente Felder, die durch Drehung um einen Punkt der Ebene auseinander hervorgehen, sind in Hermitescher Kollineation. Die in sich selbst übergehenden Kegelschnitte sind die Kreise um den Drehpunkt; dieser und die absoluten Punkte bilden das Koinzidenzdreieck; konzentrische Kreise haben ja die isotropen Strahlen aus dem Mittelpunkt zu gemeinsamen Tangenten in den absoluten Punkten.

Wie in diesem Beispiele, so wird überhaupt gerade der Fall, wo V und W, w und v konjugiert imaginär sind, also die doppelte Berührung imaginär ist, im folgenden wichtig sein; und es entsteht die Frage, wie die Kegelschnitte der Büschel-Schar reell konstruiert werden, wenn vorausgesetzt wird, daß die beiden zu einander perspektiven darstellenden Involutionen für V, W; w, v, also die gemeinsamen Involutionen konjugierter Elemente auf u und um U für alle Kegelschnitte der Büschel-Schar bekannt sind. Zur endgültigen Bestimmung eines dieser Kegelschnitte sei ein Punkt A (oder dual eine Tangente) gegeben. Der von ihm durch U, u harmonisch getrennte Punkt B gehört dem Kegelschnitte ebenfalls an; P sei (u, UAB). Aus A und B projizieren wir gepaarte Punkte X, X_1 der gegebenen Involution auf u durch projektive Büschel; der Schnitt $Y = (AX, BX_1)$ beschreibt den Kegelschnitt. In der Tat, die Gerade u muß, weil sie die beiden erzeugenden Büschel involutorisch schneidet, durch das involutorische Zentrum Q gehen, in welchem sich die Tangenten des Kegelschnitts in A und B begegnen. Daher ist UAB die Polare von Q, und U der Pol von $PQ = u$; die Polare von X geht also durch U.

Ist nun Z der Schnitt (AXY, X_1U), so ist $XZAY$ harmonisch, weil perspektiv zu $PUAB$ (aus X_1); folglich geht die Polare von X durch Z und ist UZX_1, demnach X_1 zu X konjugiert. Also gehört die gegebene Involution auf u als Involution konjugierter Punkte zum konstruierten Kegelschnitt und ebenso die zu ihr perspektive um den Pol U als Involution konjugierter Strahlen: der Kegelschnitt gehört zur Büschel-Schar.

Wenn die Kollineation in zwei der drei Büschel-Scharen, 305
die zum Koinzidenzdreieck gehören, jeden Kegelschnitt in sich selbst überführt, so sind alle drei Invarianten gleich, und die dritte Büschel-Schar hat dieselbe Eigenschaft.

Die drei Kegelschnitte aus den Büschel-Scharen, die durch $X \equiv Y'$

---

1) Hermite, Journal f. Math., Bd. 47, S. 313.

gehen, gehen auch durch X' und Y; und es muß, da sie nicht mehr als drei Punkte gemein haben können, jeder von diesen Punkten die beiden andern zu den in beiden Sinnen entsprechenden haben, so daß, wenn $X' \equiv Z$ ist, Z' sich mit Y deckt, die drei Punkte also einen Zyklus bilden, in welchem jeder Punkt den folgenden und den vorangehenden zu seinen entsprechenden hat. Wir werden finden, daß das nur möglich ist, wenn nur eine Ecke und die Gegenseite des Koinzidenzdreiecks reell sind.

Wenn U in der Homologie in das Zentrum S und V, W beliebig auf die Axe gelegt werden, so ist (Nr. 295):

$$\lambda_{wu} = (S\mathfrak{S}XX') = \lambda, \quad \lambda_{uv} = (\mathfrak{S}SXX') = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda_{vw} = (SSXX') = 1.$$

Schließen wir die interesselosen Fälle der Identität und der Inzidenz von S und s (wo nur ausgeartete Koinzidenzdreiecke vorhanden sind) aus, so erweist sich als Hermitesche Kollineation nur die involutorische Homologie, in der die beiden ersten Invarianten gleich -1 sind. Wir wissen schon, daß alle ∞^3 Kegelschnitte, für welche das Zentrum und die Axe polar sind, in sich übergehen; jeder tangiert in seinen Schnitten V, W mit s die Strahlen $S(U, W)$; und jedes Paar V, W auf s gibt eine Büschel-Schar.

Diese Transformation eines Kegelschnitts in sich selbst durch eine involutorische Homologie, deren Zentrum und Axe polar sind, liefert ein von Poncelet herrührendes Kennzeichen dafür, ob ein gegebener Kegelschnitt-Bogen zu einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel gehört. Man zieht möglichst genau zwei Tangenten an den Bogen, s sei die Berührungssehne, S der Schnittpunkt, also der Pol von s. Die Mittelparallele zwischen S, s ist die Fluchtgerade r der involutorischen Homologie (S, s); so wie sie sich zum Bogen verhält: nicht schneidend, berührend, schneidend, so verhält sich die unendlich ferne Gerade zur Kurve.

Bei der Symmetrie in bezug auf einen Punkt werden alle Kegelschnitte, die ihn zum Mittelpunkt haben, und bei der in bezug auf eine Gerade alle, welche sie zum Durchmesser haben, während der konjugierte nach dem unendlich fernen Zentrum geht, in sich selbst transformiert.

§ 47. Ebene Korrelation.

306 Jeder Punkt der gemeinsamen Ebene der beiden korrelativen Felder hat zwei entsprechende Geraden oder Polaren, jede Gerade zwei entsprechende Punkte, Pole. Uns interessieren zunächst inzidente entsprechende Elemente.

Wenn ein Punkt auf der einen von seinen beiden Polaren liegt, so liegt er auch auf der andern. In der Tat, $X \equiv Y'$ habe die Polaren x', y; er falle auf x'; aber den inzidenten Elementen x' und Y' des zweiten Feldes korrespondieren inzidente Elemente X und y im ersten, d. h. der Punkt liegt auch auf y.

Ebenso ergibt sich oder vielmehr identisch mit dem vorigen ist: Geht eine Gerade durch ihren einen Pol, so geht sie auch durch den andern.

Infolgedessen werden wir zu zwei Kurven geführt, welche die Kernkurven (Inzidenzkurven) der ebenen Korrelation heißen: dem Ort der Punkte, die auf die eine und deshalb auf beide Polaren fallen, dem Orte der Geraden, welche den einen und folglich auch den andern Pol enthalten.

Bewegt sich X in Σ auf einer Gerade l, so dreht sich die Polare x' projektiv um den Pol L' von l und schneidet, da die Felder ineinander liegen, in l eine zu der Punktreihe der X konjektive Punktreihe ein: Jede Gerade trägt eine Projektivität konjugierter Punkte, jeder Punkt eine Projektivität konjugierter Strahlen. Die beiden Koinzidenzen der ersteren sind diejenigen Punkte von l, welche auf ihre beiden Polaren fallen. Der erste Ort ist eine Kurve 2. Ordnung, ein Kegelschnitt K^2: die Punkt-Kernkurve, und dual erkennt man, daß der zweite Ort ebenfalls ein Kegelschnitt Γ_2 ist, die Geraden-Kernkurve. Die Tangenten aus einem Punkte von K^2 an Γ_2 sind seine beiden Polaren, die Schnitte einer Tangente von Γ_2 mit K^2 sind ihre beiden Pole[1]).

Auf jeder Tangente von Γ_2 ist die Projektivität konjugierter Punkte ausgeartet, die Pole auf K^2 sind die singulären Punkte; und ebenso ist um jeden Punkt von K^2 die Projektivität konjugierter Strahlen ausgeartet, mit den Tangenten von Γ^2 als singulären Strahlen. Die Kurven sind gleichzeitig reell oder gleichzeitig imaginär. Im ersteren Falle müssen sie so liegen, daß jeder Punkt von K^2 reelle Tangenten an Γ_2 sendet, jede Tangente von Γ_2 den K^2 reell schneidet.

Es sei U ein gemeinsamer Punkt der beiden Kurven; so geht von ihm nur eine Tangente u an Γ_2; seine beiden Polaren haben sich in u vereinigt, also haben auch die beiden Pole von u in U sich vereinigt; d. h. u berührt K^2 in U; beide Kurven berühren einander; und die beiden weiteren Schnitte vereinigen sich aus demselben Grunde zu einem zweiten Berührungspunkte V mit der Tangente v.

Die beiden Kernkurven berühren sich doppelt, was auch bei reellen Kurven imaginär erfolgen kann. Es sei w die Berührungssehne UV, W der Berührungspol uv; da U und u, V und v sich in beiderlei Sinne entsprechen, so gilt dies auch für w und W.

---

1) Zuerst gefunden von Seydewitz: Archiv der Mathematik (1. Reihe), Bd. 8, S. 1; dann Schröter: Journal f. Mathematik, Bd. 77, S. 105.

gehen, gehen auch durch X' und Y; und es muß, da sie nicht mehr als drei Punkte gemein haben können, jeder von diesen Punkten die beiden andern zu den in beiden Sinnen entsprechenden haben, so daß, wenn $X' \equiv Z$ ist, Z' sich mit Y deckt, die drei Punkte also einen Zyklus bilden, in welchem jeder Punkt den folgenden und den vorangehenden zu seinen entsprechenden hat. Wir werden finden, daß das nur möglich ist, wenn nur eine Ecke und die Gegenseite des Koinzidenzdreiecks reell sind.

Wenn U in der Homologie in das Zentrum S und V, W beliebig auf die Axe gelegt werden, so ist (Nr. 295):

$$\lambda_{wu} = (S\mathfrak{S}XX') = \lambda, \quad \lambda_{uv} = (\mathfrak{S}SXX') = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda_{vw} = (SSXX') = 1.$$

Schließen wir die interesselosen Fälle der Identität und der Inzidenz von S und s (wo nur ausgeartete Koinzidenzdreiecke vorhanden sind) aus, so erweist sich als Hermitesche Kollineation nur die involutorische Homologie, in der die beiden ersten Invarianten gleich -1 sind. Wir wissen schon, daß alle ∞^3 Kegelschnitte, für welche das Zentrum und die Axe polar sind, in sich übergehen; jeder tangiert in seinen Schnitten V, W mit s die Strahlen $S(U, W)$; und jedes Paar V, W auf s gibt eine Büschel-Schar.

Diese Transformation eines Kegelschnitts in sich selbst durch eine involutorische Homologie, deren Zentrum und Axe polar sind, liefert ein von Poncelet herrührendes Kennzeichen dafür, ob ein gegebener Kegelschnitt-Bogen zu einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel gehört. Man zieht möglichst genau zwei Tangenten an den Bogen, s sei die Berührungssehne, S der Schnittpunkt, also der Pol von s. Die Mittelparallele zwischen S, s ist die Fluchtgerade r der involutorischen Homologie (S, s); so wie sie sich zum Bogen verhält: nicht schneidend, berührend, schneidend, so verhält sich die unendlich ferne Gerade zur Kurve.

Bei der Symmetrie in bezug auf einen Punkt werden alle Kegelschnitte, die ihn zum Mittelpunkt haben, und bei der in bezug auf eine Gerade alle, welche sie zum Durchmesser haben, während der konjugierte nach dem unendlich fernen Zentrum geht, in sich selbst transformiert.

§ 47. Ebene Korrelation.

306 Jeder Punkt der gemeinsamen Ebene der beiden korrelativen Felder hat zwei entsprechende Geraden oder Polaren, jede Gerade zwei entsprechende Punkte, Pole. Uns interessieren zunächst inzidente entsprechende Elemente.

Wenn ein Punkt auf der einen von seinen beiden Polaren liegt, so liegt er auch auf der andern. In der Tat, $X \equiv Y'$ habe die Polaren x', y; er falle auf x'; aber den inzidenten Elementen x' und Y' des zweiten Feldes korrespondieren inzidente Elemente X und y im ersten, d. h. der Punkt liegt auch auf y.

Ebenso ergibt sich oder vielmehr identisch mit dem vorigen ist: Geht eine Gerade durch ihren einen Pol, so geht sie auch durch den andern.

Infolgedessen werden wir zu zwei Kurven geführt, welche die Kernkurven (Inzidenzkurven) der ebenen Korrelation heißen: dem Ort der Punkte, die auf die eine und deshalb auf beide Polaren fallen, dem Orte der Geraden, welche den einen und folglich auch den andern Pol enthalten.

Bewegt sich X in Σ auf einer Gerade l, so dreht sich die Polare x' projektiv um den Pol L' von l und schneidet, da die Felder ineinander liegen, in l eine zu der Punktreihe der X konjektive Punktreihe ein: Jede Gerade trägt eine Projektivität konjugierter Punkte, jeder Punkt eine Projektivität konjugierter Strahlen. Die beiden Koinzidenzen der ersteren sind diejenigen Punkte von l, welche auf ihre beiden Polaren fallen. Der erste Ort ist eine Kurve 2. Ordnung, ein Kegelschnitt K^2: die Punkt-Kernkurve, und dual erkennt man, daß der zweite Ort ebenfalls ein Kegelschnitt Γ_2 ist, die Geraden-Kernkurve. Die Tangenten aus einem Punkte von K^2 an Γ_2 sind seine beiden Polaren, die Schnitte einer Tangente von Γ_2 mit K^2 sind ihre beiden Pole[1]).

Auf jeder Tangente von Γ_2 ist die Projektivität konjugierter Punkte ausgeartet, die Pole auf K^2 sind die singulären Punkte; und ebenso ist um jeden Punkt von K^2 die Projektivität konjugierter Strahlen ausgeartet, mit den Tangenten von Γ^2 als singulären Strahlen. Die Kurven sind gleichzeitig reell oder gleichzeitig imaginär. Im ersteren Falle müssen sie so liegen, daß jeder Punkt von K^2 reelle Tangenten an Γ_2 sendet, jede Tangente von Γ_2 den K^2 reell schneidet.

Es sei U ein gemeinsamer Punkt der beiden Kurven; so geht von ihm nur eine Tangente u an Γ_2; seine beiden Polaren haben sich in u vereinigt, also haben auch die beiden Pole von u in U sich vereinigt; d. h. u berührt K^2 in U; beide Kurven berühren einander; und die beiden weiteren Schnitte vereinigen sich aus demselben Grunde zu einem zweiten Berührungspunkte V mit der Tangente v.

Die beiden Kernkurven berühren sich doppelt, was auch bei reellen Kurven imaginär erfolgen kann. Es sei w die Berührungssehne UV, W der Berührungspol uv; da U und u, V und v sich in beiderlei Sinne entsprechen, so gilt dies auch für w und W.

---

1) Zuerst gefunden von Seydewitz: Archiv der Mathematik (1. Reihe), Bd. 8, S. 1; dann Schröter: Journal f. Mathematik, Bd. 77, S. 105.

Bei jeder ebenen Korrelation gibt es drei Paare sich involutorisch entsprechender Elemente U, u; V, v; W, w; das sind die beiden Berührungspunkte der Kernkurven und je die zugehörige Tangente, bei welchen zwischen entsprechenden Elementen Inzidenz stattfindet und drittens: der Berührungspol und die Berührungssehne, welche nicht inzident sind.

Mit der Korrelation ist eine Kollineation verbunden, in der je die beiden Pole derselben Gerade, die beiden Polaren desselben Punktes entsprechend sind. In der Tat, wenn X im ersten Felde eine Gerade l durchläuft, so beschreibt x' einen Strahlenbüschel um den Pol L' derselben; ist M der mit L' identische Punkt, y der je mit x' identische Strahl im ersten Felde, so bewegt sich der Pol Y' auf der Polare m'; es sind dann X und Y', l und m' in der Kollineation entsprechend.

Und UVW ist offenbar das Koinzidenzdreieck dieser Kollineation; bei den Seiten müßten dann freilich u und v ihren Namen vertauschen, wenn wir an der früheren Bezeichnung festhalten.

Die Kernkurven können imaginär sein und sind es, wie gesagt, gleichzeitig; wie sie dann reell dargestellt werden, wird sich später zeigen. Aber auch, wenn sie reell sind, können, wie schon bemerkt, die Berührungspunkte U, V und ihre Tangenten u, v imaginär sein und müssen durch elliptische Involutionen repräsentiert werden. Dagegen sind W und w, Pol und Polare in bezug auf beide Kernkurven, immer reell; wie wir gleich noch genauer erkennen werden.

307 Jeder Punkt $\mathfrak{Z}$ hat als X oder Y' zwei Polaren x', y; deren Schnitt $\mathfrak{Z}_1$ ist ihm in beiderlei Sinne oder doppelt konjugiert; und da die Konjugiertheit gegenseitig ist, so ist auch diesem Punkte jener doppelt konjugiert, die Polaren von $\mathfrak{Z}_1$ schneiden sich in $\mathfrak{Z}$.

Auf diese Weise erhalten wir eine eindeutige involutorische Zuordnung der Punkte $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}_1$; die Eindeutigkeit ist unmittelbar klar; involutorisch ist die Zuordnung, weil eben $\mathfrak{Z}$ aus $\mathfrak{Z}_1$ genau ebenso sich ergibt wie $\mathfrak{Z}_1$ aus $\mathfrak{Z}$. Wir werden bald erkennen, daß sie nicht linear, also keine Kollineation ist. Ersichtlich machen die Punkte U, V, W, welche in beiderlei Sinne dieselbe Polare haben, von der Eindeutigkeit eine Ausnahme. Ihnen sind ∞^1 doppelt konjugierte Punkte, je auf u, v, w, zugeordnet. Daraus geht schon hervor, daß die Kurve der Punkte, welche den Punkten einer Gerade zugeordnet sind, durch U, V, W geht, die Punkte, welche den Schnitten der Gerade mit u, v, w zugeordnet sind, also keine Gerade sein kann.

Wir haben schon die beiden konjektiven Punktreihen auf einer Gerade l erwähnt: die eine von einem Punkte X beschrieben, die andere von dem Schnitte Y' der Polare x', also dem zu X konjugierten Punkte auf l; X ist der Schnitt der Polare y von Y'. Liegen nun auf l zwei doppelt konjugierte Punkte $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_1$, so existiert in diesen Punktreihen ein involutorisches Paar; demnach sind es alle Paare entsprechender Punkte. Auf jeder Gerade, die ein Paar (verschiedener) doppelt konjugierter Punkte enthält, gibt es ∞^1 solche Paare, die eine Involution bilden; der doppelt konjugierte Punkt zu einem jeden Punkt dieser Gerade liegt auch auf ihr.

Jede Verbindungslinie zweier doppelt konjugierter Punkte trägt eine Involution von doppelt konjugierten Punkten.

Folglich gibt es nur ∞^1 solche Geraden; und da ein beliebiger Punkt nur einen doppelt konjugierten Punkt hat, so bilden sie einen Strahlenbüschel. Es ist dies der Büschel um W; denn auf jedem Strahle durch diesen Punkt bildet er und der (von ihm verschiedene) Schnittpunkt mit w ein solches Paar.

Also laufen alle diese Verbindungslinien in W zusammen. Ebenso ist jeder Schnittpunkt zweier doppelt konjugierten Geraden Scheitel einer Involution doppelt konjugierter Geraden; alle diese Punkte liegen auf w.

Jeder Punkt von K^2 ist zu sich selbst konjugiert, weil er auf beiden Polaren liegt; desgleichen jede Tangente von Γ_2. Daher haben jene Involutionen ihre Doppelpunkte in den Schnitten mit K^2 und doppelt konjugierte Punkte sind harmonisch zu den Schnitten ihrer Verbindungslinie mit K^2, also konjugiert in bezug auf K^2; und in diesen Involutionen sind Doppelstrahlen die Tangenten von Γ_2, doppelt konjugierte Strahlen sind konjugiert in bezug auf Γ_2. Aus dem Zusammenlaufen aller Verbindungslinien doppelt konjugierter Punkte in den Punkt W folgt die Realität dieses Punktes, und ähnlich ergibt sich die von w.

Bewegen wir nun $\mathfrak{Z}(\equiv X \equiv Y')$ auf einer Gerade $l \equiv m'$, so beschreiben die Polaren x', y Büschel um die Pole L', M, welche zu jener Punktreihe und daher untereinander projektiv sind. Da die Gerade durch keinen Punkt wie U, V, W geht, so haben die Büschel keinen sich selbst entsprechenden Strahl. Der Schnitt $\mathfrak{Z}_1 = x'y$, der doppelt konjugierte Punkt zu $\mathfrak{Z}$, beschreibt also einen Kegelschnitt, der, wie wir schon erkannt haben, durch U, V, W geht. Jeder etwaige weitere solche Punkt würde auf allen diesen Kegelschnitten liegen; dann könnten ihrer nicht ∞^2 sein.

Also sind, im allgemeinen, U und u, V und v, W und w die einzigen sich involutorisch entsprechenden Elemente der ebenen Korrelation.

Die eindeutige Zuordnung zwischen doppelt konjugierten Punkten $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_1$ ist nach der Definition von Nr. 239 quadratisch, weil einer Gerade ein Kegelschnitt entspricht; diese Kegelschnitte gehen alle durch die ausgezeichneten Punkte U, V, W. Wir können sie auch bezeichnen als die Verwandtschaft zweier Punkte, die mit W in gerader Linie liegen und in bezug auf K^2 konjugiert sind.

Ebenso ist die Zuordnung doppelt konjugierter Geraden eine involutorische eindeutige quadratische Verwandtschaft; die Kegelschnitte, welche den Strahlenbüscheln korrespondieren, berühren alle die drei Geraden u, v, w.

Da Γ_2 von den beiden Polaren der Punkte von K^2 eingehüllt, oder K^2 durch die beiden Pole der Tangenten von Γ_2 erzeugt wird, so sind diese beiden Kurven K^2 und Γ_2 in beiderlei Sinne polar zueinander in der Korrelation; jeder als Kurve des ersten oder zweiten Feldes entspricht die zweite im andern Felde.

308 Es sei C^2 ein Kegelschnitt, welcher durch eine ebene Korrelation in sich selbst übergeht; d. h. jeder Punkt X von C^2 und seine Tangente x gehen über in eine andere Tangente x' von C^2 und den zugehörigen Berührungspunkt X'; oder, wenn der Punkt X von C^2 und die (im allgemeinen ihn anderswo berührende) Tangente x' einander entsprechen, so sind auch die Tangente x von X und der Berührungspunkt X' von x' entsprechend. Die Reihe der Punkte X auf dem Kegelschnitte, zum ersten Felde gerechnet, ist dem Büschel der Tangenten x' projektiv, folglich auch (Nr. 103) zu der Reihe der Punkte X'; wir haben daher zwei Koinzidenzen, d. h. zwei Punkte auf C^2, in deren jedem die in der Korrelation ihm entsprechende Tangente berührt. Es sei X_0 einer von diesen Koinzidenzpunkten, x_0' die entsprechende und zugehörige Tangente; dann sind auch die Tangente x_0 von X_0 und der Berührungspunkt X_0' von x_0' entsprechend; aber x_0 ist mit x_0', X_0' mit X_0 identisch. Dieser Punkt und seine Tangente entsprechen sich also involutorisch, und dasselbe gilt für den andern Koinzidenzpunkt und seine Tangente. Folglich handelt es sich um die Punkte U, V und die Geraden u, v.

Ein Kegelschnitt, der durch eine ebene Korrelation in sich selbst übergeführt wird, geht durch die beiden Punkte U, V und berührt in ihnen die Geraden u, v, gehört also zur Büschel-Schar der beiden Kernkurven.

Umgekehrt, jeder Kegelschnitt dieser Büschel-Schar geht durch die Korrelation in einen Kegelschnitt über, der gleichfalls zu ihr gehört; denn weil jener durch U, V geht und in ihnen u, v berührt, muß dieser u, v tangieren mit U, V als Berührungspunkten. Auf diese Weise entsteht in der Büschel-Schar eine Projektivität, in der jedem Kegelschnitt, zum ersten Felde gerechnet, der ihm in der Korrelation entsprechende korrespondiert. In dieser Projektivität sind auch die Kernkuren entsprechend und zwar doppelt entsprechend; also ist das Entsprechen durchweg involutorisch: jeder Kegelschnitt der Büschel-Schar geht, ob er zum ersten oder zweiten Felde gerechnet wird, durch die Korrelation in denselben andern Kegelschnitt über. Unmittelbar ersieht man dies Doppelt-Entsprechen bei den ausgearteten Mitgliedern der Büschel-Schar: $(u, v; W, W)$ und $(U, V; w, w)$. Hier entsprechen diese Elemente nicht sich selbst, wie in Nr. 304; folglich sind die Doppelelemente der Involution, oder die sich selbst entsprechenden Elemente der Projektivität, die sich daher auch in der Korrelation selbst entsprechen, eigentliche Kegelschnitte.

Bei jeder ebenen Korrelation gibt es zwei eigentliche Kegelschnitte, die sich selbst entsprechen, sie gehören zu der Büschel-Schar der Kernkurven und sind in ihr zu diesen harmonisch. In der Involution der Büschel-Schar, von welcher jene Kegelschnitte die Doppelelemente sind, sind zwei gepaarte Elemente in beiderlei Sinn entsprechend in der Korrelation, darunter die beiden Kernkurven.

Wenn ein reeller Kegelschnitt K^2 und zwei reelle Punkte U, V auf ihm gegeben sind, so kann man eine Korrelation herstellen, für welche K^2 die Punkt-Kernkurve und U, V die ausgezeichneten Punkte sind, in denen sie sich mit der andern Kernkurve berührt. Es seien u, v die Tangenten von U, V und $w = UV$, $W = uv$ Berührungssehne und Berührungspol, ferner A ein Punkt auf K^2 und a' eine durch ihn gehende Gerade. Wir legen eine Korrelation: 309

$$\left|\begin{matrix} U & V & W & A \\ u & v & w & a' \end{matrix}\right|$$

fest; es entsprechen dann durch sie den Geraden $u = UW$, $v = VW$, $w = UV$ des ersten Feldes die Punkte $U = uw$, $V = vw$, $W = uv$ im zweiten, so daß U, u; V, v; W, w die drei ausgezeichneten involutorischen Paare sind. A, auf der Polare a' gelegen, gehört der Punkt-Kernkurve an; da diese außerdem u, v in U, V berühren muß, so ist sie mit der gegebenen Kurve K^2 identisch.

Halten wir K^2 und A fest, bewegen U, V auf K^2, a' um A, so ergeben sich ∞^3 Korrelationen, für welche K^2 Punkt-Kernkurve ist.

Eine allgemeinere Konstruktion, bei welcher nicht die Realität von K^2, U, V vorausgesetzt wird, wird später gegeben werden.

Es bestehe wieder zwischen der Punktreihe auf einem Kegelschnitte K und dem Tangentenbüschel um einen andern K' Projektivität. Wir wissen, viermal sind entsprechende Elemente inzident (Nr. 167). Man kann dies nun auch mit Hilfe der ebenen Korrelation erkennen. Wir machen K und K' zu entsprechenden Kurven einer 310 solchen und zwar so, daß wir drei Punkten von K ihre in der vorliegenden Projektivität entsprechenden Tangenten zuweisen (Nr. 268); dadurch wird diese durch die Korrelation auf ihnen hervorgerufen. Die vier Punkte von K, durch welche die entsprechenden Tangenten gehen, sind dem K mit der Punkt-Kernkurve und die zugehörigen Tangenten dem K' mit der Geraden-Kernkurve gemeinsam.

Findet daher fünfmalige Inzidenz entsprechender Punkte und Tangenten statt, so identifizieren sich K und K' mit den genannten Kernkurven, und die Inzidenz erfolgt durchweg. Das ist also nur bei doppelter Berührung von K und K' möglich; es entspricht dann auch jedem der beiden Berührungspunkte U, V seine Tangente u, v; und man erkennt nun (Nr. 167), wie die Kurve 4. Klasse, welche durch die projektiven Punktreihen auf K und K' entsteht, in K' und die Büschel U, V zerfällt, die der 4. Ordnung, welche von den projektiven Tangentenbüscheln herrührt, in K und die beiden Geraden u, v.

Man nennt die beiden Kegelschnitte in diesem Falle perspektiv zueinander.

Wenn P ein Punkt von K ist und p' die durchgehende entsprechende Tangente von K', so sei durch K die Trägerfläche F zweier verbundenen Regelscharen gelegt und durch p', die sie reell schneidet, die eine der dann reellen Tangentialebenen, Π. Ist ferner S_1 der Schnitt der Π mit der Polare s' (nach F) der Berührungssehne s von K und K', so berührt der Tangentialkegel k' aus S_1 längs eines Kegelschnitts, dessen Ebene durch s geht; folglich tangiert er die Ebene Π und in U, V die Berührungsebenen der Fläche F, schneidet also die Ebene von K und K' in einem Kegelschnitte, der u, v in U, V berührt und p' zur Tangente hat, demnach mit K' identisch ist.

Man kann also einen Kegelschnitt K', der zu einem gegebenen K perspektiv ist, d. h. dessen Tangentenbüschel zu der Punktreihe von K so projektiv ist, daß durchweg entsprechende Elemente inzidieren, vermittelst eines Tangentialkegels irgend einer festen durch K gelegten Trägerfläche verbundener Regelscharen herstellen; es ergeben sich so ∞^3 zu K perspektive Kegelschnitte und, über ihnen stehend, ∞^6 perspektive Kegel 2. Grades[1]).

Die Perspektivität zwischen der Punktreihe auf K und dem Tangentenbüschel um K' sehen wir jetzt durch diejenige Regelschar von F entstehen, zu welcher die Gerade in Π gehört, die durch P geht. Der Punkt X von K, durch den eine Gerade dieser Schar geht, und die Spur x' der Tangentialebene von k', in welcher sie

1) Liniengeometrie, Bd. II, Nr. 496.

enthalten ist, sind entsprechend. Die zweite Regelschar führt dann zu einer zweiten Punktreihe auf K, zu welcher der Tangentenbüschel von K' perspektiv ist, und K' ist für die dadurch sich auf K ergebenden konjektiven Punktreihen die Direktionskurve.

Und dual wird zur Punktreihe von K noch der Büschel der zweiten Tangenten von K' perspektiv (Nr. 116).

§ 48. Polarität in bezug auf einen Kegelschnitt, ebene Polarkorrelation, Polarfeld.

In der Polarität in bezug auf einen Kegelschnitt haben 311
wir eine durchweg involutorische ebene Korrelation. In der Tat, wenn wir die Punkte der Ebene als Pole zu dem einen Felde, die ihnen in bezug auf den Kegelschnitt zugehörigen Polaren zu dem andern rechnen, so liegt eine eindeutige Zuordnung vor. Läuft der Pol auf einer Gerade, so dreht sich die Polare um einen Punkt; also handelt es sich um Korrelation; dieser Punkt entspricht nun im zweiten Felde jener Gerade aus dem ersten. Aber wir wissen aus der Theorie der Kegelschnitte, daß er der Pol der Gerade in bezug auf den Kegelschnitt ist. Also hat ein Punkt, mag er zum ersten oder zweiten Felde gehören, in beiden Fällen dieselbe entsprechende Gerade: die Polare in bezug auf den Kegelschnitt. Die Verwandtschaft ist durchweg involutorisch. Sie wird gewöhnlich ebene Polarkorrelation, ebenes Polarsystem genannt. Sagen wir mit Böger[1]) einfach: Polarfeld, wodurch das Attribut „eben“ überflüssig wird, und dann ebenso später: Polarbündel, Polarraum statt umständlicher: Bündel-Polarkorrelation, räumliche Polarkorrelation.

Es fragt sich, ob das Polarfeld die einzige involutorische ebene Korrelation ist.

Bei der allgemeinen ebenen Korrelation fanden wir den Berührungspol W der Kernkurven als den Konkurrenzpunkt aller Verbindungslinien doppelt konjugierter Punkte.

Wenn eine Korrelation drei Paare doppelt konjugierter Punkte besitzt, deren Verbindungslinien verschieden sind und nicht in einen Punkt zusammenlaufen, so ist sie durchweg involutorisch. Auf jeder der drei Verbingungslinien hat die Projektivität der konjugierten Punkte (Nr. 307) ein involutorisches Paar, also ist sie durchweg involutorisch; die Gerade trägt eine Involution doppelt konjugierter Punkte. Schneiden wir daher die drei

---

1) Ebene Geometrie der Lage (Leipzig, 1900), auf dessen Darstellung ich hiermit zugleich verweise. — Der Name Involutionsnetz der älteren Auflagen der Steiner-Schröterschen Vorlesungen ist nicht üblich geworden. „Polarbündel“ wurde wohl von Schröter zum erstenmale gebraucht: Journ. f. Math., Bd. 64, S. 80.

Geraden miteinander in den Punkten A, B, C, und solche drei Schnittpunkte haben sie wegen der Vorraussetzung, so hat jeder von ihnen auf jeder der beiden Geraden, die in ihm sich schneiden, einen doppelt konjugierten Punkt; deren Verbindungslinie ist seine Polare in beiderlei Sinne. Diese den A, B, C involutorisch zugehörigen Polaren seien a, b, c. Jeder Strahl durch A trägt wiederum zwei doppelt konjugierte Punkte, A und den Schnitt mit a, also eine Involution doppelt konjugierter Punkte, und ebenso jeder Strahl durch B oder C, und desgleichen jeder Punkt auf a, b oder c eine Involution doppelt konjugierter Strahlen. Demnach hat auch jeder beliebige Punkt der Ebene auf den Geraden, die nach zweien der Punkte A, B, C gehen, je einen doppelt konjugierten Punkt, und daher entspricht ihm die Verbindungslinie derselben in beiderlei Sinne. Die Korrelation ist, wie behauptet wurde, durchweg involutorisch[1]).

Nehmen wir an, daß einmal Pol P und Polare p in beiderlei Sinne zugeordnet und noch zwei doppelt konjugierte Punkte P_3, Q_3 vorhanden sind, so haben wir, wenn Q_1, Q_2 beliebige Punkte auf p sind, den vorigen Fall: PQ_1, PQ_2, P_3Q_3 und können also auch auf eine durchweg involutorische Korrelation schließen; es darf aber P nicht mit p inzidieren, weil dann PQ_1, PQ_2 nicht verschiedene Geraden sind, und P_3Q_3 nicht durch P gehen.

Dual kann man die Vorraussetzung dahin verändern, daß dreimal zwei doppelt konjugierte Strahlen vorhanden sind mit drei verschiedenen Schnittpunkten, die nicht in gerader Linie liegen, oder auch, daß p und P, die nicht inzidieren, in beiderlei Sinne polar und zwei Strahlen, deren Schnitt nicht auf p liegt, in beiderlei Sinne konjugiert sind.

Verlangt man, wie es Schröter[2]) tut, daß zweimal Punkt und Gerade: $X \equiv Y'$ und $x' \equiv y$, $Z \equiv W'$ und $z' \equiv w$, die nicht inzidieren, in beiderlei Sinne polar seien, so spricht man zuviel aus, legt vier Bedingungen auf, während nur drei notwendig sind. Es genügt, dem $Z \equiv W'$ einen Punkt auf $z' \equiv w$ oder dieser Gerade einen Strahl durch jenen Punkt als doppelt konjugiert zuzuordnen. Es werden schon selber die beiden zu $Z \equiv W'$ gehörigen Polaren identisch. Bei diesen vier Paaren entsprechender Elemente: X, Z, y, w und x', z', Y', W' liegt nicht der in Nr. 266 erwähnte Fall der Unmöglichkeit der Korrelation vor; die notwendige Doppelverhältnis-Gleichheit wird erfüllt:

$$XZ(X, Z, y, w) = x'z'(x', z', Y', W'), \text{ weil } = x'z'(Y', W', x', z').$$

Wenn z. B. ein einfaches ebenes Fünfeck $ABCDE$ gegeben ist,

---

1) Math. Annalen, Bd. 19, S. 468.

2) Oberflächen 2. Ordnung, § 50.

so ist die Korrelation, in welcher den Ecken A, B, C, D als Punkten des ersten Feldes die Gegenseiten CD, DE, EA, AB zugeordnet sind, involutorisch; der Ecke $A = (EA, AB)$ als Punkt des zweiten Feldes entspricht die Verbindungslinie der Pole C, D, also ebenfalls CD, und ebenso sind D und AB in beiderlei Sinne polar. Es genügt, neben jenem Paare von diesem nur die Punkte D und B als doppelt konjugiert anzunehmen, oder auch die drei Paare doppelt konjugierter Punkte A, C; A, D; B, D. E als Punkt des zweiten Feldes hat BC zur Polare, also auch im andern Sinne.

Nehmen wir weiter an, es sei bei einer ebenen Korrelation 312
ein Dreieck vorhanden, dessen Ecken A, B, C, dem ersten Felde zugerechnet, die Gegenseiten BC, CA, AB im andern zu Polaren haben, dann gilt dies auch im andern Sinne; denn z. B. A im zweiten Felde hat, als Schnittpunkt von CA und AB, die Verbindungslinie der Pole B, C zur Polare im ersten. Also haben wir in den drei Paaren der Ecken oder der Seiten drei Paare doppelt konjugierter Elemente, deren Verbindungslinien nicht durch dieselben Punkte gehen bzw. deren Schnittpunkte nicht auf derselben Gerade liegen. Daher ist die Korrelation involutorisch, und ein solches Dreieck ist ein charakteristisches Kennzeichen für eine involutoriche Korrelation. Man nennt es meistens ein Polardreieck oder -dreiseit (Poldreieck, Poldreiseit); auch die Namen: Tripel konjugierter Punkte oder Strahlen, wegen der konjugierten Ecken oder Seiten, kommen vor.

In der eben besprochenen Fünfeck-Figur läßt sich leicht eins nachweisen: wir fanden A und CD, D und AB in beiderlei Sinne polar, also sind es auch $F = (AB, CD)$ und AD, und daher ist ADF ein Polardreieck.

Wenn also zwei inzidenten Elementen A, b zwei (ebenfalls inzidente) Elemente a, B involutorisch entsprechen, so gilt dies auch für $C = ab$ und $c = AB$, und es liegt ein Polardreieck ABC vor.

Solcher Polardreiecke hat jede involutorische Korrelation ∞^3; man nehme einen beliebigen Punkt A, seine Polare sei a (von der man auch ausgehen kann); die zweite Ecke B werde auf a gelegt, so muß, weil den inzidenten Elementen B, a wiederum inzidente Elemente b, A korrespondieren, b durch A gehen. Die dritte Ecke C ist dann der Schnitt ab und ihre Polare muß mit A, B inzidieren. Jede Ecke dieses Dreiecks hat also die Gegenseite zur Polare. A ist in ∞^2 Lagen, B dann in ∞^1 Lagen zu wählen. Jeder Punkt oder jede Gerade gehört zu ∞^1 Polardreiecken.

Da in einer involutorischen Korrelation jeder Punkt dieselbe Polare, jede Gerade denselben Pol in beiderlei Sinne hat, so sind jenem alle Punkte auf der Polare, dieser alle Strahlen durch den Pol doppelt konjugiert. Wie schon jedes Paar in dem einen Sinne polarer Elemente es auch im andern ist, so ist auch jedes Paar in dem einen Sinne konjugierter Elemente es auch im andern; der Zusatz „doppelt", der bei der allgemeinen nichtinvolutorischen ebenen Korrelation zur Bezeichnung ausgezeichneter Elemente dient, wird hier überflüssig; man spricht nur von polaren bzw. konjugierten Elementen, die aber durchweg doppelt polar, konjugiert sind. Die beiden quadratischen Verwandtschaften, die durch die ausgezeichneten Elemente entstehen, sind nicht vorhanden.

Die Projektivität konjugierter Elemente, die bei einer beliebigen ebenen Korrelation auf jeder Gerade, um jeden Punkt entsteht, wird hier, wo es sich um durchweg involutorisch konjugierte Elemente handelt, Involution.

Bei einer involutorischen Korrelation trägt jede Gerade eine Involution (doppelt) konjugierter Punkte, jeder Punkt eine Involution (doppelt) konjugierter Strahlen; während das bei der nichtinvolutorischen ebenen Korrelation nur für die Geraden durch W, die Punkte auf w gilt. Was dort für W und w gilt, gilt hier für jeden Punkt und seine Polare.

Die Involution auf einer Gerade ist die der Eckenpaare, diejenige um einen Punkt die Involution der Seitenpaare aller Polardreiecke, zu denen die Gerade, der Punkt gehört.

Sind ein Punkt P und eine Gerade p polar, dann sind die zugehörigen Involutionen perspektiv und daher gleichartig. In der Tat, es seien X und X_1 konjugiert auf p, so sind P und X_1 zu X konjugiert, also ist PX_1 die Polare von X und PX die von X_1. Daher geht jede dieser Geraden durch den Pol der andern, sie sind konjugiert; wie also X, X_1 in der Involution auf p gepaart sind, so sind es PX und PX_1 in derjenigen um P. Aber durch jeden von zwei gepaarten Punkten auf p geht die Polare des andern; was man vielleicht mit verkehrtperspektiv bezeichnen kann.

313 Die beiden Kernkurven einer solchen involutorischen Korrelation vereinigen sich. Die beiden Tangenten von einem Punkte X von K^2 an Γ_2 vereinigen sich in die eine Polare x, welche X hat, also berührt x in X den Γ_2. Die beiden Schnitte von x mit K^2 vereinigen sich in den einen Pol X; daher berührt x in X den K^2. Das bedeutet die Identität von K^2 und Γ_2. Die Schnitte dieser einzigen Kernkurve $K^2 \equiv \Gamma_2$, insofern sie K^2 ist, mit einer Gerade sind die Doppelpunkte der Involution konjugierter Punkte auf ihr, die Tangenten an sie, als Γ_2, aus einem Punkte die Doppelstrahlen der Involution konjugierter Strahlen durch ihn. Also liegen die einem Punkte in der involutorischen Korrelation konjugierten Punkte, infolge der harmonischen Eigenschaft der Kegelschnitts-Polare, auf der Polare desselben in bezug auf K^2, und die konjugierten Strahlen einer

Gerade gehen durch ihren Pol für Γ_2; d. h. die Polare eines Punktes, der Pol einer Gerade in der Korrelation ist die Polare, der Pol in bezug auf $K^2 \equiv \Gamma_2$. Jede involutorische ebene Korrelation ist Polarität in bezug auf einen Kegelschnitt, denjenigen, in welchen sich die Kernkurven vereinigt haben, also ein Polarfeld.

Auf diese spezielle Korrelation hat Poncelet, wie schon bemerkt, das Prinzip der Dualität oder Polarität begründet.

Umgekehrt, wenn die beiden Kernkurven sich vereinigen, liegt ein Polarfeld vor. Denn den Punkten dieser Kurve entspricht je nur eine Polare, die Tangente, und den Tangenten nur ein Pol, der Berührungspunkt. Aus einem beliebigen Punkte kommen zwei Tangenten; seine Polaren verbinden die einen bzw. die andern Pole dieser Tangenten; da aber diese mit jenen identisch sind, so sind es auch die beiden Verbindungslinien.

Diesen Kegelschnitt wollen wir die Basis (Ordnungskurve bei Staudt und Reye) des Polarfeldes nennen.

Wir können aber das Polarfeld unabhängig von dieser Basis de- 314
finieren, etwa durch ein Polardreieck $ABC \equiv abc$ und ein Paar polarer Elemente P, p, also als Korrelation:

$$\begin{vmatrix} A\,B\,C\,P \\ a\,b\,c\,p \end{vmatrix}.$$

Aus dieser Definition sollen nun einige in der Polarentheorie der Kegelschnitte schon erhaltene Sätze abgeleitet werden, also ohne den Basis-Kegelschnitt heranzuziehen.

Wenn in einem Polarfelde sowohl A und A', als B und B' konjugiert sind, so sind es auch $C = (AB, A'B')$ und $C' = (AB', A'B)$.

Die Polaren a, b von A, B gehen durch A', B' und ihre Schnitte A_1, B_1 mit AB sind zu A, B konjugiert, so daß AA_1, BB_1 zwei Paare der Involution konjugierter Punkte auf AB sind. Ist $C_1 = ab$, so gehen von dem Viereck $A'B'C'C_1$ zwei Paare Gegenseiten $B'C'$, $A'C_1$; $A'C'$, $B'C_1$ durch jene Paare, folglich gehen auch $A'B'$, $C'C_1$ durch ein Paar der genannten Involution; d. h. $C = (AB, A'B')$ und $(AB, C'C_1)$ sind im Polarfelde konjugiert; aber C_1 ist Pol von AB, also zu dem auf AB gelegenen C konjugiert; daher ist $C'C_1$, als Verbindungslinie der beiden zu C konjugierten Punkte C_1 und $(AB, C'C_1)$, Polare von C und infolgedessen C' zu C konjugiert.

Oder: In den projektiven Punktreihen auf AB und $A'B'$, in welchen konjugierte Punkte entsprechend sind und von denen jede perspektiv ist zu dem Büschel der Polaren der Punkte der andern, sind die beiden dem Schnittpunkt C entsprechenden Punkte ihm konjugiert, ihre Verbindungslinie also die Polare von C; aber sie ist die involutorische Axe der beiden Punktreihen und enthält daher den Punkt $(AB', A'B) = C'$, weil A und A', B und B' in jenen Reihen entsprechend sind.

Wenn also in einem Polarfelde zweimal zwei Gegenecken eines vollständigen Vierseits konjugiert sind, so sind es auch die beiden übrigen. Ein solches Vierseit heißt Polvierseit des Polarfeldes. (Hesses Satz für das Polarfeld ausgesprochen).

Die beiden ersten Gegenecken-Paare bestimmen es; weil nun ein Polarfeld ∞^3 Paare konjugierter Punkte besitzt (der eine kann beliebig gewählt werden, der andere auf einer bestimmten Gerade), so enthält das Polarfeld ∞^6 Polvierseite.

Dual: Sind in einem Polarfelde zweimal zwei Gegenseiten eines vollständigen Vierecks konjugiert, so sind es auch die dritten. Wir haben ein Polviereck des Polarfeldes.

Es seien A, B, C drei Punkte eines Polarfeldes, a, b, c ihre Polaren; die Punkte $A_1 = (BC, a)$, $B_1 = (CA, b)$ sind bzw. zu A, B konjugiert, folglich sind auch $(AB_1, BA_1) = C$, $(AB, A_1B_1) = C_1$ konjugiert; also liegt C_1 auf c oder (AB, c) liegt auf A_1B_1; d. h. die drei Punkte (BC, a), (CA, b), (AB, c) liegen in gerader Linie: ABC und abc sind perspektiv. Offenbar sind auch die Seiten von ABC zu den Ecken von abc polar; wir nennen ABC und abc polare Dreiecke des Polarfeldes.

Zwei polare Dreiecke eines Polarfeldes sind perspektiv[1]).

Man kann den Satz auch so aussprechen:

Die zu den Ecken eines Dreiecks in einem Polarfelde konjugierten Punkte je auf der Gegenseite liegen in gerader Linie.

Die den Seiten des Dreiecks konjugierten Geraden, welche je durch die Gegenecke gehen, laufen in einen Punkt zusammen.

Aber auch die Perspektivitätsaxe und die drei auf ihr gelegenen Schnittpunkte sind polar zum Perspektivitätszentrum und zu den drei durch dasselbe gehenden Verbindungslinien.

315 Es gibt zwei wesentlich verschiedene Polarfelder. Wir benutzen, wie oben, zur Festlegung ein Polardreieck $ABC \equiv abc$ und zwei polare Elemente P, p.

Auf a sind konjugiert B, C, und ferner muß die Polare des Punktes ap durch A und P gehen, also ist sie AP und der Schnitt mit a ist zu ap konjugiert. Durch diese beiden Paare von Punkten

1) Es gibt ∞^6 Paare; eine nichtinvolutorische ebene Korrelation besitzt nur ∞^5 Paare polarer Dreiecke, welche perspektiv sind.

ist die Involution der konjugierten Punkte auf a bestimmt, und perspektiv zu ihr ist die um den Pol A. Ähnlich findet man die Involutionen auf b, c, um B, C. Aus der gegenseitigen Lage je der beiden bestimmenden Paare schließen wir auf die Art der Involution.

Der Punkt P liege innerhalb des Dreiecks; infolge dessen liegen die Punkte (a, AP), (b, BP), (c, CP) oder $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ zwischen den Ecken. Dagegen können die Schnitte ap, bp, cp oder $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$ zweierlei Lage haben: entweder alle drei außerhalb der Ecken, oder nur auf einer Seite ist dies der Fall, auf den beiden andern liegen sie zwischen den Ecken (Nr. 52). Daraus folgt, daß entweder auf allen drei Seiten des Polardreiecks die Involutionen elliptisch sind oder nur auf einer, auf den beiden andern hyperbolisch.

Ist der Basiskegelschnitt reell, so tritt der zweite Fall ein, und zwar bei allen Polardreiecken. Denn wir wissen (Nr. 111), daß immer zwei Seiten eines Polardreiecks den Kegelschnitt reell schneiden, die dritte imaginär. Ferner, wenn auch nur ein reeller Punkt im Polarfelde vorhanden ist, der auf seine Polare zu liegen kommt, so haben auf allen durch ihn gehenden Geraden die Involutionen konjugierter Punkte einen, also beide Doppelpunkte reell; wir erhalten so ∞^1 reelle Punkte mit der genannten Eigenschaft, d. h. eine reelle Basis. Also, wenn auch nur ein Polardreieck vorhanden ist, von dem zwei Seiten hyperbolische Involutionen konjugierter Punkte tragen, so ist der Basiskegelschnitt reell, und alle Polardreiecke sind so beschaffen.

Wir betrachten nun ein Polardreieck ABC, dessen Seiten drei elliptische Involutionen konjugierter Punkte tragen:

$$(BC,\ \mathfrak{A}\mathfrak{A}_1), \qquad (CA,\ \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1), \qquad (AB,\ \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1);$$

wobei wie oben P im Innern und p außen liegt. Wegen der elliptischen Involution auf CA liegen $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}$ und $p = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ in verschiedenen Winkeln $\mathfrak{A}_1(A, a)$, und wegen der Lage von P im Innern fällt $\mathfrak{A}_1 P$ in den ersteren und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}$ in den Teil $A\mathfrak{A}_1 P$ desselben. Wenn nun von dem Dreieck ABC die Ecke A und die Gegenseite a festgehalten wird, die Ecken B, C also die Involution auf a durchlaufen, so beschreiben AC und PB, nach gepaarten Punkten gehend, projektive Büschel; der durch $\mathfrak{B}$ (und $\mathfrak{C}$) erzeugte Kegelschnitt geht durch A und P und berührt dort $A\mathfrak{A}_1$ und $P\mathfrak{A}_1$, der Punkt $\mathfrak{A}_1$ wird involutorisches Zentrum für die beiden erzeugenden Büschel; die Strahlen durch $\mathfrak{A}_1$ werden involutorisch geschnitten, z. B. a elliptisch-involutorisch. Der Strahl von $\mathfrak{A}_1$ nach dem $\mathfrak{B}$, von dem wir ausgingen, schneidet in $\mathfrak{B}$ diesen Kegelschnitt reell, also die Büschel hyperbolisch-involutorisch; also tun es alle Strahlen durch $\mathfrak{A}_1$ in diesem Winkel $A\mathfrak{A}_1 P$ der Tangenten; $\mathfrak{B}$ bleibt in demselben, also auch innerhalb des größeren Winkels $\mathfrak{A}_1(A, a)$, der ihn umfaßt, in welchem aber p nicht enthalten ist; folglich bleibt die elliptische Lage von $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}$ und p zu $\mathfrak{A}_1 A$ und a, demnach auch die elliptische Lage von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ zu A und C. Die veränderlichen Seiten AC und AB tragen immerfort elliptische Involutionen. Mithin bleibt die Elliptizität der Involutionen auch bestehen, wenn nun auch die bisher festgehaltenen Elemente A und a verändert werden.

Wenn also ein Polardreieck auf seinen drei Seiten elliptische Involutionen trägt, so tun es alle.

Daraus folgt dann, was wir schon erhalten haben, daß, wenn eins eine elliptische und zwei hyperbolische Involutionen trägt, dies ebenfalls für alle gilt.

In einem Polarfelde sind alle Polardreiecke gleicher Art: entweder tragen in allen die Seiten und Ecken elliptische Involutionen konjugierter Elemente oder nur eine Seite und ihre Gegenecke tragen solche, die anderen hyperbolische. In jenem Falle ist der Basiskegelschnitt imaginär, und durch das Polarfeld ist er dargestellt, dieses Polarfeld ist sein reeller Repräsentant. Imaginär sind von ihm nur die Punkte und Tangenten; reell ist zu jedem (reellen) Elemente sein polares, der Mittelpunkt, als Pol der unendlich fernen Gerade, die Durchmesser als Strahlen durch ihn, die Involution konjugierter Durchmesser als die dem Mittelpunkte zugehörige Involution konjugierter Strahlen, und das rechtwinklige Paar darin, die Axen, reell auch die analytische Gleichung. Wegen dieser Realität des darstellenden Polarfeldes (und der Gleichung) ist es richtiger, nicht bloß imaginär, sondern reell-imaginär zu sagen.[1])

Im andern Falle, wo die Basiskurve reell ist, kann sie eben jeder der drei Kegelschnitte sein. Deshalb schon nehme ich Anstand, die Namen elliptisch und hyperbolisch für die beiden Fälle des Polarfeldes mit reell-imaginärer, bzw. reeller Basis, welche in den Steiner-Schröterschen Vorlesungen eingeführt sind, anzuwenden; und später, bei der Betrachtung des Polarraumes, werden sie sich als ganz ungeeignet erweisen.

Wir müssen uns begnügen, Polarfeld mit reell-imaginärer, reeller Basis zu sagen.

Man erhält nach Obigem ein Polarfeld der einen oder andern Art, wenn ein Polardreieck gegeben und einem innern Punkte desselben eine Polare zugeordnet wird, die alle drei Seiten auf den Verlängerungen schneidet oder nur eine.

---

1) Dies Wort anzuwenden, habe ich in meinen Flächen 3. Ordnung, S. 283 vorgeschlagen.

Bei zwei allgemeinen korrelativen Feldern haben wir die 316
Punkte R, Q', welche je zu der unendlich fernen Gerade des andern Feldes polar sind, schon als Mittelpunkte der Felder eingeführt (Nr. 283); wir nennen, die Terminologie der Kegelschnitte weiter verallgemeinernd, die Geraden durch R, Q', welchen also im andern Felde unendlich ferne Pole zugehören, die Durchmesser der korrelativen Felder. Zwei Durchmesser, der eine durch R, der andere durch Q', sind konjugiert, wenn einer und dann jeder von ihnen durch den Pol des andern geht. Die beiden Durchmesser-Büschel sind projektiv mit konjugierten Durchmessern als entsprechenden. Die Schenkel s, t; s', t' der entsprechenden rechten Winkel können wir dann wiederum die Axen der korrelativen Felder nennen.

Legt man sie verkehrt aufeinander, d. h. so, daß s' auf t, t' auf s fällt — was auf vier Weisen möglich ist —, so hat man für die ineinandergelegten Felder ein Polardreieck erhalten: R hat die unendlich ferne Gerade, die unendlich fernen Punkte von s, t haben s', t' zu Polaren; es ist also ein Polarfeld entstanden, und $s \equiv t'$, $t \equiv s'$ sind seine Axen.

Zwei korrelative Felder (mit endlichen Mittelpunkten) kann man stets so ineinander legen, daß sie involutorisch werden und ein Polarfeld bilden[1]).

Für das Polarfeld mögen nun noch die Grundzüge der Theorie 317
der Brennpunkte gegeben werden. Als Brennpunkt eines Polarfeldes (oder Kegelschnitts) definieren wir einen Punkt, dessen Involution konjugierter Strahlen rechtwinklig ist. Beim reellen Kegelschnitte muß er ein innerer Punkt sein. Zu dem Durchmesser, der durch einen Punkt geht, ist die Gerade nach seinem unendlich fernen Pole, also die Parallele zum konjugierten Durchmesser konjugiert. Folglich können die Brennpunkte nur auf den Axen zu finden sein, den zueinander rechtwinkligen konjugierten Durchmessern.

Es sei a eine von den beiden Axen. Durch einen Punkt Q auf ihr sei eine beliebige Gerade p_0 gezogen und aus ihrem Pole P_0 das Lot p_0' auf sie gefällt, also die rechtwinklige und konjugierte Gerade; ihr Schnitt mit a sei Q'. Die Büschel um diese Punkte Q, Q' sind projektiv mit konjugierten Strahlen als entsprechenden. Dem gemeinsamen Strahle a sind die Senkrechten konjugiert, die nach dem unendlich fernen Punkte der andern Axe b, dem Pole von a, gehen. Folglich wird dieser das involutorische Zentrum der beiden Büschel. Die unendlich ferne Gerade schneidet sie also in involutorischen Punktreihen; in dieser Involution bilden die unendlich fernen Punkte von a und b ein Paar, sowie die von p_0 und p_0'; also ist sie die absolute Involution. Daher ist zu jedem Strahl des einen Büschels der kon-

1) Schröter, Oberflächen 2. Ordnung, § 49.

jugierte im andern rechtwinklig. Zu welchem Strahle durch Q (oder Q') auch der rechtwinklige und konjugierte Strahl konstruiert wird; der Schnitt mit a ist ein fester Punkt Q' (oder Q).

Die beiden Punkte Q und Q' bestimmen eindeutig und gleichartig jeder den andern; d. h. sie beschreiben auf a eine Involution, und ebenso tun es entsprechend konstruierte Punkte R und R' auf der andern Axe b. Hier sehen wir übrigens diese Involution unmittelbar entstehen. Denn die beweglichen Punkte R und R' werden eingeschnitten durch entsprechende Strahlen p und p' der vorherigen Büschel Q und Q', welche ja rechtwinklig und konjugiert sind; und die eingeschnittenen Punktreihen sind involutorisch, weil auch b durch das involutorische Zentrum von Q und Q' geht. Der Mittelpunkt und der unendlich ferne Punkt erweisen sich sofort als gepaart.

Somit trägt jede der beiden Axen eine ausgezeichnete Involution — Fokalinvolution — von der Beschaffenheit, daß beliebige rechtwinklige und konjugierte Geraden stets die Axe in gepaarten Punkten dieser Involution schneiden. Für beide ist der Mittelpunkt Zentralpunkt.

Ist F etwa ein Doppelpunkt der Involution auf a, so geht, weil in ihm Q und Q' sich vereinigen, zu jedem seiner Strahlen der rechtwinklige und konjugierte Strahl auch durch ihn; seine Involution konjugierter Strahlen wird dadurch rechtwinklig, er ist Brennpunkt; und umgekehrt, ein auf a gelegener Brennpunkt muß Doppelpunkt der Fokalinvolution sein.

So erhalten wir auf jeder der beiden Axen zwei Brennpunkte, die Doppelpunkte der Fokalinvolution.

Zwei konjugierte Strahlen durch gepaarte Punkte Q, Q' auf a sind rechtwinklig, gehen also durch gepaarte Punkte der absoluten Involution, aber auch durch gepaarte Punkte R und R' der Fokalinvolution auf b. Daraus erhellt, daß die beiden Fokalinvolutionen und die absolute Involution verbundene Involutionen sind (Nr. 82); und da letztere elliptisch ist, so muß eine der Fokalinvolutionen elliptisch, die andere hyperbolisch sein. Also sind nur zwei von den Brennpunkten reell; die Axe, auf welcher sie liegen, wird dann Hauptaxe, die andere Nebenaxe genannt. Ist $2c$ die Entfernung der reellen Brennpunkte, die sogenannte Exzentrizität, so ist c^2 die Potenz der hyperbolischen Fokalinvolution; die Potenz der andern ist dann $-c^2$ (Nr. 82).

Auf a und b haben wir andererseits je eine Involution konjugierter Punkte, für welche der Mittelpunkt ebenfalls Zentralpunkt ist; ihre Potenzen seien P_a, P_b, die Halbaxen-Quadrate der Basis. Wenn p und p' wiederum rechtwinklig und konjugiert sind, Q und Q' ihre Schnitte mit der Hauptaxe a, R, R' die mit der Nebenaxe b, so ist:

$$MQ \cdot MQ' = c^2 = -MR \cdot MR'.$$

Der Pol P von p liegt auf p'; die Lote PS und PT auf a, b sind die Polaren von Q und R, daher S und T zu diesen Punkten bzw. konjugiert, so daß:

$$P_a = MQ \cdot MS, \quad P_b = MR \cdot MT.$$

Ferner ist (auch dem Vorzeichen nach):

$$\frac{MR'}{MQ'} = \frac{TR'}{TP} = \frac{TR'}{MS} = \frac{MR' - MT}{MS};$$

also:

$$-\frac{MQ}{MR} = \frac{MR' - MT}{MS}$$

oder:

$$MQ \cdot MS - MR \cdot MT = -MR \cdot MR';$$

demnach:

$$P_a - P_b = c^2.$$

Die reellen Brennpunkte liegen auf der Axe mit der algebraisch größeren Potenz der Involution konjugierter Punkte, dem algebraisch größeren Halbaxen-Quadrate. Bei der Ellipse haben wir: $P_a > P_b > 0$, bei der Hyperbel $P_a > 0 > P_b$, bei dem reell-imaginären Kegelschnitte $0 > P_a > P_b$, so daß, wenn im ersten Falle die Halbaxen-Quadrate a^2, b^2, im dritten $-a^2$, $-b^2$ sind, dort $a > b$, hier $a < b$ ist.

Die beiden Axen und die reellen Brennpunkte auf der einen bestimmen beide Involutionen und die andern Brennpunkte; die isotropen Doppelstrahlen der rechtwinkligen Involutionen um jene schneiden diese ein, und wir erhalten ein imaginäres Vierseit von Tangenten, dessen Gegenecken-Paare durch die einen und die andern Brennpunkte und die absoluten Punkte gebildet werden[1]. Diese vier Tangenten oder die beiden rechtwinkligen Involutionen als Involutionen konjugierter Strahlen führen zu einer Schar von Kegelschnitten mit gemeinsamen Brennpunkten, konfokalen Kegelschnitten; hat einer die Halbaxen-Quadrate a, b, $a > b$, so sind die der andern $a - \lambda$, $b - \lambda$, und die Schar zerfällt in Ellipsen: $\lambda < b$, Hyperbeln: $a > \lambda > b$, und reell-imaginäre Kurven: $\lambda > a$. Durch jeden Punkt gehen zwei reelle ungleichartige, die sich rechtwinklig schneiden. Das rechtwinklige Paar kon-

1) Brennpunkte einer ebenen Kurve sind, nach der Verallgemeinerung von Plücker, die Schnittpunkte der Tangenten aus dem einen absoluten Punkte mit denen aus dem andern. Eine Kurve n^{ter} Klasse hat also n^2 Brennpunkte, darunter n reelle.

jugierter Strahlen durch ihn, allen Kurven der Schar gemeinsam, (die Halbierungsstrahlen der Winkel der Strahlen nach den Brennpunkten) sind Tangente und Normale für beide; die Tangente der Ellipse hat die Brennpunkte auf derselben, die der Hyperbel auf verschiedenen Seiten. Gleichartige konfokale Kegelschnitte schneiden sich nicht reell; einer umschließt den andern. Ungleichartige können von keiner Gerade zugleich imaginär geschnitten werden[1]).

Durch die beiden Halbaxen-Quadrate P_a, P_b lassen sich die beiden (reziproken) Potenzen der Involution konjugierter Durchmesser ausdrücken.

Es seien wieder Q und S konjugierte Punkte auf a, q die Polare von Q, also die Parallele durch S zu b; wir schneiden sie mit den konjugierten Durchmessern d und d' in E und E'; die Polare e von E geht dann durch Q parallel zu d'; schneidet sie die Axe b in R, so ist dazu die Parallele durch E zu a polar und ihr Schnitt T mit b zu R konjugiert, so daß wie oben:

$$MQ \cdot MS = P_a, \quad MR \cdot MT = P_b.$$

Die Potenz p_d der Involution der konjugierten Durchmesser, in Tangenten geschrieben und auf den Zentralstrahl a bezogen, ist:

$$p_d = \frac{SE \cdot SE'}{MS^2} = \frac{MT \cdot MR}{MS \cdot QM} = -\frac{P_b}{P_a};$$

denn

$$MT = SE \quad \text{und} \quad \frac{SE'}{MS} = \frac{MR}{QM}. \text{ —}$$

Ist das Zentrum einer Homologie Brennpunkt eines Kegelschnitts (oder Mittelpunkt eines Kreises), so ist es auch Brennpunkt des entsprechenden Kegelschnitts. So kann man durch Homologie Fokaleigenschaften eines Kegelschnittes aus Eigenschaften des Kreises ableiten.

318 Die Kernkurven einer allgemeinen ebenen Korrelation können imaginär sein; wir stellen ihre Polarfelder her, um in diesem Falle die reellen Repräsentanten zu haben.

Wir schneiden wiederum die beiden Polaren x', y eines Punktes $\mathfrak{Z} \equiv X \equiv Y'$ im doppelt konjugierten Punkte $\mathfrak{Z}_1$ und ziehen durch diesen den Strahl $\mathfrak{z}$, welcher durch x', y vom Strahle $\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z} W$ harmonisch getrennt wird. Damit ist jedem Punkte $\mathfrak{Z}$ eindeutig diese Gerade $\mathfrak{z}$ zugeordnet, auch einem Punkte der Punkt-Kernkurve, obwohl mit ihm $\mathfrak{Z}_1$ zusammenfällt, aber die Gerade $\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}$ ist ja durch W bestimmt. Nur U, V machen eine Ausnahme, weil z. B. für U jeder

1) Wegen der weiteren Brennpunkts-Eigenschaften vgl. man Steiner-Schröters Vorlesungen, § 35 und 60; oder Reye, Geometrie der Lage, I. Abt., 4. Aufl., 13. und 14. Vortrag und Anhang, Nr. 135ff.

Punkt von u zugehöriger Punkt $\mathfrak{Z}_1$ ist und die drei Strahlen $x', y, \mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}$ in u zusammenfallen, so daß zunächst dem Punkte U und ebenso dem V jede Gerade der Ebene zugeordnet wird. In Wirklichkeit besteht auch hier keine Unbestimmtheit; wenn wir uns vorderhand nur an den allgemeinen Fall halten und da die Zuordnung der Elemente $\mathfrak{Z}, \mathfrak{z}$ als Polarfeld erkennen werden, so wird dieses dann den U, V auch bestimmte Geraden zuweisen.

Dem Punkt W wird, obwohl $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}_1$ jeder Strahl durch ihn sein kann, doch eindeutig die w, in der sich x', y vereinigen, als $\mathfrak{z}$ zugeordnet.

Wir fragen jetzt, wie viele (von U, V verschiedene) $\mathfrak{Z}$ gibt es zu einer gegebenen Gerade $\mathfrak{z}$, für welche sie die einzige zugeordnete Gerade ist?

Wenn von zwei doppelt konjugierten Punkten $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}_1$ der eine eine Gerade durchläuft, so beschreibt der andere einen Kegelschnitt, der durch U, V, W und die Pole der Gerade geht; denn durch projektive Büschel um sie wird er erzeugt (Nr. 307).

Die Gerade $\mathfrak{z} \equiv s \equiv t'$ sei gegeben und erfüllt von Punkten $\mathfrak{Z}_1$; die zugehörigen $\mathfrak{Z}$ erzeugen den Kegelschnitt $\mathfrak{Z}^2 = (UVWS'T)$. Aus jedem der $\mathfrak{Z}_1$ ziehen wir die Polaren x', y des $\mathfrak{Z}$ und wollen wissen, wie oft der vierte harmonische Strahl zu $x', y; \mathfrak{Z}_1 W$ mit $\mathfrak{z}$ zusammenfällt, oder wie oft der vierte harmonische Strahl zu $x', y; \mathfrak{z}$ durch W geht. Die Polare x' umhüllt den Kegelschnitt (x'), der im zweiten Felde dem $\mathfrak{Z}^2$ durch die Korrelation entspricht, also die $u, v, w, \mathfrak{z}$ berührt; der von y umhüllte Kegelschnitt (y) tut es ebenfalls. Also lautet die Frage: wie oft geht, während $\mathfrak{Z}_1$ auf der gemeinsamen Tangente $\mathfrak{z}$ sich bewegt, der vierte harmonische Strahl, der dieser Tangente je in bezug auf die beiden zweiten Tangenten x', y aus $\mathfrak{Z}_1$ auf $\mathfrak{z}$ zugeordnet ist, durch W? Nach dem dualen Satze zu dem am Schluße von Nr. 295 erhaltenen Satze geschieht es dreimal. Wir haben also drei solche Punkte $\mathfrak{Z}_1$ auf $\mathfrak{z}$, bei denen $\mathfrak{z}$ der vierte harmonische zu $x', y; \mathfrak{Z}_1 W$ ist; aber zwei von ihnen sind die Punkte $\mathfrak{z}u, \mathfrak{z}v$, denen als $\mathfrak{Z}$ die Punkte U, V zugehören, für welche $\mathfrak{z}$ nicht die einzige zugeordnete Gerade ist. Nur der dritte Punkt führt zu einem solchen $\mathfrak{Z}$.

Die Zuordnung $(\mathfrak{Z}, \mathfrak{z})$ ist also in beiderlei Sinne eindeutig.

Nunmehr laufe $\mathfrak{Z}$ auf der Gerade $\mathfrak{r} \equiv l \equiv m'$; der Kegelschnitt $\mathfrak{R}^2$ des zugehörigen $\mathfrak{Z}_1$ geht durch U, V, W, L', M. Die drei Strahlen $x', y, \mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}$ gehen von den Punkten $\mathfrak{Z}_1$ dieses Kegelschnitts nach drei festen Punkten L', M, W desselben; folglich tut es auch der vierte Strahl $\mathfrak{z}$. Dieser Büschelscheitel $\mathfrak{R}$, der vierte harmonische Punkt in der krummen Punktreihe zu $L', M; W$, entspricht im Felde $(\mathfrak{z})$ der $\mathfrak{z}$ der Gerade $\mathfrak{r}$, insofern sie zum Felde $(\mathfrak{Z})$ der $\mathfrak{Z}$ geht. Daß die Punktreihe $\mathfrak{r}$ und der Büschel $\mathfrak{R}$ projektiv sind, ist leicht zu erkennen.

Die Zuordnung $(\mathfrak{Z}, \mathfrak{z})$ ist Korrelation.

Die Gerade $\mathfrak{r}$ und der Punkt $\mathfrak{R}$ sind beliebig entsprechende Elemente derselben in $(\mathfrak{Z})$ und $(\mathfrak{z})$. Läßt sich nun zeigen, daß $\mathfrak{r}$ aus $\mathfrak{R}$ ebenso sich ergibt, wie $\mathfrak{z}$ aus $\mathfrak{Z}$, also $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{R}$ auch entsprechend sind in $(\mathfrak{z})$ und $(\mathfrak{Z})$, so ist die Korrelation involutorisch und Polarfeld.

Wenn $\mathfrak{Z}$ wie oben ein Punkt von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{z}$ die entsprechende Gerade ist, die dann durch $\mathfrak{R}$ geht, so sei auf diese der beliebige Punkt $\mathfrak{G} \equiv H \equiv I'$ gelegt; die zugehörige Gerade $\mathfrak{g}$ muß durch $\mathfrak{Z}$ gehen.

In der Tat, wenn $\mathfrak{Z}\mathfrak{G}$ mit x', y, h', i in X_1', Y_1, H_1', I_1 geschnitten wird, welche bzw. zu X, Y', H, I' in der gegebenen Korrelation konjugiert sind, so ist:

$$XHY_1I_1 \barwedge X_1'H_1'Y'I',$$

oder

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{G}Y_1I_1 \barwedge X_1'H_1'\mathfrak{Z}\mathfrak{G} \barwedge \mathfrak{G}\mathfrak{Z}H_1'X_1';$$

demnach sind $\mathfrak{Z}\mathfrak{G}$, Y_1H_1', I_1X_1' in Involution und:

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{G}Y_1X_1' \barwedge \mathfrak{G}\mathfrak{Z}H_1'I_1.$$

Der linke Wurf, perspektiv zu $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{Z}, \mathfrak{z}, y, x')$, ist harmonisch; also ist auch der rechte harmonisch und der ebenfalls harmonische Wurf $\mathfrak{G}_1(\mathfrak{G}, \mathfrak{g}, h', i)$ steht über ihm und $\mathfrak{g}$ geht durch $\mathfrak{Z}$.

Was für $\mathfrak{G}$ gilt, gilt auch für $\mathfrak{R}$, dessen zugeordnete Gerade zunächst $\bar{\mathfrak{r}}$ heiße. Sie geht also durch $\mathfrak{Z}$; der $\mathfrak{R}_1$, durch den $\bar{\mathfrak{r}}$ auch gehen muß, liegt auf $\mathfrak{r}$, weil $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{R}^2$; also hat $\bar{\mathfrak{r}}$ mit $\mathfrak{r}$ die Punkte $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{R}_1$ gemein und ist mit ihr identisch.

Die Punkte $\mathfrak{Z}$ auf K^2, je mit $\mathfrak{Z}_1$ identisch, fallen auf die zugehörige $\mathfrak{z}$, also gehören sie der Basiskurve an, als der Punkt-Kernkurve des Polarfeldes; K^2 ist daher diese Basiskurve und die zugehörige Gerade $\mathfrak{z}$ ist je die Tangente von K^2, die also immer zu dem Strahle nach W harmonisch ist in bezug auf die beiden Polaren oder Tangenten an die andere Kernkurve.

Und nun erhalten auch U, V ihre eindeutig zugeordneten Geraden in den Tangenten u, v.

Für das Polarfeld (K^2) der Punkt-Kernkurve erhält man also zu einem beliebigen Punkte $\mathfrak{Z}$ die Polare $\mathfrak{z}$ in dem Strahle, welcher durch die beiden Polaren x', y von $\mathfrak{Z}$ von diesem Punkte harmonisch getrennt wird; und wir können beliebig viele Paare entsprechender Elemente konstruieren.

Für das Polarfeld (Γ_2) der Geraden-Kernkurve ist zu einer Gerade polar der Punkt, der von ihr durch die beiden Pole harmonisch getrennt ist[1]).

1) Schröter, Journ. f. Math., Bd. 77, S. 105, Oberflächen 2. Ordnung, § 50.

Die Konstruktion ist analog zu derjenigen von Nr. 75.

Leiten wir die doppelte Berührung der beiden Kernkurven aus den Polarfeldern ab. Die Gerade w und ihr involutorischer Pol W ergeben sich als Verbindungslinie zweier Schnittpunkte doppelt konjugierter Geraden, als Schnittpunkt zweier Verbindungslinien doppelt konjugierter Punkte; $\mathfrak{Z}$ sei ein Punkt von w; $\mathfrak{Z}_1$ fällt in W, so daß $\mathfrak{z}$, die Polare von $\mathfrak{Z}$ in (K^2), durch W geht; $\mathfrak{Z}^*$ sei ihr Schnitt mit w, also dem $\mathfrak{Z}$ in (K^2) konjugiert. Die beiden Pole von $\mathfrak{z}^* = W\mathfrak{Z}$ müssen auf w und bzw. auf den Polaren x', y von $\mathfrak{Z}$ liegen, sind also deren Schnitte X'^*, Y^* mit w; also ist der durch sie von $\mathfrak{z}^*$ getrennte harmonische Punkt, der Pol von $\mathfrak{z}^*$ in (Γ_2), der $\mathfrak{Z}^*$ und $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}^*$ sind auch in (Γ_2) konjugiert. Folglich haben (K^2) und (Γ_2) dieselbe Involution konjugierter Punkte auf w, und da W und w in beiden polar sind, auch dieselbe Involution konjugierter Strahlen um W, perspektiv zu jener. Die beiden Kegelschnitte K^2 und Γ_2 berühren sich in den Doppelpunkten der ersteren mit den Doppelstrahlen der letzteren als Tangenten. Je nach dem jene gemeinsamen Involutionen konjugierter Elemente hyperbolisch oder elliptisch sind, ist diese doppelte Berührung reell oder imaginär. Im letzteren Falle haben wir in den Involutionen die reellen Repräsentanten der imaginären Elemente $U, V; u, v$.

Von dem beliebigen Punkte $\mathfrak{Z} \equiv X \equiv Y'$ sei l nach dem einen Schnitte R' von K^2 mit der einen Polare x' gezogen; die Projektivität konjugierter Punkte auf ihr artet aus und zwar so, daß dem R' alle Punkte von l konjugiert sind; denn seine Polare r muß durch ihn, als Punkt von K^2, und durch $\mathfrak{Z} \equiv X$ gehen, also mit l zusammenfallen. Der zweite Schnitt Q von l mit K^2, als zweiter Koinzidenzpunkt, ist der andere singuläre Punkt und hat, als Punkt des ersten Feldes, die l zur Polare im zweiten; weil l durch Y' geht, liegt Q auf y; l geht also auch durch einen der Schnitte der andern Polare von $\mathfrak{Z}$ mit K^2. Da l ihre beiden Pole enthält, ist sie Tangente von Γ_2, und für die Tangenten von Γ_2 wissen wir schon (Nr. 306), daß sie ausgeartete Projektivitäten konjugierter Punkte tragen. Die beiden zweiten Schnitte von x', y mit K^2 liegen ebenfalls auf einer Gerade durch $\mathfrak{Z}$.

Die Schnitte der beiden Polaren x', y von $\mathfrak{Z}$ mit K^2 liegen auf den beiden Tangenten aus $\mathfrak{Z}$ an Γ_2; diese Geraden tragen ausgeartete Projektivitäten konjugierter Punkte, in denen je die genannten Schnitte singulär sind.

Auch hieraus folgt, daß die Polare von $\mathfrak{Z}$ nach K^2 durch den Schnittpunkt $x'y$ geht und von $\mathfrak{Z}$ durch x' und y harmonisch getrennt wird.

Nur wird hierbei eventuell mit imaginären Elementen gearbeitet.

§ 49. Herstellung und Beispiele von Polarfeldern.

319 Wenn auf zwei Seiten $p = QR$, $q = PR$ eines Polardreiecks eines Polarfeldes Y und $\overline{Y}$, Z und $\overline{Z}$ in den Involutionen konjugierter Punkte gepaart sind, so sind die Gerade $\overline{Y}\,\overline{Z}$ und der Schnittpunkt (PY, QZ) polar oder, wenn wir mit $y, \overline{y}$; $z, \overline{z}$ die über ihnen stehenden Paare der Involutionen konjugierter Strahlen um die Gegenecken P, Q bezeichnen, die Gerade $(p\overline{y}, q\overline{z})$ und der Punkt yz. Daraus ergibt sich folgende Herstellungsweise eines Polarfeldes[1]).

Auf zwei Geraden p, q seien Involutionen (p), (q) gegeben; dem gemeinsamen Punkt R seien Q, P gepaart und r deren Verbindungslinie, so daß in den perspektiven Involutionen (P), (Q) die r, q; r, p je ein Paar bilden. Wir ordnen X und x' einander zu, wenn x' in $\overline{Y}, \overline{Z}$ trifft und diesen Punkten die Schnitte Y, Z von PX, QX in (p), (q) gepaart sind oder wenn in X sich y, z schneiden und diesen in (P), (Q) die Strahlen $\overline{y}, \overline{z}$ nach den Schnitten $x'p$, $x'q$ gepaart sind. Die Zuordnung ist in beiderlei Sinne eindeutig.

u' sei eine beliebige Gerade, A, B ihre Schnitte mit p, q, also $U = (P\overline{A}, Q\overline{B})$ der ihr zugeordnete Punkt; wir fassen jene als Gerade t des ersten Feldes auf, auf welcher sich X bewegt; zu ihm perspektiv bewegen sich Y und Z, zu diesen $\overline{Y}, \overline{Z}$ involutorisch, also zueinander projektiv. Kommt X nach tr, so fallen Y, Z nach Q, P, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ beide nach R, folglich befinden sich die Punktreihen der $\overline{Y}, \overline{Z}$ in perspektiver Lage und $x' = \overline{Y}\,\overline{Z}$ beschreibt den Strahlenbüschel um das Zentrum T'. Damit ist die Beziehung als Korrelation erkannt.

Die beiden Punkte A, B von t liefern am schnellsten das Zentrum T'. Die zu A gehörigen $Y, Z, \overline{Y}, \overline{Z}$ sind $A, R, \overline{A}, P$, also ist $P\overline{A}$ die zugehörige Gerade und $Q\overline{B}$ die zu B gehörige, folglich T' der Schnitt $(P\overline{A}, Q\overline{B})$ und T' identisch mit U. Die Elemente $U \equiv T'$ und $u' \equiv t$ entsprechen sich also in beiderlei Sinne, und die Korrelation ist involutorisch: ein Polarfeld.

Zu A gehört, wie eben gefunden, $P\overline{A}$ als Polare, also sind $A, \overline{A}$ konjugiert im Polarfelde; ferner haben P, Q, R die Gegenseiten p, q, r zu Polaren; also wird PQR ein Polardreieck, p, q konjugiert und die gegebenen Involutionen sind solche konjugierter Punkte.

Ein Polarfeld ist vollständig und eindeutig bestimmt durch zwei Involutionen konjugierter Elemente auf konjugierten Trägern.

---

1) Steiner-Schröters Vorlesungen, 3. Aufl., Nr. 292.

Für einen Punkt X auf r (oder einen Strahl durch R) wird die Konstruktion zunächst unbestimmt, weil die beiden die Polare bestimmenden Punkte sich vereinigen; aber eine Gerade durch ihn liefert in ihrem Pol einen zweiten Punkt für sie.

Die Involution (r) konjugierter Punkte auf r ist (Nr. 82) den Involutionen (p), (q) nicht verbunden; vielmehr laufen die Verbindungslinien, mit den Gegenecken, der gepaarten Punkte $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ zu den drei Schnitten A, B, C einer Gerade mit p, q, r in einen Punkt zusammen, den Pol der Gerade.

Ist (r_1) die Involution auf r, welche den (p), (q) verbunden ist, und C_1 in ihr dem C gepaart, also in gerader Linie mit $\bar{A}, \bar{B}$ gelegen, so sind diese beiden dem C in (r) und (r_1) gepaarten Punkte $\bar{C}$ und C_1 harmonisch in bezug auf P, Q (Nr. 52); ebenso, wenn $\bar{C}_1$ in (r_1) dem $\bar{C}$ gepaart ist, C und $\bar{C}_1$. Folglich bilden $C, \bar{C}_1$; $\bar{C}, C_1$ zwei Paare der Involution (P, Q) mit P, Q als Doppelpunkten. Weil aber PQ ein Paar sowohl von (r), als von (r_1) ist, stützen sie sich beide auf (P, Q) (Nr. 85). Das Paar $C\bar{C}$ von (r) geht durch (P, Q) in $\bar{C}_1 C_1$ über, das also ebenfalls ein Paar von (r) ist; andererseits geht jenes in dieses auch durch (r_1) über, so daß auch (r) und (r_1) einander stützen.

Die Involution konjugierter Punkte (r) auf r, diejenige (r_1), die den beiden Involutionen konjugierter Punkte (p), (q) verbunden ist, und die Involution mit den Doppelpunkten P, Q bilden ein Tripel sich gegenseitig stützender Involutionen.

An diese Bestimmung des Polarfeldes durch zwei Involutionen kon- 320
jugierter Elemente auf konjugierten Trägern, bei welcher leicht polare Elemente hergestellt werden können, hat Schröter[1]) eine Reihe anderer Bestimmungen angeschlossen. Endziel ist ihm die Bestimmung des Polarfeldes durch fünf Paare konjugierter Punkte; er liefert für diese die lineare Konstruktion der Polare irgend eines Punktes, jedoch in sehr umständlicher Weise. Wir werden später diese Aufgabe in anderer Weise behandeln. Hier sollen einige einfachere Bestimmungen auf die oben genannte zurückgeführt werden.

1. Es sei das Polarfeld durch ein Polardreieck ABC und die Involution konjugierter Strahlen um P (oder die Involution konjugierter Punkte auf einer Gerade) gegeben.

Man schneidet BC, AC mit den Strahlen PA, PB in $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und mit den zu ihnen in der Involution gepaarten Strahlen in $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$, den Polen von PA, PB, so hat man auf den konjugierten Geraden BC, AC die Involutionen konjugierter Punkte B, C; $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$, bzw. A, C; $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$.

1) Steiner-Schröters Vorlesungen, § 58.

2. Es seien das Polardreieck ABC und zwei polare Elemente P, p gegeben.

Auf BC sind konjugiert B, C nnd die Schnitte mit p und PA, auf AC die A, C und die Schnitte mit p und PB.

3. Zweimal sind Pol und Polare: P, p; Q, q und einmal zwei konjugierte Punkte A, A' (oder Geraden) gegeben.

Es sind dann auch $R = pq$ und $r = PQ$ polar. Schneidet man r mit p, q in P_1, Q_1, so sind RPP_1, RQQ_1 Polardreiecke; auf r hat man die Involution konjugierter Punkte (PP_1, QQ_1), und ebenso, perspektiv dazu, die Involution konjugierter Strahlen um R. Jetzt erst greifen A, A' ein; schneidet man AA' mit r in S und ist S' der S in der Involution auf r gepaarte Punkt, so ist RS' die Polare von S und der Schnitt mit AA' konjugiert zu S, so daß wir auf AA' die Involution konjugierter Punkte haben und außerdem ein Polardreieck wie in 1.

Nehmen wir aber an, es seien nur zwei Involutionen (p), (q) konjugierter Punkte gegeben, ohne daß p und q konjugiert sind, so ist das Polarfeld noch nicht bestimmt.

Es werde die den (p), (q) verbundene Involution $(\bar{r})$ konstruiert, deren Träger r die dem Schnittpunkte $R = pq$ gepaarten Punkte Q, P in (p), (q) verbindet; (r) sei irgend eine der auf $(\bar{r})$ sich stützenden Involutionen. Weil in allen Polarfeldern, zu denen (p), (q) gehören, R und r polar sind, so ist r zu p und q konjugiert. Wir stellen daher aus den auf konjugierten Trägern p, r gelegenen Involutionen (p), (r) das Polarfeld her; so ist zu beweisen, daß (q) zu ihm gehört. X sei ein Punkt von q; wir konstruieren seine Polare x in dem Polarfelde. Wenn P' dem Q in (r) gepaart ist, so haben wir X aus P' und R auf p und r zu projizieren; die letztere Projektion ist P, die andere sei Y; wenn ferner Q' dem P in (r) und Y' dem Y in (p) gepaart ist, so ist $Q'Y'$ die Polare x von X und ihr Schnitt X' mit q zu X konjugiert. Den beiden in $(\bar{r})$ gepaarten Punkten P, Q sind in (r) bzw. Q', P' gepaart; folglich bilden diese, weil (r) und $(\bar{r})$ sich stützen (Nr. 85), ein Paar in $(\bar{r})$. Dann müssen, nach der Eigenschaft verbundener Involutionen, die beiden Geraden $P'Y$ und $Q'Y'$, welche ein Paar von $(\bar{r})$ mit einem von (p) verbinden, in q ein Paar der (q) einschneiden, d. h. X' ist dem X in dieser Involution (q) gepaart. Jede zwei gepaarte Punkte der (q) sind konjugiert im Polarfelde. Und umgekehrt, wenn das der Fall sein soll, so müssen Q', P', welche den in $(\bar{r})$ gepaarten P, Q in (r) gepaart sind, ein Paar in $(\bar{r})$ bilden; d. h. (r) muß sich auf $(\bar{r})$ stützen. So führen die ∞^1 Involutionen, welche sich auf die Involution stützen, die den (p), (q) verbunden ist, zu den ∞^1 Polarfeldern, zu welchen (p) und (q) gehören.

Diese Polarfelder gehören zu den Kegelschnitten durch die vier Doppelpunkte der Involutionen auf (p) und (q).

Bei dieser Herstellung des Kegelschnitt-Büschels wird die Heranziehung von Punkten der Kegelschnitte vermieden (vgl. Nr. 124).

Aus 2. ergibt sich die Umkehrung eines Satzes in Nr. 118:

Zwei demselben Kegelschnitte K eingeschriebene Dreiecke ABC, DEF sind Polardreiecke eines Polarfeldes. Wir bestimmen dasselbe durch das Polardreieck ABC und D und EF als Pol und Polare, und vervollständigen in ihm D, E zum Polardreiecke; die dritte Ecke F' muß auf EF liegen und nach Nr. 118 befinden sich ABC, DEF' auf einem Kegelschnitte, also auf dem durch $A, \ldots E$ bestimmten K, und F' ist der zweite Schnitt desselben mit EF, demnach mit F identisch.

Ebenso sind zwei demselben Kegelschnitt umgeschriebene Dreiecke zugleich Polardreiecke in einem Polarfelde.

Nun ergibt sich der Satz am Ende von Nr. 118 auf andere Weise. Die beiden demselben Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecke ABC, DEF sind Polardreiecke eines Polarfeldes, und als solche (Nr. 118) demselben Kegelschnitt umgeschrieben.

Ferner möge die Herstellungsweise eines Polarfeldes in Nr. 319 321
benutzt werden, um für den sogenannten *Kegelschnitt der 14 Punkte*[1]) das Polarfeld zu konstruieren. Wir gehen von drei verbundenen Involutionen aus: $(\mathfrak{a}), (\mathfrak{b}), (\mathfrak{c})$. Die sechs Doppelpunkte E, E'; F, F'; G, G' bilden das Vierseit $EFG, EF'G', E'FG', E'F'G$, für welches $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} \equiv \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ Diagonaldreieck ist. Es seien $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_0', \mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_0', \mathfrak{C}_0\mathfrak{C}_0'$ die drei Paare aus den Involutionen, welche bzw. zu den Ecken $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$; $\mathfrak{C}, \mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ harmonisch sind, und $\mathfrak{K}_0$ der Kegelschnitt durch sie (Nr. 123). Das ist der Kegelschnitt, um den es sich handelt. Da $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_0'$ zu $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ und zu E, E' harmonisch sind, so ist die Involution $(\mathfrak{a}') = (\mathfrak{B}\mathfrak{C}, EE')$ diejenige der für $\mathfrak{K}_0$ konjugierten Punkte auf $\mathfrak{a}$, ebenso $(\mathfrak{b}') = (\mathfrak{C}\mathfrak{A}, FF')$ und $(\mathfrak{c}') = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}, GG')$; sie stützen sich bzw. auf $(\mathfrak{a}), (\mathfrak{b}), (\mathfrak{c})$.

$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ist Polardreieck, also genügen die beiden Involutionen $(\mathfrak{a}')$ und $(\mathfrak{b}')$ auf den konjugierten Geraden $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zur Festlegung des Polarfeldes.

Die Polare von E muß durch E' und $\mathfrak{A}$ gehen, ist also $E'\mathfrak{A}$, und der Schnittpunkt $E_1 = (EFG, E'\mathfrak{A})$ ist zu E konjugiert; er ist der vierte harmonische zu E in bezug auf F, G, wie das Viereck $\mathfrak{A}E'F'G'$ zeigt. Sind ebenso F_1 und G_1 harmonisch zu F, G in bezug auf G, E, bzw. E, F, so sind EE_1, FF_1, GG_1 in Involution (Nr. 144), und das ist die Involution konjugierter Punkte für $\mathfrak{K}_0$ auf

1) Cremona, Messenger of Mathematics, Bd. 3, S. 13, 88.

EFG; ihre Doppelpunkte, welche mit E, F, G äquianharmonische Würfe bilden, die zum Tripel EFG gehörigen Hesseschen Punkte (Nr. 150), liegen also auf $\mathfrak{K}_0$, und so erhalten wir für denselben 8 weitere Punkte auf den Geraden $EFG, EF'G', \ldots$.

Sind die drei Involutionen $(\mathfrak{a}), (\mathfrak{b}), (\mathfrak{c})$ hyperbolisch, so sind die sechs Punkte $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_0', \ldots$ imaginär; denn $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ und E, E' liegen elliptisch. Die drei Involutionen konjugierter Punkte $(\mathfrak{a}'), (\mathfrak{b}'), (\mathfrak{c}')$ auf den Seiten des Polardreiecks sind also elliptisch; daher ist $\mathfrak{K}_0$ reell-imaginär. Die Hesseschen Punkte, zu den reellen Tripeln $EFG, \ldots$ gehörig, sind auch imaginär (Nr. 144).

Sind aber $(\mathfrak{a}), (\mathfrak{b})$ elliptisch und $(\mathfrak{c})$ hyperbolisch, so sind $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_0'$; $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_0'$ reell und daher auch $\mathfrak{K}_0$; $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_0'$ aber und die Hesseschen Punkte sind imaginär, so jedoch, daß die auf EFG gelegenen zu den auf $E'F'G$ und die auf $E'FG'$ zu denen auf $EF'G'$ konjugiert sind. Nach den beiden Tripeln GEF und $GF'E'$ kommen vom reellen Punkte G' die reelle Gerade $G'G$ und die beiden konjugiert imaginären Geraden $G'EF'$ und $G'F'E$, definiert durch die elliptische Involution, die aus G' die $(\mathfrak{a})$ und $(\mathfrak{b})$ zugleich projiziert; also sind die Hesseschen Strahlen zu diesem Tripel reell; nach Nr. 145 kann man sie konstruieren. Sie sind die Geraden, welche die konjugiert imaginären Hesseschen Punkte auf GEF und $GE'F'$ verbinden, und die Involution, welche aus G die $(\mathfrak{a})$ und $(\mathfrak{b})$ projiziert, schneidet in sie die darstellenden Involutionen dieser Punkte ein.

Handelt es sich um den speziellen Fall (Nr. 82), wo zwei Involutionen $(\mathfrak{b}), (\mathfrak{c})$ mit der absoluten Involution $(\mathfrak{a})$ verbunden sind, so ist der Kegelschnitt der 14 Punkte folgende Hyperbel. Sie hat $\mathfrak{A}$ zum Mittelpunkt, die Halbierungslinien der Winkel $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ zu Asymptoten und die beiden Punkte auf $\mathfrak{b}$ zu Scheiteln, welche mit den Doppelpunkten von $(\mathfrak{c})$ auf einem Kreise um $\mathfrak{A}$ liegen.

322 Es seien gegeben ein Dreieck ABC und ein Dreiseit $a'b'c'$ in derselben Ebene, welche perspektiv sind; das Zentrum, in welches die Verbindungslinien $(A, b'c')$, $(B, c'a')$, $(C, a'b')$ zusammenlaufen, sei S, und die Axe, welche durch die Schnitte $\mathfrak{A} = (BC, a')$, $\mathfrak{B} = (CA, b')$, $\mathfrak{C} = (AB, c')$ geht, sei s'. Wir legen dann eine Korrelation fest:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & S \\ a' & b' & c' & s' \end{vmatrix}.$$

Nennen wir noch $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$ die Schnitte von $S(A, B, C)$ mit s' und rechnen sie zunächst zum ersten Felde; da die Geraden $S(A, B, C)$ aus dem ersten Felde die $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ oder $s'(a', b', c')$ zu Polen im zweiten haben, so sind jenen Punkten $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$ aus dem ersten Felde diese Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ im zweiten konjugiert. Nun lehrt das Viereck $SABC$, daß $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}, \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}$ in Involution sind; also bilden die konjugierten Punkte auf s' involutorische Punktreihen; jede zwei gepaarte Punkte dieser Involution sind in beiderlei Sinne konjugiert. Der Punkt $\mathfrak{A}$, auf BC gelegen, hat als Punkt des ersten Feldes, eine durch $b'c'$ gehende Polare, die aber, nach dem eben erhaltenen Ergebnis, auch durch $\mathfrak{A}_1$ geht, mithin SA ist; ebenso haben $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ im ersten Felde die SB, SC zu Polaren im zweiten und s' aus dem ersten Felde hat S zum Pole im zweiten. Der Punkt S und beliebig zwei gepaarte Punkte jener Involution auf s' sind zu je zweien in beiderlei Sinne konjugiert und bilden ein Polardreieck; also liegt ein Polarfeld vor.

Demnach ist diejenige ebene Korrelation, in welcher zwei perspektiv gelegene Dreiecke, sowie Zentrum und Axe entsprechend sind, ein Polarfeld[1]).

Die Umkehrung hatten wir in Nr. 314.

Man kann, wegen Nr. 45, diesen Satz auch etwas anders aussprechen.

Wenn in einer ebenen Korrelation einem Viereck $ABCD$ ein Vierseit $a'b'c'd'$ entspricht, welches jenem verkehrt eingeschrieben ist, d. h. so, daß auf den Seiten

$$AB, AC, AD, BC, BD, CD$$

die Ecken

$$c'd', b'd', b'c', a'd', a'c', a'b'$$

liegen, so handelt es sich um ein Polarfeld[2]).

Unsere Figur besteht aus zehn Punkten und zehn Geraden, und mit jedem dieser Punkte inzidieren drei Geraden, mit jeder Gerade drei Punkte. Sie läßt sich noch, wie a. a. O. schon gesagt wurde, auf zehn Weisen als Figur von zwei perspektiven Dreiecken, Zentrum, Axe und den inzidenten Verbindungslinien und Schnittpunkten auffassen: man nimmt jedes der zehn Paare polarer Elemente unseres Polarfeldes als Zentrum und Axe, woraus dann sofort zwei in demselben polare Dreiecke als perspektiv sich gegeben, wie dies ja auch nach Nr. 314 notwendig ist.

Auf jeder der zehn Geraden geben uns die drei Punkte und die Schnitte mit ihren Polaren sofort die Involution konjugierter Punkte; und perspektiv zu ihr ist diejenige der konjugierten Strahlen um den Pol. Diese $2 \cdot 10$ Involutionen liefern für die Basiskurve 20 Punkte und ihre Tangenten.

Zu der vorliegenden ebenen Figur führt ein räumliches vollständiges Fünfeck $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ durch die Spuren A_{hi}, a_{hik} der

1) Staudt, Geometrie der Lage, Nr. 241.
2) Pasch, Math. Annalen, Bd. 26, S. 215.

zehn Verbindungslinien $a_{hi} = A_h A_i$ und der zehn Verbindungsebenen $\alpha_{hik} = A_h A_i A_k$. Es sind z. B. $A_{14} A_{24} A_{34} \equiv a_{234} a_{134} a_{124}$ und $a_{235} a_{135} a_{125} \equiv A_{15} A_{25} A_{35}$ perspektive Dreiecke; die Verbindungslinien entsprechender Ecken sind $a_{145}, a_{245}, a_{345}$, welche in A_{45} zusammenlaufen, und die Schnittpunkte entsprechender Seiten sind A_{23}, A_{13}, A_{12}, welche auf a_{123} liegen.

Ein räumliches vollständiges Fünfeck ruft in jeder Ebene ein Polarfeld hervor; in ihm sind die Spuren gegenüberliegender Elemente polar.

323 Jede Fläche zweiten Grades F^2 induziert in einer beliebigen Ebene, mag sie von ihr reell oder imaginär geschnitten werden, ein Polarfeld, das im letzteren Falle der Repräsentant der reell-imaginären Schnittkurve ist.

Wir setzen dabei folgende Sätze aus der Polarentheorie der Flächen zweiten Grades als bekannt voraus:

Jedem Punkte ist, in bezug auf eine Fläche zweiten Grades, eine Polarebene zugeordnet, jeder Ebene ein Pol; die Polarebene eines Punktes der Fläche ist seine Berührungsebene. Läuft der Pol auf einer Gerade, so dreht sich die Polarebene (projektiv) um eine andere Gerade, welche die Polare jener heißt. Diese beiden Geraden haben reziprokes Verhalten (daher auch: reziproke Polaren), so daß auch von jedem Punkte der zweiten Gerade die Polarebene durch die erste geht. Die Polarebenen der Punkte einer Ebene erfüllen (korrelativ) den Bündel um den Pol derselben, die Pole der Ebenen durch einen Punkt das Feld in seiner Polarebene.

Wir kommen jedoch auf diese Beziehung zwischen Pol und Polarebene einer Fläche zweiten Grades beim Polarraume zurück.

Nun sei Π die gegebene Ebene; jedem Punkt X derselben, zum ersten Felde gerechnet, ordnen wir im zweiten den Schnitt x' von Π mit seiner Polarebene ξ nach F^2 zu; die Polarebenen ξ der Punkte von Π bilden einen Bündel; und eine Gerade x' in Π bestimmt eine Ebene in diesem Bündel, die also einem in Π gelegenen Pole zugeordnet ist. Diese Zuordnung ist somit eindeutig. Durchläuft X eine Gerade x in Π, so dreht sich die Polarebene ξ um die Polare x_1 in bezug auf F^2 und x' um die Spur X' derselben in Π. Die Zuordnung ist also linear und demnach Korrelation, und der Gerade x im ersten Felde entspricht X' im zweiten. Es sei $x \equiv y'$, so geht durch y' eine Ebene aus dem Bündel der Polarebenen der Punkte von Π; ihr Pol Y liegt also in Π. Da sie aber durch x geht, so muß, nach dem Satze über reziproke Polaren, dieser Pol Y auf x_1 liegen, also ist er der Schnitt von x_1 mit Π; d. h. $Y \equiv X'$. Jede zwei entsprechenden Elemente korrespondieren sich also in beiderlei Sinne; die Korrelation ist durchweg involutorisch: ein Polarfeld.

Wir wollen ein Polardreieck herstellen; x' sei als Spur der Polarebene ξ von X in Π erhalten und Y auf x' gelegt, also auf ξ, folglich geht die Polarebene η von Y durch X, mithin auch ihre Spur y'. Der Schnitt $Z = x'y'$ liegt in ξ und η, seine Polarebene ζ geht daher durch X und Y und z' ist XY. In dem Dreiecke XYZ hat sonach jede Ecke die Gegenseite zur Polare.

Es sei der Schnitt von Π mit F^2 zunächst ein reeller Kegelschnitt. Jedem seiner Punkte gehört als Polarebene die Berührungsebene zu, daher als Polare im Polarfelde (Π) seine Tangente an den Kegelschnitt. Diese Schnittkurve (F^2, Π) stellt sich als Kern oder Basis des Polarfeldes heraus. Ist sie imaginär, so haben wir in dem Polarfelde den reellen Repräsentanten.

Durch fünf Punkte im Raume gehen ∞^2 kubische Raumkurven: ein Bündel von solchen Kurven. Denn jeder sechste Punkt bestimmt eindeutig eine Kurve; und die ∞^3 Punkte des Raums liefern ∞^{3-1} Kurven. Diese Raumkurven rufen in einer Ebene ϵ ein Polarfeld hervor, derartig, daß die drei Schnittpunkte einer Kurve des Bündels je ein Polardreieck bilden. Wir ordnen irgend einem Punkte X der Ebene die Doppelsekante x' zu, welche die beiden ferneren Schnitte der durch ihn gehenden Kurve des Bündels verbindet; dann ist auch umgekehrt jeder Gerade x' in ϵ, weil sie nur für eine Kurve des Bündels Doppelsekante ist (Nr. 206), ein Punkt X zugeordnet, der dritte Schnitt dieser Kurve. Y sei auf die zu X gehörige Gerade $x' \equiv z$ gelegt. Die beiden durch X und Y gehenden Kurven des Bündels liegen, wegen der fünf gemeinsamen Punkte, auf derselben Fläche zweiten Grades (welche durch je zwei weitere Punkte auf der einen und andern Kurve bestimmt ist) und verhalten sich zu deren Geradenscharen ungleichartig (Nr. 165). Die Gerade z liegt ganz auf ihr, weil sie mit ihr Y und die beiden Punkte der durch X gehenden Kurve, für welche x' Doppelsekante ist, gemein hat; also schneidet ϵ noch eine Gerade aus der Fläche aus, die durch X geht und Doppelsekante der durch Y gehenden Kurve des Bündels ist, demnach die dem Y entsprechende Gerade y' ist. Läuft also Y auf z, so dreht sich y' um X, welcher dadurch der der z entsprechende Punkt Z' wird. Damit ist zugleich erkannt, daß es sich um Korrelation und zwar um involutorische Korrelation handelt; weil $X \equiv Z'$ und $x' \equiv z$ sich in beiderlei Sinne korrespondieren. Von den drei Schnitten einer Kurve des Bündels hat jeder die Verbindungslinie der beiden andern zur Polare, so daß das Vorhandensein von Polardreiecken ersichtlich ist[1]). 324

1) Reye, Zeitschrift für Mathematik, Bd. 13, S. 521; ein solcher Kurvenbündel wird nach Reye benannt; vgl. Stuyvaert, Journ. f. Math., Bd. 132 S. 126.

§ 50. Beziehungen zwischen zwei Polarfeldern derselben Ebene.

325 Wir haben in Nr. 268 die Aufgabe behandelt, eine Kollineation herzustellen, in welcher zwei gegebene Kegelschnitte homolog sind; wir fanden, daß ∞^3 Kollineationen möglich sind. Die Aufgabe werde jetzt dahin verallgemeinert, daß statt der Kegelschnitte die repräsentierenden Polarfelder Π und Π' gegeben sind. Beide haben ∞^3 Polardreiecke; also wird es unter den ∞^3 Kollineationen eine endliche Anzahl geben, welche ein bestimmtes Polardreieck PQR von Π in ein bestimmtes $P'Q'R'$ von Π' überführen.

Reell können die überführenden Kollineationen nur sein, wenn die Polarfelder gleichartig sind; und der Fall solcher mit reell-imaginären Basiskurven ist jetzt der interessantere. Es sind dann alle Involutionen konjugierter Elemente elliptisch; also enthalten die Involutionen auf PQ, PR reelle Paare SS_1, bzw. TT_1, welche bzw. zu dem Paare PQ, PR harmonisch sind; ebenso seien $S'S_1'$, $T'T_1'$ auf $P'Q'$, $P'R'$ konstruiert. Es ist sofort klar, daß diese Paare in der Kollineation entsprechend sein müssen; aber das Entsprechen kann auf vier Weisen erfolgen: den S, T können S', T' oder S', T_1' oder S_1', T' oder S_1', T_1' entsprechen, woraus dann folgt, daß den S_1, T_1 die S_1', T_1' oder S_1', T'.... entsprechen. Nehmen wir den ersten Fall und bezeichnen (RS, QT) mit U und $(R'S', Q'T')$ mit U', so macht die Kollineation:

$$\begin{vmatrix} P & Q & R & U \\ P' & Q' & R' & U' \end{vmatrix}$$

die Punkte S, T, S_1, T_1 und S', T', S_1', T_1' zu entsprechenden; sie führt also das Polarfeld Π, bei welchem die konjugierten Geraden PQ, PR die Involutionen konjugierter Punkte (PQ, SS_1) und (PR, TT_1) tragen, in ein Polarfeld über, bei welchem die konjugierten Geraden $P'Q'$, $P'R'$ die Involutionen $(P'Q', S'S_1')$, $(P'R', T'T_1')$ tragen; dies gilt auch für Π', und da nach Nr. 319 ein Polarfeld eindeutig dadurch bestimmt ist, so ist Π in Π' übergeführt.

Wenn also zwei bestimmte Polardreiecke der Polarfelder mit bestimmter Zuordnung der Ecken einander zugeordnet werden, so sind vier reelle Kollineationen möglich, also im Ganzen 24 wegen der sechs Zuordnungen der Ecken.

Sind die Basen reell, so sind elliptische Involutionen je nur auf einer Seite vorhanden, die andern vier tragen hyperbolische. Wir dürfen, um reelle Kollineationen zu erlangen, nur gleichartige Seiten zuordnen. Seien PQ, PR, $P'Q'$, $P'R'$ die Seiten mit hyperbolischen Involutionen und M, M_1; N, N_1; M', M_1'; N', N_1' die Doppelpunkte, so sind zwei Arten der Zuordnung der Ecken und vier Arten der

Zuordnung der Doppelpunkte möglich; seien wieder die gleichbenannten zugeordnet und (RM, QN), $(R'M', Q'N')$ mit V, V' bezeichnet, so ist die Kollineation:

$$\begin{vmatrix} P & Q & R & V \\ P' & Q' & R' & V' \end{vmatrix}$$

eine der acht reellen überführenden.

Man findet leicht die erforderlichen Modifikationen der Konstruktion, wenn die Transformation durch Korrelation erfolgen soll.

Bis jetzt war noch nicht Identität der Ebenen erforderlich.

Ein Kegelschnitt geht durch eine involutorische Homologie in sich selbst über, wenn das Zentrum S und die Axe s in bezug auf ihn polar sind. Zeigen wir dies allgemeiner für ein Polarfeld Π; es ist nachzuweisen, daß jedes Paar X, x von Pol und Polare des Π in ein ebensolches Paar übergeht.

Auf jedem Strahle l durch S haben wir zwei Involutionen, die dem Polarfelde zugehörige und die der Homologie; das Zentrum S und der Schnitt $\mathfrak{S} = ls$ sind in der ersteren gepaart und für die andere Doppelpunkte; daher stützen die beiden Involutionen einander. Also gehen zwei gepaarte Punkte X, X' der ersteren, konjugiert in Π, durch die zweite oder durch die Homologie in ebenfalls in der ersteren gepaarte Y, Y' über, also in konjugierte von Π. Sei nun L der auf s gelegene Pol von l, so sind $X'L$, $Y'L$ die Polaren von X, Y, zwei in der Homologie entsprechenden Punkten, und sind selbst in ihr entsprechend, weil sie von einem Punkte der Axe nach zwei entsprechenden Punkten X', Y' gehen.

Bei zwei Polarfeldern Π, Π_1 in derselben Ebene ordnen 326
wir die beiden Pole je derselben Gerade einander zu; diese Zuordnung ist (Nr. 306) Kollineation, als Ergebnis zweier aufeinander folgenden Korrelationen. Wenn X und X_1 die Pole von x', Y und Y_1 diejenigen von y' sind, so sind also in dieser Kollineation den X, Y im ersten Felde die X_1, Y_1 im zweiten entsprechend, folglich der Gerade XY die Gerade $X_1 Y_1$. Das sind aber die beiden Polaren von $x'y'$. Daher sind in der nämlichen Kollineation auch die beiden Polaren je desselben Punktes entsprechend. Nennen wir diese Kollineation und zwar als Transformation aus dem ersten ins zweite Feld Γ und ihre Umkehrung Γ^{-1} (Nr. 86), so können wir wieder, wie a. a. O., die Produktbezeichnung benutzen:

$$\Pi\Pi_1 = \Gamma, \quad \Pi_1\Pi = \Gamma^{-1}.^{1)}$$

1) Wohl zu unterscheiden von dieser Multiplikation, der Ausführung der beiden Π hinter einander, ist die Ausführung der einen Polarkorrelation Π_1 auf die andere Π, wobei die polaren Elemente X und x' von Π durch Π_1 in x_1' und X_1' übergehen, so daß wieder eine Korrelation entsteht; vgl. Nr. 85, 86. Wir kommen auf sie zurück.

Γ ist im allgemeinen nicht involutorisch, also von Γ^{-1} verschieden. Die Polarfelder aber sind involutorisch, daher ihre Quadrate $= 1$; $\Pi = \Pi^{-1}$, also $\Pi^2 = \Pi\Pi^{-1} = 1$. Demnach ergibt sich, ähnlich wie in Nr. 86, durch Vormultiplizieren mit Π und Nachmultiplizieren mit Π_1:

$$\Pi_1 = \Pi\Gamma, \quad \Pi = \Gamma\Pi_1,$$

aber auch:

$$\Pi_1 = \Gamma^{-1}\Pi, \quad \Pi = \Pi_1\Gamma^{-1}.$$

Ein Koinzidenzpunkt der Kollineation Γ besitzt in beiden Polarfeldern dieselbe Polare, und diese Polare ist eine Koinzidenzgerade, und zwar die jenem Koinzidenzpunkte gegenüberliegende. Denn im andern Falle wäre der Punkt mit seiner gemeinsamen Polare inzident; die beiden Basiskurven würden in ihm sich berühren. Diese spezielle Lage der Basiskurven setzen wir bei Π und Π_1 nicht voraus. Daher ist das Koinzidenzdreieck von Γ ein gemeinsames Polardreieck von Π und Π_1, und umgekehrt ein solches gemeinsame Polardreieck ist Koinzidenzdreieck von Γ.

Zwei in derselben Ebene befindliche Polarfelder haben ein und im allgemeinen nur ein gemeinsames Polardreieck.

Das Diagonaldreieck des Vierecks der gemeinsamen Punkte zweier Kegelschnitte ist ein gemeinsames Polardreieck der beiden Polarfelder, ebenso das Diagonaldreieck des Vierseits der gemeinsamen Tangenten.

Nach dem vorangehenden Satze sind die beiden Dreiecke identisch.

Die Ecken dieses gemeinsamen Polardreiecks sind die Doppelpunkte der Geradenpaare des Büschels, die Seiten die Doppelgeraden der Punktepaare der Schar der beiden Kegelschnitte.

Wenn A, B, C, D die gemeinsamen Punkte sind, so seien:

$$U = (AB, CD), \quad V = (AC, BD), \quad W = (AD, BC)$$

die Ecken des Dreiecks; sind dann u, v, w die Gegenseiten, so sei die Bezeichnung der gemeinsamen Tangenten a, b, c, d so eingerichtet, daß:

$$u = (ab, cd), \quad v = (ac, bd), \quad w = (ad, bc);$$

es sind je ein Geradenpaar und ein Punktepaar zugeordnet, deren Doppelelemente einander gegenüberliegen.

Auf u liegen die beiden Pole von AB und die von CD, durch U gehen die Polaren von ab und die von cd.

Das Dreieck UVW ist ersichtlich reell, wenn alle vier Punkte A, B, C, D es sind; aber auch, wenn sie alle imaginär sind. Denn wenn etwa A und B, C und D konjugiert imaginär sind, so sind AB, CD und U reell; aber es ist dann auch AC zu BD, AD zu BC konjugiert imaginär und demnach V, W reell.

Sind aber nur A, B reell und C, D konjugiert imaginär, so sind gleichfalls AB, CD und U reell; diesmal aber sind AC und AD, BC und BD konjugiert imaginär, daher auch V und W; die Verbindungslinie ist reell. Also ist vom gemeinsamen Polardreieck nur eine Ecke U und die Gegenseite reell. Ähnliches gilt bei den gemeinsamen Tangenten; und so zeigt sich von neuem (Nr. 176), daß mit gleichartigen, bzw. ungleichartigen gemeinsamen Punkten eben solche gemeinsame Tangenten verbunden sind.

Die gemeinsamen Elemente sind gleichartig, durchweg imaginär, wenn mindestens eine der Basiskurven reell-imaginär ist; mithin haben wir auf ein vollständig reelles gemeinsames Polardreieck zu schließen. Das erkennt man unmittelbar.

Jedenfalls ist eine Ecke U reell und ihre Gegenseite u als die gemeinsame Polare. Die beiden Ecken V, W auf u bilden das gemeinsame Paar der beiden Involutionen konjugierter Punkte auf ihr; dies ist reell, weil mindestens eine von diesen elliptisch ist.

Wir wollen aber jetzt aus dem gemeinsamen Polardrei- 327
eck UVW die gemeinsamen Punkte und gemeinsamen Tangenten der Basiskurven ableiten.

Wir haben eine involutorische Verwandtschaft der Punkte, die in beiden Polarfeldern konjugiert sind: jedem Punkte X entspricht der Schnittpunkt X' der beiden Polaren, und dessen Polaren schneiden sich in ihm. Läuft X auf einer Gerade l, so beschreibt X' einen Kegelschnitt l'^2, den die beiden Büschel der Polaren der Punkte von l erzeugen und der durch U, V, W geht; denn in U schneiden sich die Polaren von lu. Geht l durch U, so löst sich von ihm die Gerade u ab; die beiden Polarenbüschel werden perspektiv, mit u als gemeinsamem und sich selbst entsprechendem Strahle; der eigentliche Ort der X' ist eine Gerade l', welche, wegen lu, durch U geht. Diese beiden Geraden l und l' durch U, projektiv durchlaufen von Punkten, von denen die einen zu den andern gemeinsam konjugiert sind, entsprechen sich involutorisch; und zwei Paare gemeinsam konjugierter Punkte X, X'; Y, Y' bestimmen zwei Paare dieser Involution. Die Doppelstrahlen derselben tragen daher jeder eine Involution von gemeinsam konjugierten Punkten, und deren Doppelpunkte sind gemeinsame Punkte der beiden Basiskurven. Schon die eine Ecke liefert sie. Die beiden Doppelstrahlen sind die in U sich schneidenden gemeinsamen Sekanten und bilden das Geradenpaar (U) des Büschels mit dem Doppelpunkte U.

Die beiden andern Ecken, die wir zunächst reell annehmen, führen zu den andern gemeinsamen Sekanten und je den vier Punkten nochmals; diese ergeben sich einfacher als Schnitte des Geradenpaares (U)

mit einem der beiden andern. Ist etwa (V) imaginär, so schneidet die (V) darstellende Involution in die beiden Geraden von (U) je die darstellende Involution der Schnittpunkte ein.

Die drei Involutionen um U, V, W sind verbunden; denn zu den Strahlen aus U, V, W nach X sind gepaart die Strahlen nach dem gemeinsam konjugierten Punkte X'; so erweisen sich die sechs Doppelstrahlen als die Seiten eines Vierecks. Folglich sind, immer noch U, V, W als reell vorausgesetzt, alle drei hyperbolisch, oder nur eine und die beiden andern elliptisch. Im ersten Falle sind alle sechs gemeinsamen Sekanten und vier Schnittpunkte reell, im andern nur zwei gemeinsame Sekanten reell und alle vier Schnittpunkte imaginär.

Zu der darstellenden Involution (l, l') des Paars (U) gehören die beiden Geraden $U(V, W)$ mit ausgearteter Projektivität der gemeinsam konjugierten Punkte; V ist allen auf UW, W allen auf UV gemeinsam konjugiert.

Daraus folgt, daß, wenn nur U und u reell sind, die darstellende Involution von (U) hyperbolisch ist, weil sie ein reell-imaginäres Paar $U(V, W)$ enthält. In U schneiden sich also reelle gemeinsame Sekanten. Die beiden Involutionen auf ihnen sind ungleichartig; denn auch wenn sie beide elliptisch wären, würden sie zu reellen V, W führen als den reellen Punkten, aus denen sie je durch die nämliche Involution projiziert werden (Nr. 82). Folglich sind zwei Schnittpunkte reell, die andern imaginär.

In dualer Weise ergeben sich aus dem gemeinsamen Polardreiecke die gemeinsamen Tangenten.

Die biquadratische Aufgabe der Bestimmung der gemeinsamen Punkte oder Tangenten zweier Kegelschnitte aus deren Polarfeldern läuft daher zunächst auf eine kubische, also auch nicht mit Lineal und Zirkel zu lösende Aufgabe hinaus, das gemeinsame Polardreieck zu konstruieren oder das Koinzidenzdreieck der Kollineation, welche durch die Polarfelder induziert wird.

Besitzt man aber dieses gemeinsame Polardreieck, so hat man es nur noch mit quadratischen Aufgaben zu tun, der Herstellung der Doppelelemente von Involutionen, die dann eben repräsentierende werden, wenn sie zu konjugiert imaginären Elementen führen[1]).

Die Projektivität zwischen der Punktreihe der X auf einer Gerade l und der Punktreihe der ihnen in beiden Polarfeldern konjugierten X' auf dem Kegelschnitte l'^2 hat die spezielle Eigenschaft, um welche es sich in Nr. 216 handelte. Sind nämlich X' und Y' auf l'^2 den X, Y auf l konjugiert, so gilt dies auch für $Z = (XY, X'Y')$,

1) Bekanntlich wird ja die Auflösung einer Gleichung 4. Grades zunächst auf die einer kubischen zurückgeführt, und dann handelt es sich nur noch um quadratische.

der auf l liegt, und $Z' = (XY', X'Y)$, der infolgedessen auf l'^2 liegt; und $Y'Z'$, $Z'X'$, $X'Y'$ gehen durch X, Y, Z[1]).

Wenn zwei Kegelschnitte sich doppelt berühren, also A 328
und B, C und D sich vereinigen, so wird das eine Geradenpaar des Büschels AB, CD durch die beiden Tangenten in A und C gebildet, U ist also der Berührungspol. Die beiden andern Geradenpaare (AC, BD), (AD, BC) vereinigen sich in der Doppelgerade AC, der Berührungssehne u; ihre Doppelpunkte sind unbestimmt geworden.

Auf u, der Polare von U, liegt also das Punktepaar (ab, cd) aus der Schar, gebildet durch die Berührungspunkte, so daß die Tangenten a und b, c und d sich vereinigen. Die beiden andern Punktepaare (ac, bd), (ad, bc) fallen wiederum in den Doppelpunkt U zusammen, ihre Doppellinien sind unbestimmt.

Die Kegelschnitte haben auf u dieselbe Involution konjugierter Punkte (mit A, C als Doppelpunkten) und, perspektiv zu ihr, um U dieselbe Involution konjugierter Strahlen (mit den Doppelstrahlen a, c) und daher ∞^1 gemeinsame Polardreiecke. Jedes Dreieck mit U, u als Gegenelementen, zwei gepaarten Punkten jener Involution und den nach ihnen gehenden gepaarten Strahlen aus dieser ist ein solches Dreieck.

Wir können leicht zwei Polarfelder mit ∞^1 gemeinsamen Polardreiecken herstellen. Eins, Π, sei beliebig gegeben und UVW, $UV'W'$ zwei Polardreiecke von ihm mit gemeinsamer Ecke U und Gegenseite u; wir bestimmen ein zweites Π_1 durch die konjugierten Geraden VW, VU, die Involution $(VW, V'W')$ auf der ersteren u, während die auf der letzteren durch ein beliebiges zweites Paar, neben VU, bestimmt werden kann. Für beide Polarfelder sind alle Dreiecke mit der festen Ecke U und irgend zwei gepaarten Punkten aus der ersten Involution als weiteren Ecken Polardreiecke. Diese Involution und die zu ihr perspektive aus U sind beiden gemeinsam, woraus hervorgeht, daß die beiden Basiskurven sich doppelt berühren: in den Doppelpunkten jener mit den Doppelstrahlen dieser als Tangenten.

Die Kollineation Γ, welche das Produkt der beiden Polarfelder ist, hat alle Punkte von u zu sich selbst entsprechenden, und ebenso alle Strahlen durch U, je ihre gemeinsamen Polaren, ist daher Homologie.

Und umgekehrt, wenn zwei Polarfelder eine Homologie (S, s) zum Produkte haben, so heißt das, jeder Axenpunkt hat, weil in (S, s) sich selbst entsprechend, dieselbe Polare in beiden Feldern, die damit in der Homologie ebenfalls sich selbst entsprechend, also ein Zentrumsstrahl wird, und diese gemeinsamen Pole und Polaren

---

1) R. Böger, Ebene Geometrie der Lage (1900), § 18.

führen zu einer gemeinsamen Involution konjugierter Punkte auf s und einer zu ihr perspektiven gemeinsamen Involution konjugierter Strahlen um S, also zu doppelter Berührung der Basiskurven.

Weil die Homologie die einzige ebene Kollineation ist, die nicht bloß ein Koinzidenzdreieck hat, so führt nur der Fall von zwei Polarfeldern mit sich doppelt berührenden Basiskurven zu mehr als einem gemeinsamen Polardreiecke.

Wir folgerten aus $\Pi\Pi_1 = \Gamma$, daß $\Pi\Gamma = \Pi_1$ und $\Gamma\Pi_1 = \Pi$; also ist das Ergebnis der Multiplikation eines Polarfeldes und einer Homologie, deren Zentrum S und Axe s in jenem polar sind, ein zweites Polarfeld: in der Tat, jedes Polardreieck des gegebenen Polarfeldes, für welches S und s Gegenelemente sind, wird Polardreieck des Produktes.

Die beiden Basiskurven berühren sich doppelt mit S als Berührungspol und s als Berührungssehne.

329 Ermitteln wir die Beziehung der Invariante γ der Homologis Γ zu den Invarianten λ und $-\lambda$ der Homologien (Nr. 302), welche den einen von zwei sich doppelt berührenden Kegelschnitten in den andern überführen oder das eine Polarfeld Π in das andere Π_1. Es sei a eine Tangente der Basis von Π, so ist der Pol in Π selbst ihr Berührungspunkt A; wenn diesem in Γ der Punkt A' entspricht, so werden A' und a Pol und Polare in Π_1. Wenn nun SA, auf welcher auch A' liegt, die Basis von Π zum zweiten Male in B trifft, diejenige von Π_1 in A_1, B_1 und s in $\mathfrak{S}$, so ist $\gamma = (S\mathfrak{S}AA')$ die Invariante von Γ, und $\lambda = (S\mathfrak{S}AA_1)$, $-\lambda = (S\mathfrak{S}AB_1)$ sind die der beiden andern oben genannten Homologien.

Es sind $S, \mathfrak{S}$ und A, A' konjugiert in Π_1; also

$$S\mathfrak{S},\ AA',\ A_1A_1,\ B_1B_1$$

in Involution.

Projizieren wir (unter Beibehaltung der Namen) $\mathfrak{S}$ ins Unendliche, so wird S Zentralpunkt dieser Involution, so daß $SA \cdot SA' = SA_1{}^2$. Daher ist:

$$\gamma = \frac{SA}{SA'} = \frac{SA^2}{SA \cdot SA'} = \frac{SA^2}{SA_1{}^2};$$

also ist:

$$\lambda = \frac{SA}{SA_1} = \sqrt{\gamma}.$$

Wenn die Homologie Γ involutorisch ist, also $\gamma = -1$, so ist $\lambda = i$, und die beiden Basiskurven sind durch Imaginärprojektion verbunden, konjugiert (im Wienerschen Sinne) oder harmonisch zugeordnet (Nr. 303).

Man erhält also für zwei konjugierte oder harmonisch zugeordnete Kegelschnitte die beiden Polaren desselben Punktes, die beiden

Pole derselben Gerade als entsprechende Elemente der involutorischen Homologie, für welche Berührungspol und Berührungssehne oder Zentrum und Axe der Konjunktion ebenfalls Zentrum und Axe sind; die beiden Polaren schneiden sich also auf der Axe, die beiden Pole liegen mit dem Zentrum in gerader Linie.

In diesem Falle, wo Γ involutorisch ist, wird $\Gamma^{-1} = \Gamma$, und die obigen Formeln (Nr. 326) geben:

$$\Pi\Pi_1 = \Pi_1\Pi = \Gamma, \quad \Pi\Gamma = \Gamma\Pi = \Pi_1, \quad \Gamma\Pi_1 = \Pi_1\Gamma = \Pi;$$

das Produkt je zweier der drei Verwandtschaften, in beiden Reihenfolgen, ist die dritte.

Sind die beiden Kegelschnitte im engern Sinne konjugiert: in bezug auf den gemeinsamen Mittelpunkt M und die unendlich ferne Gerade, so ist die involutorische Homologie Symmetrie in bezug auf M. Die Polare, die einem Punkte in bezug auf die eine Kurve zukommt, wird auch seine Gegen- oder Antipolare in bezug auf die andere genannt, und eine Gerade hat auch einen Gegen- oder Antipol[1]).

Die zu einem Punkte eines Durchmessers gepaarten Punkte in den Involutionen der konjugierten Punkte, welche dem Durchmesser für die eine und die andere Kurve zukommen, liegen symmetrisch in bezug auf M; daher haben die Involutionen entgegengesetzt gleiche Potenz, die Durchmesser entgegengesetzt gleiche Halbmesser-Quadrate. Aber auch die Lote, auf eine Gerade aus ihren beiden Polen gefällt, treffen jede der beiden Axen in Punkten, die gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind. Also haben die Fokalinvolutionen (Nr. 317) auf derselben Axe für zwei konjugierte Kurven entgegengesetzt gleiche Potenz, was für die Fokalinvolutionen der beiden Axen, die zu der nämlichen Kurve gehören, auch gilt. Die Brennpunkte der einen Kurven gehen also aus denen der andern durch Drehung von 90^0 um den Mittelpunkt hervor.

Zu einem durch sein Polarfeld Π dargestellten reell-imaginären Kegelschnitt R erhält man den harmonisch zugeordneten R' für die polaren Elemente S und s aus Π, indem man auf jedem Strahle durch S in der elliptischen Involution konjugierter Punkte aus Π das stets reelle Paar konstruiert, das zu S und dem Schnitte mit s harmonisch ist.

Von zwei harmonisch zugeordneten Kegelschnitten R und R' ist 330
jeder zu sich selbst polar in bezug auf den andern (Nr. 303).

Es fragt sich, ob, wenn R' zu sich selbst polar ist in bezug auf R, die beiden Kurven harmonisch zugeordnet sein müssen.

Wenn X auf R' liegt und x_1 die zu ihm nach R polare Tangente von R' ist, so muß zu ihrem Berührungspunkte X_1 eine durch X

1) Vgl. mehrere Artikel von G. Jung in den Rendiconti dell'Istituto Lombardo, Ser. II, Bd. 12, S. 169, 218, 385.

gehende Tangente von R' polar sein, also die Tangente x von X. So werden zwei Punkte X und X_1 von R' einander involutorisch zugeordnet, von denen jeder die Tangente des andern zur Polare nach R hat. Also entsteht auf R' eine Involution: mit dem Zentrum S und der Axe s. In der Kollineation Γ, welche das Produkt der Polarfelder Π und Π' von R und R' ist, sind gepaarte Punkte dieser Involution entsprechend und zwar involutorisch entsprechend; denn X geht durch Π in x_1, diese durch Π' in X_1 über, aber auch X_1 geht durch Π in x und diese durch Π' in X über. Wegen dieser ∞^1 nicht auf derselben Gerade gelegenen involutorischen Paare ist (Nr. 297) Γ involutorische Homologie; und S und s sind Zentrum und Axe. Daraus folgt dann, daß die Kegelschnitte in doppelter Berührung und harmonisch zugeordnet sind.

Von der Tangente in einem gemeinsamen Punkte an R erkennt man auch leicht, daß sie in ihm auch R' berühren muß.

Wenn also ein Kegelschnitt R' zu sich selbst polar ist in bezug auf einen andern R, so berühren sie sich doppelt und sind harmonisch zugeordnet. Jeder Strahl durch den Berührungspol schneidet die beiden Kurven harmonisch, und die vier Tangenten laufen in einem Punkt der Berührungssehne zusammen, den gemeinsamen Pol des Strahls. Von den beiden Schnitten mit R' hat jeder die Tangente des andern zur Polare nach R. Aber die harmonische Zuordnung ist ja gegenseitig; auch R ist zu sich selbst polar in bezug auf R'; es erhellt ja sofort, daß auch von den beiden Schnitten jenes Strahls mit R jeder die Tangente des andern zur Polare nach R' hat.

Jedes Paar S, s polarer Elemente von R (oder Π) führt zu einer Büschel-Schar sich doppelt berührender Kegelschnitte, zu welcher R gehört und für welche S, s Berührungspol und -sehne sind; darin befindet sich ein Kegelschnitt R', der dem R harmonisch zugeordnet ist.

Zu jedem Kegelschnitte R gibt es ∞^2, welche ihm harmonisch zugeordnet sind oder welche in bezug auf ihn zu sich selbst polar sind oder in bezug welche er zu sich selbst polar ist.

Dies doppelt unendliche System von Kegelschnitten hat alle drei Charakteristiken 4; d. h. es gibt 4 Kegelschnitte in ihm, welche durch zwei gegebene Punkte gehen oder durch einen gegebenen Punkt gehen und eine gegebene Gerade tangieren oder zwei gegebene Geraden berühren.

Es sei R' ein Kegelschnitt des Systems, der durch A geht; so berührt er auch die Polare a von A nach R. Die Büschel-Schar, zu der er gehört, habe S, s zu Berührungspol und -sehne; also ist der zweite Schnitt von SA mit R' der Berührungspunkt von a. Weil nun S und (SA, s) harmonisch sind sowohl zu den Schnitten A, A_1

mit R', als zu denen mit R, da S und s für beide polar sind, so liegen S und (SA, s) auf dem Kegelschnitte R'', der zu sich selbst polar ist nach R und der Büschel-Schar angehört, für welche A und a Berührungspol und -sehne sind; und s ist die Tangente in (SA, s), als die Polare von S nach R.

Daher ist der nach R zu sich selbst polare Kegelschnitt R'', welcher bei A und seiner Polare a nach R als Berührungspol und -sehne sich ergibt, zugleich der Ort der Berührungspole S und die Enveloppe der Berührungssehnen s für die nach R zu sich selbst polaren Kegelschnitte, die durch A gehen und deshalb a berühren oder umgekehrt.

Sind also A und A_1, A und a_1, a und a_1 gegeben, so erhält man jedesmal zwei Kegelschnitte R'' und R_1''; die 4 gemeinsamen Punkte sind die S und die zu ihnen nach R polaren gemeinsamen Tangenten die s, welche Berührungspole und -sehnen derjenigen R sind, die durch A und A_1 gehen, durch A gehen und a_1 berühren, a und a_1 berühren.

Die ∞^2 Polarfelder, in denen ein gegebener Kegelschnitt R zu sich selbst polar ist, sind die (kommutativen) Produkte des Polarfeldes von R und der ∞^2 involutorischen Homologien, welche R in sich selbst überführen.

Wir wenden uns zur Untersuchung von Polarfeldern, welche 331
zwei gegebene Kegelschnitte K und K' oder ihre Polarfelder ineinander transformieren.

Jedenfalls muß das gemeinsame Polardreieck UVW von K und K' in sich selbst übergehen, fraglich ist jedoch noch, ob jede Ecke desselben in die Gegenseite oder nicht. Im ersteren Falle ist es dann auch Polardreieck für das transformierende Polarfeld.

Im andern Falle verwandle sich etwa V nicht in die Gegenseite v, sondern in die inzidente w; dann geht die Basiskurve $\mathfrak{K}$ des transformierenden Polarfeldes durch V und berührt w in ihm. Wäre nun für die zweite Seite u durch V der auf ihr gelegene W der Pol, so würde sie $\mathfrak{K}$ in W berühren und in V schneiden, was nicht möglich ist. Also hat u die Gegenecke U zum Pole und v den auf ihr gelegenen Punkt W, so daß $\mathfrak{K}$ die v in W berührt.

Bei solchem Verhalten der Basiskurve $\mathfrak{K}$ zum gemeinsamen Polardreiecke von K und K' müssen jedoch diese beiden Kegelschnitte sich in der besonderen Lage befinden, daß sie sich doppelt berühren mit U und u als Berührungspol und -sehne.

Es sind nämlich die beiden Involutionen konjugierter Punkte auf u, welche zu K und $\mathfrak{K}$ gehören und $(u)_K$, $(u)_{\mathfrak{K}}$ heißen mögen, sich stützende; denn die Doppelpunkte V, W der zweiten bilden ein Paar der ersten, und dasselbe gilt für die zu ihnen perspektiven Involutionen konjugierter Strahlen $(U)_K$, $(U)_{\mathfrak{K}}$. Die Polarisierung nach $\mathfrak{K}$ führt $(u)_K$ über in die Involution konjugierter Strahlen $(U)_{K'}$ für K'

um U, den Pol von u nach $\mathfrak{K}$; und diese schneidet in u, welche Polare von U nach K' ist, die Involution konjugierter Punkte $(u)_{K'}$ für K' ein. Die beiden Punkte eines Paares dieser Involution sind also zu denen von $(u)_K$, aus denen sie entstehen, bzw. konjugiert in bezug auf $\mathfrak{K}$, also ihnen gepaart in $(u)_{\mathfrak{K}}$. Mithin entsteht $(u)_{K'}$ aus $(u)_K$ durch $(u)_{\mathfrak{K}}$, ist daher mit $(u)_K$ identisch, weil diese sich auf $(u)_{\mathfrak{K}}$ stützt; und demnach sind auch $(U)_{K'}$ und $(U)_K$ identisch, da U und u Pol und Polare für beide Kurven sind. Folglich haben K und K' in den polaren Elementen u und U die nämlichen Involutionen konjugierter Elemente; d. h. sie gehen die genannte doppelte Berührung ein.

Wird also ein Kegelschnitt K in bezug auf einen andern $\mathfrak{K}$ polarisiert, der von einem Polardreiecke UVW des K die Seiten VU, WU in V, W tangiert, so hat der entstehende Polar-Kegelschnitt K' mit K doppelte Berührung, wobei U und VW Berührungspol und -sehne sind. UVW ist eins der ∞^1 Polardreiecke, welche den K und K' in diesem Falle gemeinsam sind.

Sind umgekehrt K und K' sich doppelt berührende Kegelschnitte, so liefert jedes von den ∞^1 gemeinsamen Polardreiecken UVW zwei die Seiten nach dem Berührungspole U in den Ecken V, W auf der Berührungssehne tangierende Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, in bezug auf welche K und K' polar sind.

Denn die Polaren eines bestimmten Punktes X auf K in bezug auf die Büschel-Schar der VU, WU in V, W tangierenden Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ bilden einen Büschel um einen Punkt der Berührungssehne (welche Polare in bezug auf das Geradenpaar der Büschel-Schar ist, dessen Geraden sich in ihr vereinigen); zwei von ihnen tangieren den K'. In bezug auf die zugehörigen $\mathfrak{K}$ sind K und K' polar.

332 In dieser speziellen Lage befinden sich aber die gegebenen Kegelschnitte K und K' nicht; also tritt der erste Fall ein. Das einzige gemeinsame Polardreieck UVW, das sie haben, ist dann Polardreieck eines sie ineinander überführenden Polarfeldes. Weil dieses jeden gemeinsamen Punkt von K und K' in eine gemeinsame Tangente überführt, so kann es sich nur um die vier Polarfelder handeln, welche UVW auch zum Polardreiecke haben und in denen einem bestimmten von den vier gemeinsamen Punkten bzw. die vier gemeinsamen Tangenten zugeordnet sind. Benutzen wir die Bezeichnung von Nr. 326, so sei zunächst das Polarfeld Π_1 betrachtet, in welchem dem A die a zugeordnet ist, also:

$$\Pi_1 \quad \begin{vmatrix} U & V & W & A \\ u & v & w & a \end{vmatrix}.$$

Dem B, der von A durch U und u harmonisch getrennt ist, entspricht b, die von a durch u und U so getrennt ist, und ebenso den C, D die c, d. Daher transformiert sich K, weil er durch $A, \ldots D$ geht und $a, \ldots d$ berührt, in einen Kegelschnitt, der dasselbe tut, also, da nur K und K' durch A, B, C, D gehen und a berühren, entweder in K' oder in sich selbst. Träte letzteres ein, so wäre K entweder die Basis selbst von Π_1 oder einer der ∞^2 Kegelschnitte, welche in bezug auf diese Basis zu sich polar sind.

Im ersten Falle würde dem A die eigene Tangente, nicht a korrespondieren. Im zweiten Falle, wo jeder dieser Kegelschnitte die Basis doppelt berührt, müßte von dem gemeinsamen Polardreiecke UVW eine Ecke und die Gegenseite Berührungspol und -sehne sein, und jeder Punkt des K, als eines zu sich polaren Kegelschnitts, und der Berührungspunkt der polaren Tangente müßten mit dem Berührungspole in gerader Linie liegen; aber A und der Berührungspunkt von a mit K liegen mit keinem der Punkte U, V, W in gerader Linie.

Daher geht K durch Π_1 tatsächlich in K' über.

Es entspricht nunmehr auch dem Pole G von AB nach K die Polare g' von ab nach K'; so daß die Korrelation:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & G \\ a & b & c & g' \end{vmatrix},$$

in welcher K und K' entsprechend sind (Nr. 268), mit Π_1 identisch ist.

Ferner transformiert Π_1 jedes der drei Geradenpaare $U = (AB, CD)$, (V), (W) des Büschels KK' in das gleichnamige Punktepaar $(u) = (ab, cd)$, (v), (w) der Schar KK'. Daher gilt, weil K in K', K' in K übergeht, die Projektivität:

$$1) \quad KK'(U)(V)(W) \barwedge K'K(u)(v)(w).$$

Demnach ist auch der Büschel der Tangenten in einem gemeinsamen Punkte an jene fünf Kurven projektiv der Punktreihe der Berührungspunkte einer gemeinsamen Tangente mit diesen fünf. Sind also $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ die Tangenten in A an K, K', $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ die Berührungspunkte mit a, so ist:

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', B, C, D) \barwedge a(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}, b, c, d);$$

denn z. B. AB ist Tangente von (U) in A und ab ist Berührungspunkt von (u) mit a.

Begnügen wir uns mit:

$$A(\mathfrak{a}, B, C, D) \barwedge a(\mathfrak{A}', b, c, d);$$

ersteres ist der Wurf der vier gemeinsamen Punkte, insofern sie auf K liegen, letzteres der der gemeinsamen Tangenten, insofern sie K' berühren; und wir haben so die Projektivität dieser beiden Würfe von neuem (Nr. 175) erkannt.

Nun fanden wir (Nr. 195), daß man jede Korrespondenz [2, 2] so auf zwei Kegelschnitte überführen kann, daß die Korrespondenz der inzidenten Punkte des einen und Tangenten des andern entsteht. Verzweigungspunkte auf dem ersteren sind die gemeinsamen Punkte, Verzweigungsstrahlen um den zweiten die gemeinsamen Tangenten. Das ist ein weiterer Beweis der Projektivität der beiden Verzweigungswürfe einer [2, 2] (Nr. 173—175).

333 Wenn b dem A entspricht, so erkennt man wie oben, daß dann a, d, c den B, C, D entsprechen.

Es sind also die vier Polarfelder, welche K und K' ineinander transformieren:

$$\Pi_1 = \left| \begin{matrix} A & B & C & D \\ a & b & c & d \end{matrix} \right|, \quad \Pi_2 = \left| \begin{matrix} A & B & C & D \\ b & a & d & c \end{matrix} \right|,$$

$$\Pi_3 = \left| \begin{matrix} A & B & C & D \\ c & d & a & b \end{matrix} \right|, \quad \Pi_4 = \left| \begin{matrix} A & B & C & D \\ d & c & b & a \end{matrix} \right|.$$

In allen ist $UVW = uvw$ Polardreieck und entsprechen den Geradenpaaren (U), (V), (W) die Punktepaare (u), (v), (w), so daß 1) sich aus allen ergibt.

Durch Π_1 geht Π_2 in $\left| \begin{matrix} a & b & c & d \\ B & A & D & C \end{matrix} \right|$ über, d. h. in sich selber. Jedes der vier Polarfelder führt jedes der drei andern in sich selbst über; jede zwei Basiskurven sind also harmonisch zugeordnet. Das (kommutative) Produkt von zweien ist eine involutorische Homologie; und von UVW, einem gemeinsamen Polardreiecke, muß eine Ecke und die Gegenseite Berührungspol und -sehne oder Zentrum und Axe dieser Homologie sein. In Π_1, Π_2 sind a, b die Polaren von A, c, d die von C, jene und diese entsprechend in der Homologie, also ist $u = (ab, cd)$ die Axe und U das Zentrum für Π_1, Π_2 und ebenso für Π_3, Π_4; v und V sind es für Π_1, Π_3 und Π_2, Π_4, w und W für Π_1, Π_4 und Π_2, Π_3.

Die gemeinsame Involution konjugierter Punkte auf u für Π_1 und Π_2 und die für Π_3 und Π_4 sind diejenigen, welche die zu K gehörige Involution auf u in die zu K' gehörige überführen, und die Doppelpunkte der ersten sind die Berührungspunkte der Basiskurven von Π_1, Π_2 und die der andern diejenigen von Π_3, Π_4; in Nr. 124 wurde gelehrt, wie sie zu konstruieren sind.

334 Was nun die Realität dieser Polarfelder anlangt, so ist unmittelbar klar, daß sie imaginär sind, wenn mit vier reellen gemeinsamen Punkten vier imaginäre gemeinsame Tangenten verbunden sind oder umgekehrt; denn das Polardreieck UVW ist dann reell und in Π_1 sind vier reellen Punkten U, V, W, A drei

reelle Geraden u, v, w und eine imaginäre a zugeordnet (oder umgekehrt).

Sie sind ersichtlich reell, wenn alle gemeinsamen Elemente reell sind.

Sie sind aber auch reell, wenn alle gemeinsamen Elemente imaginär sind; wofern K und K' gleichartig sind, beide reell oder beide reell-imaginär. Denn im andern Falle erhellt wiederum unmittelbar, daß eine reelle Überführung nicht möglich ist.

Für den Fall, daß beide Kurven reell sind, haben wir schon gefunden (Nr. 269), daß den beiden reellen gemeinsamen Sekanten die einzigen reellen Umbilikalpunkte im Chaslesschen Sinne korrespondieren; d. h. wenn A, B und C, D konjugiert imaginär sind, so sind es auch a, b und c, d.

Nachdem wir nun gelernt haben, daß für zwei Polarfelder mindestens ein Paar reeller gemeinsamer Sekanten der Basiskurven (die ein Geradenpaar des Büschels bilden) bestehen mit je einer Involution gemeinsam konjugierter Punkte, können wir auch in dem Falle, wo die beiden Basiskurven reell-imaginär sind, nach Nr. 320 mit Hilfe dieser Involutionen den Büschel herstellen und darauf nach Nr. 269 diesen Büschel in reelle Kollineation zu einem gleichartigen Büschel bringen, speziell zu einem solchen, der aus Kreisen besteht (zu dessen definierenden Involutionen also die absolute Involution gehört). Es entsprechen dann den reell-imaginären Basiskurven, von denen wir ausgingen, reell-imaginäre Kreise, d. h. mit reellen Mittelpunkten und negativen Radiusquadraten. Zwei solche Kreise haben wiederum reelle Ähnlichkeitspunkte, und daher korrespondieren den reellen gemeinsamen Sekanten reelle Umbilikalpunkte, diese Ähnlichkeitspunkte auf der Zentrale, der Polare des unendlich fernen Schnitts jener Sekanten. Folglich gilt dasselbe auch für die Kurven, mit denen wir es zu tun haben; und wenn bei diesen, wie oben, A und B, C und D konjugiert sind, so sind es auch a und b, c und d.

Um nun die transformierenden Polarfelder reell festzulegen und konjugiert imaginäre Elemente zu unterscheiden, müssen wir die Staudtsche Festsetzung (Nr. 78) heranziehen. In der die konjugiert imaginären Punkte A, B darstellenden Involution (gemeinsam) konjugierter Punkte und in der die C, D darstellenden sei dem gemeinsamen Punkte U gepaart U_1 und U_2. Wiederum sei das reelle Paar der ersteren, das zu UU_1 harmonisch ist, $H_1 I_1$; so sei A durch den Sinn $UH_1 U_1 I_1$, B durch den Sinn $UI_1 U_1 H_1$ dargestellt, und, wenn $H_2 I_2$ ebenso in der andern Involution hergestellt ist, C durch $UH_2 U_2 I_2$, D durch $UI_2 U_2 H_2$. Und dual seien a, b, c, d durch $uh_1 u_1 i_1$, $ui_1 u_1 h_1$, $uh_2 u_2 i_2$, $ui_2 u_2 h_2$ dargestellt.

Π_1 legen wir — zunächst als allgemeine Korrelation — fest durch:

$$\left|\begin{matrix} H_1 I_1 H_2 I_2 \\ h_1\; i_1\; h_2\; i_2 \end{matrix}\right|;$$

es entspricht dann dem $U = (H_1 I_1, H_2 I_2)$ die $u = (h_1 i_1, h_2 i_2)$, also, wegen der Harmonizität, den U_1, U_2 die u_1, u_2, daher den Sinnen $UH_1 U_1 I_1, \ldots$ von A, B, C, D die Sinne $uh_1 u_1 i_1, \ldots$ von a, b, c, d; d. h. den A, B, C, D die a, b, c, d, daher auch den V, W die v, w, denn z. B. V ist der reelle Punkt, aus welchem die beiden darstellenden Involutionen von A, B und C, D durch die nämliche Involution projiziert werden und zwar so, daß die Sinne $UH_1 U_1 I_1$ und $UH_2 U_2 I_2$ sich in denselben Sinn im Büschel projizieren und ebenso die beiden andern Sinne; er ist der Schnittpunkt (AC, BD). Nunmehr ist $UVW \equiv uvw$ als Polardreieck und die Korrelation als Polarfeld erkannt.

Π_2, Π_3, Π_4 sind dann:

$$\left|\begin{matrix} H_1 I_1 H_2 I_2 \\ i_1\; h_1\; i_2\; h_2 \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} H_1 I_1 H_2 I_2 \\ h_2\; i_2\; h_1\; i_1 \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} H_1 I_1 H_2 I_2 \\ i_2\; h_2\; i_1\; h_1 \end{matrix}\right|.$$

Für jede der vier Π sind die drei Seiten von uvw die Berührungssehnen ihrer Basiskurve mit denen der drei andern. Ist jene Basiskurve reell, so schneidet sie nur eine der drei Seiten des Polardreiecks imaginär; also sind zwei von den andern Basiskurven reell, die dritte reell-imaginär, weil harmonisch zugeordnet einer reellen Kurve bei reeller doppelter Berührung eine reelle, bei imaginärer eine reell-imaginäre ist. Gehen wir von einer reell-imaginären Basiskurve aus, der ja immer reelle harmonisch zugeordnet sind, so sind die drei andern reell.

Wenn also alle vier Polarfelder reell sind, so sind drei Basiskurven reell, die vierte reell-imaginär, und, da zwei reelle harmonisch zugeordnete Kegelschnitte nicht zugleich Ellipsen sind, so sind von den reellen entweder alle drei Hyperbeln und nur zwei und die dritte Ellipse.

Wenn nur zwei reelle gemeinsame Punkte und daher nur zwei reelle gemeinsame Tangenten vorliegen, was reelle Kegelschnitte K und K' bedingt, so sind bloß zwei der Polarfelder reell, die andern imaginär.

Den reellen gemeinsamen Sekanten korrespondieren reelle Umbilikalpunkte (Nr. 269). Es seien A, B die reellen Schnittpunkte, deren Verbindungslinie durch U geht, so müssen die reellen gemeinsamen Tangenten sich auf u schneiden; sie seien a, b. Die imaginären C, D; c, d seien wie oben in der Staudtschen Weise definiert und H_2, I_2; h_2, i_2 konstruiert.

Die beiden reellen Polarfelder sind:

$$\Pi_1 = \left| \begin{matrix} A\,B\,H_2\,I_2 \\ a\;b\;h_2\;i_2 \end{matrix} \right|, \quad \Pi_2 = \left| \begin{matrix} A\,B\,H_2\,I_2 \\ b\;a\;i_2\;h_2 \end{matrix} \right|.$$

Die einzige reelle Seite u des Polardreiecks ist Berührungssehne der Basiskurven; die Π_1, Π_2 gemeinsame Involution konjugierter Punkte auf ihr ist, wegen des reell-imaginären Paars VW, hyperbolisch, also die doppelte Berührung reell; die beiden Basiskurven sind auch reell und, wegen des oben angeführten Grundes, entweder beide Hyperbeln oder nur eine und die andere Ellipse[1]). —

Daß der Kreis als Basis der Polarisierung besondere Eigenschaften aufweist, ist zu erwarten. Es ist wertvoll, daß der Durchmesser nach dem Pole und die Polare rechtwinklig sind; daraus ergeben sich gewisse konstante Winkel. Z. B. wenn ein Kreis K in bezug auf einen Kreis $\mathfrak{K}$ polarisiert wird, geht die absolute Involution, die ihm als Involution konjugierter Punkte zugehört, in die rechtwinklige Involution um den Mittelpunkt des $\mathfrak{K}$ über, welche für die neue Kurve C Involution konjugierter Geraden wird; so daß sie diesen Mittelpunkt zum einen Brennpunkte erhält. Und umgekehrt, durch Polarisierung in bezug auf einen Kreis um einen Brennpunkt geht jeder Kegelschnitt C in einen Kreis über. Daraus nun, daß beim Kreise K zwei Tangenten mit der Berührungssehne gleiche Winkel bilden, folgt für C, daß der Winkel der Strahlen aus dem Brennpunkte nach zwei Punkten auf ihr durch den Strahl nach dem Schnittpunkt der Tangenten halbiert wird. Der Satz vom konstanten oder supplementären Peripheriewinkel des K über einer Sehne führt zum Satz vom konstanten oder supplementären Winkel, unter dem aus einem Brennpunkte die Strecke auf einer beweglichen Tangente eines Kegelschnittes C zwischen zwei festen gesehen wird.

Ferner ist die Eigenschaft, daß die Entfernungen des Mittelpunktes des Kreises $\mathfrak{K}$ von Pol und Polare konstantes Produkt haben, für Übertragungen zu benutzen. Der Potenzsatz, angewandt auf K und den Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$, lehrt, daß das Produkt der Entfernungen zweier parallelen Tangenten von C von einem Brennpunkte konstant ist.

In der sechsfach unendlichen Mannigfaltigkeit der Dreiecke der 335
Ebene zweier Polarfelder befinden sich die beiden dreifach unendlichen Mannigfaltigkeiten der Polardreiecke des einen und des andern und greifen deshalb im allgemeinen mit einer endlichen Angabe ineinander, mit einem, wie in Nr. 326 erkannt wurde. Oder auch, es ist für ein Dreieck einer bestimmten Ebene eine $(6-3)$-fache Bedingung, Polardreieck eines gegebenen Polarfeldes dieser Ebene zu

1) Vgl. Steiner-Schröters Vorlesungen (3. Aufl.), § 55, wo diese Ergebnisse anders gewonnen sind.

sein; unter den ∞^6 Dreiecken befindet sich daher eine endliche Anzahl von Dreiecken, welche zwei solche dreifachen Bedingungen erfüllen.

Die sechsfach unendlichen Mannigfaltigkeiten von Polvierecken (Nr. 314) zweier Polarfelder derselben Ebene, beide in der achtfach unendlichen Mannigfaltigkeit der Vierecke der Ebene enthalten, greifen mit einer $(2 \cdot 6 - 8)$-fach unendlichen Mannigfaltigkeit ineinander. Oder es ist für ein Viereck einer Ebene eine $(8 - 6)$-fache Bedingung, Polviereck eines in derselben gegebenen Polarfeldes zu sein, und es können $\infty^{8-2 \cdot 2}$ Vierecke zwei solche doppelte Bedingungen erfüllen.

Diese vierfach unendliche Mannigfaltigkeit und die sechsfach unendliche Mannigfaltigkeit der Polvierecke eines dritten Polarfeldes der Ebene greifen mit einer $(4 + 6 - 8)$-fach unendlichen Mannigfaltigkeit ineinander. Oder, drei doppelte Bedingungen der eben erwähnten Art werden von $\infty^{8-3 \cdot 2}$ Vierecken der Ebene erfüllt, und endlich vier von einer endlichen Anzahl von Vierecken. Also:

Zwei, drei, vier Polarfelder derselben Ebene haben ∞^4, ∞^2, eine endliche Anzahl von Polvierecken oder Polvierseiten gemeinsam.

Diese endliche Anzahl scheint noch nicht ermittelt zu sein.

§ 51. Übertragung auf Bündel. Orthogonale Polarbündel. Die unendlich ferne Ebene, das absolute Polarfeld.

336 Projektive Eigenschaften können unmittelbar vom Felde in den Bündel übertragen werden, so die Bestimmung und Konstruktion der Kollineation und Korrelation aus vier Paaren entsprechender Elemente, das Koinzidenzdreieck einer ebenen Kollineation mit seinen Invarianten, die Bedingung für die Möglichkeit, einen Kegelschnitt in sich zu transformieren, die Homologie und der besondere Fall der involutorischen Homologie, die Kernkurven einer ebenen Korrelation mit den ausgezeichneten Elementen $U, \ldots w$, das Polarfeld, usw.

Erwähnen wir gleich den interessanten metrischen Fall der involutorischen Homologie im Bündel, bei welcher Axe und Ebene normal zueinander sind; er ist Symmetrie (im Bündel) in bezug auf die Ebene oder auf die Axe. Ferner heben wir einen metrischen Spezialfall des Polarbündels hervor. Wir erkannten in Nr. 263, daß zwei verschiedene Bündel korrelativ werden, wenn jeder Ebene des einen der zu ihr normale Strahl des andern zugeordnet wird. Es stellte sich heraus, daß dann auch einer Ebene des zweiten Bündels der auf ihr senkrechte Strahl des ersten entspricht.

Liegen die beiden Bündel ineinander, so wird die Korrelation eine involutorische, weil eben jeder Ebene des Bündels in beiderlei Sinne der nämliche Strahl entspricht, der zu ihr senkrechte; der so entstehende Polarbündel heißt orthogonal.

Jede zwei konjugierten Ebenen sind rechtwinklig, weil jede durch den auf der andern senkrechten Strahl geht; ebenso sind es jede zwei konjugierten Strahlen, weil jeder in der auf dem andern senkrechten Ebene liegt; daher sind alle Involutionen konjugierter Strahlen oder Ebenen rechtwinklig, alle Polardreikante dreirechtwinklig. Der orthogonale Polarbündel hat einen reell-imaginären Basiskegel.

Zwei orthogonale Polarbündel mit verschiedenen Scheiteln sind parallel; d. h. zu jedem Paare entsprechender Elemente des einen gibt es ein paralleles Paar entsprechender Elemente im andern.

Ein Bündel enthält, solange sein Scheitel endlich ist, keine unendlich fernen Elemente; daher haben kollineare Bündel, im allgemeinen, keine Fluchtelemente. Mithin fallen die speziellen Fälle, die wir bei kollinearen Feldern zu besprechen hatten: Affinität, Ähnlichkeit weg; kongruente (gleiche) Bündel natürlich sind möglich.

Wir fanden, daß zwei kollineare Felder in perspektiver Lage 337
sind, d. h. alle Verbindungslinien entsprechender Punkte in einen Punkt S zusammenlaufen, wenn alle Punkte der Schnittlinie der beiden Ebenen sich selbst entsprechen; auf ihr treffen sich dann alle entsprechenden Geraden und die verbindenden Ebenen gehen auch durch das Perspektivitätszentrum.

Die räumlich duale Betrachtung führt zu folgendem Ergebnis:

Wenn bei zwei kollinearen Bündeln alle Ebenen des ihnen gemeinsamen Ebenenbüschels sich selbst entsprechen, dann sind diese Bündel in perspektiver Lage, d. h. es existiert eine Ebene σ, in der alle Schnittlinien entsprechender Ebenen gelegen sind.

In der Tat, es seien $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ zwei entsprechende Dreiflache in den beiden Bündeln; die Kante $\alpha\beta$ liegt in einer Ebene jenes gemeinsamen Büschels; also fällt, weil diese sich selbst entspricht, die entsprechende Kante $\alpha'\beta'$ ebenfalls in sie; und ebenso liegen $\alpha\gamma$ und $\alpha'\gamma'$, $\beta\gamma$ und $\beta'\gamma'$ je in derselben Ebene dieses Büschels. Da also bei diesen beiden Dreiflachen die entsprechenden Kanten in drei Ebenen liegen (welche dann notwendig durch die Verbindungslinie der beiden Scheitel gehen), so liegen (Nr. 40) die Schnittlinien $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ entsprechender Ebenen in einer Ebene σ. Dieselbe ist schon bestimmt durch $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$ und bleibt unverändert, wenn γ und γ' sich ändern; also alle Schnittlinien $\xi\xi'$ entsprechender Ebenen der beiden kollinearen Bündel liegen in σ. Entsprechende Strahlen $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ befinden sich, wie wir eben erkannten, je in derselben Ebene des gemeinsamen Büschels und schneiden sich; ihr Schnittpunkt, auf $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$ gelegen, muß sich also auch in σ befinden.

Ein Feld und einen Bündel, die zueinander kollinear sind, kann man im allgemeinen nicht in perspektive Lage bringen, d. h. in solche Lage, daß jedes Element des Feldes mit dem entsprechenden des Bündels inzidiert. Denn dazu ist erforderlich, daß der Büschel des Bündels, welcher der unendlich fernen Punktreihe des Feldes entspricht, einem (und damit jedem) diese Punktreihe projizierenden Büschel gleich sei; was im allgemeinen nicht der Fall ist.

Ordnen wir in zwei Bündeln die parallelen Strahlen einander zu, so hat man Kollineation; denn die Zuordnung ist eindeutig, und durchläuft ein Strahl in dem einen Bündel einen Büschel, so tut es auch der entsprechende, und zwar liegen die beiden Büschel in parallelen Ebenen, so daß auch entsprechende Ebenen parallel sind. Jede Ebene des gemeinsamen Ebenenbüschels, zum einen Bündel gerechnet, deckt sich mit der parallelen, entspricht sich also selbst. Daher sind die beiden Bündel in perspektiver Lage: es existiert eine Ebene, in der alle Schnittlinien entsprechender Ebenen und Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen. Das sind aber unendlich ferne Elemente, und zwar, weil in einem Bündel (mit endlichem Scheitel) eine Ebene von jeder Stellung und ein Strahl von jeder Richtung vorhanden ist, alle unendlich fernen Geraden und Punkte des Raumes.

Wir haben den Inbegriff der sämtlichen unendlich fernen Punkte und Geraden des Raumes als in einer Ebene gelegen anzusehen, welche die unendlich ferne Ebene des Raumes heißt[1]). Bei den Verwandtschaften der Gebilde 3. Stufe werden wir von neuem zur Notwendigkeit dieser Vorstellung geführt werden.

338 Der Parallelismus zweier orthogonalen Polarbündel führt zu einem weiteren wichtigen Begriffe. Zwei entsprechende Elemente des einen Bündels und die zu ihnen parallelen ebenfalls entsprechenden Elemente des andern liefern dieselben unendlich fernen Elemente, ihre Schnittelemente, einen Punkt und eine Gerade, welche entsprechend sind sowohl in dem Polarfelde, welches durch den einen, als in demjenigen welches durch den andern der beiden orthogonalen Polarbündel in die unendlich ferne Ebene eingeschnitten wird. Beide Polarbündel und so alle ∞^3 orthogonalen Polarbündel schneiden in die unendlich ferne Ebene ein und dasselbe Polarfeld, welches wir das absolute Polarfeld nennen wollen. In ihm sind polar der unendlich ferne Punkt eines Parallelstrahlen-Bündels und die unendlich ferne Gerade desjenigen Parallelebenen-Büschels, dessen Ebenen zu den Strahlen des Bündels normal sind; konjugiert sind die unendlich fernen Elemente von zwei rechtwinkligen Strahlen oder zwei rechtwinkligen

1) Poncelet, Traité des proprietés projectives (2. Ausgabe Bd. I) Nr. 580.

Ebenen; so daß sich die Rechtwinkligkeit durch eine Beziehung zu diesem absoluten Polarfelde ausdrücken und infolgedessen projektiv verallgemeinern läßt. Man ersetzt das absolute Polarfeld durch ein beliebiges in endlicher Ebene; normal im verallgemeinerten Sinne, quasinormal, sind dann eine Gerade und eine Ebene, welche die Ebene dieses Polarfeldes in polaren Elementen, zwei Strahlen oder zwei Ebenen, welche sie in konjugierten Elementen treffen.

Die unendlich ferne Ebene schneidet die Gegenkanten eines Tetraeders in den Gegenecken eines vollständigen Vierseits. Sind daher zweimal zwei Gegenecken konjugiert in dem absoluten Polarfelde, so sind es auch die dritten (Nr. 314), d. h. wenn bei einem Tetraeder zweimal zwei Gegenkanten rechtwinklig sind, so sind es auch die dritten (Nr. 101).

Das absolute Polarfeld hat eine reell-imaginäre Basis; diese Basiskurve wird die absolute Kurve des Raums genannt: ihr reeller Repräsentant ist eben das absolute Polarfeld.

Die absolute Involution einer Ebene (und jeder Parallelebene) ist diejenige, in welcher die unendlich fernen Punkte rechtwinkliger Geraden der Ebene gepaart sind. Also ist sie eine Involution konjugierter Elemente des absoluten Polarfeldes; ihre imaginären Doppelpunkte, also die absoluten Punkte der Ebene sind die Schnitte der unendlich fernen Gerade derselben mit der absoluten Kurve. Eine Involution konjugierter Strahlen des absoluten Polarfeldes ist der Schnitt einer rechtwinkligen Ebeneninvolution; die imaginären Doppelstrahlen jener sind die Tangenten aus dem Scheitel an die Basiskurve, folglich berühren auch die imaginären Doppelebenen der Ebeneninvolution diese Kurve. Die imaginären Doppelstrahlen jeder rechtwinkligen Strahleninvolution (isotrope Strahlen des Raumes) treffen, die imaginären Doppelebenen jeder rechtwinkligen Ebeneninvolution (isotrope Ebenen) berühren die absolute Kurve.

Weil jedes Paar einer Involution zu den Doppelelementen harmonisch ist, so wandelt sich die Rechtwinkligkeit gleichartiger Elemente in eine Harmonizität um, also in eine projektiv verallgemeinbare Eigenschaft.

Zwei Strahlen derselben Ebene, bzw. zwei Ebenen sind rechtwinklig, wenn sie zu den isotropen Strahlen oder Ebenen ihres Büschels harmonisch sind, oder verallgemeinert, nachdem die absolute Kurve durch die (reelle oder reell-imaginäre) Basiskurve eines beliebigen reellen Polarfeldes ersetzt ist: sie sind quasinormal, wenn sie zu denjenigen Elementen ihres Büschels harmonisch sind, welche diese Basiskurve treffen, bzw. berühren.

Zwei ineinander liegende projektive Strahlenbüschel sind gleich und gleichsinnig oder ungleichsinnig, wenn die isotropen Strahlen des Büschels sich selbst oder involutorisch einander entsprechen (Nr. 76).

Sind diese Büschel Normalschnitte zweier ineinander liegender Ebenenbüschel, so daß der unendlich ferne Punkt der Axe polar ist, im absoluten Polarfelde, zur unendlich fernen Gerade der schneidenden Ebene, so gehen die isotropen Strahlen in dieser nach den Schnittpunkten dieser Polare mit der absoluten Kurve und liegen in den isotropen Ebenen des Ebenenbüschels, die in den zugehörigen Tangenten schneiden.

Zwei ineinander liegende Ebenenbüschel sind ebenfalls gleich und gleichsinnig oder ungleichsinnig, wenn die isotropen Ebenen des Büschels sich selbst oder involutorisch einander entsprechen.

Der Leser bilde den allgemeineren Satz für Büschel um parallele Axen.

Wir setzen bei einer Kugel als bekannt voraus, daß die Polarebene eines unendlich fernen Punktes diejenige Ebene durch den Mittelpunkt ist, welche auf dem Durchmesser nach jenem Punkte senkrecht steht. Daraus folgt, daß das von einer Kugel in der unendlich fernen Ebene induzierte Polarfeld (Nr. 323) das absolute ist.

Alle Kugeln des Raums induzieren in der unendlich fernen Ebene das absolute Polarfeld und gehen durch dessen Basiskurve, die absolute Kurve, welche deshalb häufig, aber etwas umständlich der unendlich ferne imaginäre Kugelkreis genannt wird[1]). Poncelet verdanken wir diesen wichtigen Begriff, der für die Metrik fundamental geworden ist[2]).

Wie die absoluten Punkte einer Ebene den Grund dafür liefern, daß zwei Kreise derselben Ebene im Endlichen nicht mehr als zwei gemeinsame Punkte haben, so lehrt die absolute Kurve, daß zwei Kugeln im Endlichen nur eine Kurve 2. Ordnung gemein haben: in der Potenzebene.

Wir wollen sofort diesen Begriff zu einigen Folgerungen aus den Sätzen von § 28 verwerten.

Es liege eine Raumkurve R vor von der Ordnung n, der Klasse n' und dem Range r. Sie ist eindeutig bezogen auf den unendlich fernen Schnitt $\mathfrak{C}^r_{n'}$ r^{ter} Ordnung n'^{ter} Klasse ihrer Tangenten-

1) Bei Staudt Normalkreis (Beiträge zur Geometrie der Lage, Nr. 194), in Frankreich: courbe ombilicale; the Absolute bei Cayley im Sixth Memoir upon Quantics (Philos. Trans., Bd. 149, 1859, S. 61; Math. Papers, Bd. 2, S. 561), von Nr. 209 ab.

2) Traité des propriétés projectives (in der 2. Ausgabe, Bd. I), Nr. 630.

fläche und auf die Polarkurve $\mathfrak{C}_r^{n'}$ desselben in bezug auf die absolute Kurve oder im absoluten Polarfelde.

Die Binormalen von R verbinden entsprechende Punkte von R und $\mathfrak{C}_r^{n'}$, erzeugen also eine Regelfläche vom Grade $n + n'$. Die Normalebenen verbinden die Punkte von R mit den entsprechenden Tangenten der Kurve $\mathfrak{C}_r^{n'}$, die wir als ausgeartete Regelfläche r^{ten} Grades auffassen können; also umhüllen sie einen Torsus von der Klasse $n + r$.

Die rektifizierenden Ebenen von R verbinden die Tangenten von R mit den entsprechenden Punkten von $\mathfrak{C}_r^{n'}$; also ist ihr Torsus von der Klasse $r + n'$.

In den Hauptnormalen schneiden sich entsprechende Schmiegungsebenen und Normalebenen; daher ist der Grad ihrer Regelfläche $n + r + n'$.

Die Binormalen sind Schnittlinien entsprechender Normalebenen und rektifizierender Ebenen; die Reduktion des Grades ihrer Regelfläche von $(n + r) + (r + n')$ auf $n + n'$, also um $2r$ rührt davon her, daß $2r$-mal diese Ebenen sich vereinigen. Dies bewirkt, daß ein Krümmungs-Mittelpunkt von R sich mit dem Punkte der Kurve vereinigt, zu dem er gehört; denn eine mit der rektifizierenden Ebene vereinigte Normalebene schneidet sich mit der folgenden auf der Kurve. Ist x die Ordnung der Kurve der Krümmungs-Mittelpunkte, so muß, weil die Hauptnormalen entsprechende Punkte der R und dieser Kurve verbinden,

$$n + x - 2r = n + n' + r$$

sein, also ist die genannte Ordnung $n' + 3r$.

Die Krümmungsaxen verbinden wiederum die Krümmungs-Mittelpunkte mit den entsprechenden Punkten von $\mathfrak{C}_r^{n'}$; eine Vereinigung findet bei den $2n'$ Punkten der R statt, deren Schmiegungsebenen die absolute Kurve berühren. Folglich hat die abwickelbare Fläche der Krümmungsaxen (der Torsus der Normalebenen) die Ordnung $(n' + 3r) + n' - 2n' = 3r$.

Bei der kubischen Raumkurve, wo $n = n' = 3$, $r = 4$, gilt also:

Die Regelflächen der Binormalen und Hauptnormalen haben den Grad 6, 10, die Torsen der Normalebenen und der rektifizierenden Ebenen die Klasse 7; die abwickelbare Fläche der Krümmungsaxen ist 12. Ordnung und die Kurve der Krümmungs-Mittelpunkte 15. Ordnung[1]).

In bezug auf eine Fläche 2. Grades erhält man um jeden 339
Punkt P einen Polarbündel, in welchem eine Ebene des

1) Zeitschrift für Mathem. und Phys., Jahrg. 40, S. 1.

Bündels und der nach ihrem Pole in bezug auf die Fläche gehende Strahl polar sind. Sein Basiskegel ist der Tangentialkegel aus P an die Fläche.

Der Beweis ist räumlich dual zu dem von Nr. 323 zu führen.

Sind der Punkt P und die dort zugrunde gelegte Ebene Π polar in bezug auf die Fläche, so liegt der Pol X jeder Ebene ξ durch P in Π. Daraus folgt, daß zwei polare Elemente des zu P gehörigen Polarbündels immer durch zwei polare Elemente des zu Π gehörigen Polarfeldes gehen, denn in diesem sind X und der Schnitt mit ξ polar. Der Polarbündel und das Polarfeld sind also perspektiv zueinander, die eine Basis zur andern: die Basiskurve ist Berührungskurve des Basiskegels. Sind beide imaginär, so liegen in den Polarkorrelationen die darstellenden reellen Gebilde vor.

Diese perspektive Lage gibt also einen einfacheren Beweis für den um einen Punkt P induzierten Polarbündel, als ihn die duale Betrachtung liefert.

Insbesondere sind die zum Mittelpunkte der Fläche und die zur unendlich fernen Ebene gehörigen Polarkorrelationen perspektiv: der Basiskegel der ersteren ist der Asymptotenkegel, die Basiskurve des letzteren der unendlich ferne Schnitt der Fläche. In bezug auf eine Kugel ist der zum Mittelpunkte gehörige Polarbündel der orthogonale, das zur unendlich fernen Ebene gehörige Polarfeld das absolute. Der imaginäre Asymptotenkegel ist der isotrope, der aus dem Mittelpunkte die absolute Kurve projiziert. Sein reeller Repräsentant ist jener orthogonale Polarbündel.

§ 52. Metrische Eigenschaften kollinearer und korrelativer Bündel, Axen, Hauptebenen derselben. Fokalaxen und zyklische Ebenen eines Polarbündels.

340 Eine wichtige metrische Eigenschaft für kollineare und korrelative Bündel ist folgende.

Zwei kollineare sowohl wie zwei korrelative Bündel mit endlichen Scheiteln besitzen stets zwei vollständig reelle Dreikante oder Dreiflache, welche dreirechtwinklig sind und einander entsprechen.

Dies ist analog zu dem Satze von den zwei reellen entsprechenden rechten Winkeln projektiver Büschel.

Zunächst seien kollineare Bündel betrachtet. Zu einem Strahle x des ersten sei x' der entsprechende im zweiten, ξ' die zu ihm normale Ebene in diesem, ξ die ihr entsprechende Ebene im ersten und x_1 der auf dieser normale Strahl ebenfalls im ersten Bündel. Durchläuft x diesen Bündel, so bewegen sich x und x' kollinear, x' und ξ' korrelativ (einen orthogonalen Polarbündel erzeugend), ξ' und ξ kollinear, ξ und x_1 korrelativ, also x und x_1 kollinear in demselben Bündel. Es existiert mithin mindestens ein reeller Koinzidenzstrahl r; gehen dann r', ρ', ρ, r_1 aus ihm in der obigen Weise hervor, so ist $r_1 \equiv r$; r steht als r_1 auf ρ senkrecht, und die beiden ihnen entsprechenden Elemente r', ρ' sind auch normal.

Wir haben drei Paare entsprechender Strahlen, deren normale Ebenen auch entsprechend sind, davon mindestens eins, r, r', reell.

Aber die projektiven Strahlenbüschel in ρ und ρ' enthalten, nach dem oben zitierten analogen Satze, zwei reelle entsprechenden rechten Winkel st, $s't'$; bezeichnen wir nun die entsprechenden Ebenen tr und $t'r'$ mit σ, σ' und die sr, $s'r'$ mit τ, τ', so sind auch σ und σ' bzw. auf s und s', τ und τ' auf t und t' normal; so daß tatsächlich drei reelle (und im allgemeinen nur drei) Paare entsprechender Strahlen r und r', s und s', t und t' vorhanden sind, deren normale Ebenen ρ und ρ', σ und σ', τ und τ' auch entsprechend sind.

Diese Strahlen und Ebenen sind in jedem der Bündel die Kanten und Ebenen desselben Dreikants, und wir haben in:

$$rst \equiv \rho\sigma\tau \quad \text{und} \quad r's't' \equiv \rho'\sigma'\tau'$$

die beiden entsprechenden dreirechtwinkligen Dreikante unseres Satzes. Diese Kanten und Ebenen mögen die Axen[1]) und Hauptebenen der kollinearen Bündel heißen.

Die obige Hilfskollineation im ersten Bündel hat also drei reelle Koinzidenzstrahlen.

Ähnlich wird bei der Korrelation verfahren; dem x aus dem ersten Bündel entspreche ξ' im zweiten, auf der x' senkrecht stehe; diesem entspreche ξ und darauf stehe x_1 normal. Sei r der zweifellos vorhandene reelle Koinzidenzstrahl der Kollineation im ersten Bündel, in welcher x und x_1 entsprechend sind, und seien ρ', r', ρ, r_1 aus ihm abgeleitet, so daß r_1 mit r identisch ist; so sind die zu r und ρ' normalen Elemente ρ und r' wiederum entsprechend. In den entsprechenden und projektiven Büscheln von Strahlen in ρ und Ebenen um r' gibt es zwei reelle entsprechenden rechten Winkel st und $\sigma'\tau'$. Ist wiederum $tr = \sigma$, $sr = \tau$, $\tau'\rho' = s'$, $\sigma'\rho' = t'$, so haben wir drei reelle Paare entsprechender Elemente r und ρ', s und σ', t und τ', deren normale Elemente ρ und r', σ und s', τ und t' wiederum korrespondieren; sie bilden die beiden entsprechenden dreirechtwinkligen Dreikante oder Dreiflache:

$$rst \equiv \rho\sigma\tau \quad \text{und} \quad \rho'\sigma'\tau' \equiv r's't'.$$

Vereinigt man die beiden Bündel mit ihren Scheiteln und läßt die beiden kongruenten Dreikante sich decken und zwar so, daß r', s', t'

---

1) Oft Hauptaxen genannt, doch meistens bloß Axen, was auch wohl genügt.

auf r, s, t und daher ρ', σ', τ' auf ρ, σ, τ fallen, — was auf acht Weisen möglich ist —, so ist ein Polardreikant entstanden, und die Bündel sind involutorisch geworden, bilden einen Polarbündel.

Zwei korrelative Bündel lassen sich so in einander legen, daß sie einen Polarbündel bilden.

Den Beweis für die entsprechenden dreirechtwinkligen Dreikante kann man auch dadurch führen, daß man zeigt, daß die beiden kollinearen oder korrelativen Bündel in der unendlich fernen Ebene kollineare oder korrelative Felder hervorrufen, in denen zwei Polardreiecke des absoluten Polarfeldes entsprechend sind.

In der Tat besitzt jede ebene Kollineation oder Korrelation ein Paar entsprechender Dreiecke, welche gleichzeitig Polardreiecke eines gegebenen Polarfeldes Π sind; denn sie verwandelt dasselbe in ein anderes Polarfeld, das mit Π ein Polardreieck gemein hat. Dies als Dreieck des zweiten der ineinander liegenden kollinearen oder korrelativen Felder und sein entsprechendes im ersten sind die fraglichen Dreiecke. Sie sind sicher vollständig reell, wenn das Polarfeld eine reell-imaginäre Basis hat, wie in unserm Falle.

341 Zwei ineinander liegende Polarbündel haben (Nr. 326) ein Polardreikant gemein; es ist vollständig reell, wenn mindestens einer von ihnen einen reell-imaginären Basiskegel besitzt.

Das ist der Fall, wenn der zweite Polarbündel ein orthogonaler ist; das gemeinsame Polardreikant ist dann, weil zu diesem gehörig, dreirechtwinklig.

Jeder Polarbündel hat ein dreirechtwinkliges Polardreikant, das immer vollständig reell ist.

Und wenn zwei korrelative Bündel so ineinander gelegt sind, daß sie involutorisch werden, so müssen sich in diesem dreirechtwinkligen Polardreikant, von welchem ja jede Kante in beiderlei Sinne der gegenüberliegenden Ebene polar ist, die beiden entsprechenden dreirechtwinkligen Dreikante vereinigt haben; so daß die Herstellung der involutorischen Lage nur auf obige Weise möglich ist.

Die Kanten und Ebenen dieses dreirechtwinkligen Polardreikants eines Polarbündels nennt man die Axen[1]) und Hauptebenen desselben und des zugehörigen Basiskegels.

In der involutorischen Homologie, welche zwei Gegenelemente dieses Dreikants zur Axe und zur Ebene hat, entspricht der Polarbündel und der Kegel sich selbst; jede zwei Elemente des Bündels, die in

---

1) Wenn die elementare Stereometrie vielfach beim schiefen Kreiskegel die Gerade vom Mittelpunkte des Kreises nach der Spitze Axe nennt, so ist das nicht richtig.

bezug auf die Axe symmetrisch sind, sind es auch in bezug auf die gegenüberliegende Hauptebene.

In einer Ebene, die senkrecht zu einer Axe und daher parallel zur polaren Hauptebene ist, ist der Fußpunkt jener der Mittelpunkt des ausgeschnittenen (reellen oder reell-imaginären) Kegelschnitts.

Ein reeller Basiskegel hat, wie bei jedem Polardreikant, so auch bei diesem Axendreikant mit zwei Hauptebenen reellen, mit der dritten imaginären Schnitt, so daß die dieser gegenüberliegende Axe ein innerer Strahl, die beiden andern äußere Strahlen sind. Die von der inneren Axe halbierten Winkel der Kanten in den reell schneidenden Hauptebenen heißen die Öffnungen des Kegels.

Die Axen und gegenüberliegenden Hauptebenen sind im allgemeinen die einzigen polaren und rechtwinkligen Elemente des Polarbündels.

Aber ein Polarbündel Π kann (Nr. 328) ∞^1 dreirecht- 342
winklige Polardreikante besitzen, d. h. ∞^1 Polardreikante mit dem konzentrischen orthogonalen Polarbündel gemeinsam haben, wenn ihr Produkt eine Homologie ist, die dann die rechtwinkligen und polaren Elemente, welche allen jenen Polardreikanten als Gegenelemente gemeinsam sind, zur Axe s und zur Ebene σ hat. Die gemeinsamen Involutionen konjugierter Ebenen bzw. Strahlen um s und in σ sind rechtwinklig, und die beiden Basiskegel berühren sich doppelt.

Für jede Ebene senkrecht zu s, deren ausgeschnittenes Polarfeld ja den Fußpunkt zum Mittelpunkt hat, ist die Involution in bezug auf dies Polarfeld konjugierter Strahlen um denselben, ausgeschnitten aus der rechtwinkligen Involution um s, ebenfalls rechtwinklig; also ist der Schnitt ein Kreis, und der Kegel ein (reeller oder reell-imaginärer) gerader Kreiskegel oder Rotationskegel. Die ∞^1 gemeinsamen Polardreikante führen zu der ausgezeichneten Axe s, der Drehaxe, und ∞^1 Axen in σ, und der ausgezeichneten Haupt- oder Symmetrieebene σ und ∞^1 andern durch s. Umgekehrt leuchtet unmittelbar ein, daß ein Rotationskegel ∞^1 derartige dreirechtwinklige Polardreikante besitzt. So ergibt sich als charakteristische Eigenschaft des Rotationskegels, daß er den konzentrischen isotropen Kegel oder einfacher die absolute Kurve doppelt berührt.

Und da eine Fläche 2. Grades Rotationsfläche ist, wenn das für ihren Asymptotenkegel gilt, so besteht das Kennzeichen in der letzteren Form für jede Rotationsfläche 2. Grades.

Ist Π der Polarbündel eines Rotationskegels aus O und Π_0 der konzentrische orthogonale Polarbündel, so ist ihr Produkt eine Homologie Γ mit Axe s und Ebene σ, welche normal sind. Aus $\Pi\Pi_0 = \Gamma$ folgt: $\Gamma\Pi_0 = \Pi$. Die ∞^3 derartigen Homologien führen, mit dem festen orthogonalen Polarbündel multipliziert, zu allen „Rotations-Polarbündeln“ aus O. Diejenigen mit derselben Invariante geben offenbar kongruente Polarbündel und Kegel. Von der Invariante wird es daher abhängen, ob der Kegel reell oder reell-imaginär ist. Die Involution konjugierter Strahlen in σ ist für Π und Π_0 dieselbe, also auch für Π rechtwinklig, und die Schnitte von σ mit dem Kegel sind imaginär; folglich muß jede Ebene μ durch s reell oder imaginär schneiden je nach der Art des Kegels. Seien also in μ die Strahlen x und x_1 entsprechend in Γ, so ist die Invariante:

$$(s\sigma x x_1) = \operatorname{cotg} sx_1 : \operatorname{cotg} sx = \lambda;$$

wenn dann x' die Spur der zu x_1 normalen Ebene ξ in μ, also normal zu x_1 ist, so sind x und x' konjugiert in Π, und die Potenz der Involution konjugierter Strahlen von Π in μ, bezogen auf den Zentralstrahl s, ist $\operatorname{cotg} sx \cdot \operatorname{cotg} sx'$, also $= -\frac{1}{\lambda}$, weil

$$\operatorname{cotg} sx_1 \cdot \operatorname{cotg} sx' = -1.$$

Danach führen negative Invarianten der Homologie zu reellen, positive zu reell-imaginären Rotationskegeln.

Ist für einen Polarbündel zunächt das dreirechtwinklige Polardreikant $rst \equiv \rho\sigma\tau$ gegeben, so hat man, wenn man durch polare Elemente p, π die endgültige Bestimmung so treffen will, daß ein Rotationskegel sich ergibt, dessen Axe s ist, dafür zu sorgen, daß in ρ und τ die Involutionen konjugierter Strahlen kongruent ausfallen. Den Schnitten (rp, ρ), (tp, τ) sind die $\pi\rho$, $\pi\tau$ konjugiert. Hat man daher p in die eine Halbierungsebene von $\rho\tau$ gelegt, so ist der Dreistrahl $s, t, (rp, \rho)$ in ρ dem Dreistrahle $s, r, (tp, \tau)$ in τ kongruent; damit dieser Kongruenz sich noch $\pi\rho$ und $\pi\tau$ einfügen, muß π zu jener Halbierungsebene normal sein. Es hat keine Schwierigkeit, hyperbolische, bzw. elliptische Involution zu erzielen, d. h. einen reellen, bzw. reell-imaginären Rotationskegel.

343 Die vier gemeinsamen Kanten eines Kegels 2. Grades und des konzentrischen isotropen Kegels liefern sechs Verbindungsebenen, welche je dieselbe Involution konjugierter Strahlen tragen, eine rechtwinklige wegen des letzteren Kegels. Weil die Axen das Diagonaldreikant dieses Vierkants bilden, so haben wir:

Jeder Kegel 2. Grades oder jeder Polarbündel besitzt sechs Ebenen, welche rechtwinklige Involutionen konjugierter Strahlen tragen; durch jede Axe gehen zwei, und nur bei einer sind sie reell (Nr. 326).

Sie heißen die zyklischen Ebenen des Kegels oder Polarbündels.

Eine Parallelebene zu einer solchen Ebene ζ schneidet nämlich aus dem Kegel einen Kreis aus. Die zur rechtwinkligen Involution konjugierter Strahlen in ζ perspektive Involution konjugierter Ebenen um den Polarstrahl von ζ wird durch die Parallelebene in einer ebenfalls rechtwinkligen Involution geschnitten, welche für den Schnitt, der die Spur des Polarstrahls zum Mittelpunkte hat, die Involution konjugierter Durchmesser ist.

Die sämtlichen Kegel 2. Grades, welche durch jene vier imaginären Kanten gehen oder denen die rechtwinkligen Involutionen konjugierter Strahlen in den beiden reellen zyklischen Ebenen gemeinsam sind, bilden einen Büschel konzyklischer Kegel 2. Grades.

Die gemeinsamen Tangentialebenen des gegebenen Kegels 2. Grades und des konzentrischen isotropen Kegels führen in ihren Schnittlinien zu den Strahlen, welche in bezug auf den Kegel rechtwinklige Involutionen konjugierter Ebenen tragen.

Jeder Kegel 2. Grades oder jeder Polarbündel besitzt sechs Strahlen, welche rechtwinklige Involutionen konjugierter Ebenen tragen; in jeder Hauptebene liegen zwei und nur in einer sind sie reell.

Sie heißen die Fokalaxen[1]) des Kegels oder Polarbündels.

Eine Ebene, die zu einer Fokalaxe normal ist, schneidet einen Kegelschnitt aus, der im Spurpunkt derselben einen Brennpunkt hat; die andern Fokalaxen gehen nicht durch Brennpunkte.

Alle Kegel 2. Grades, denen jene vier imaginären Berührungsebenen oder die rechtwinkligen Involutionen um die beiden reellen Fokalaxen als Involutionen konjugierter Ebenen gemeinsam sind, bilden eine Schar konfokaler Kegel.

Wir haben gelernt (Nr. 269, 334), daß bei zwei reell-imaginären Kegelschnitten den reellen gemeinsamen Sekanten reelle Umbilikalpunkte korrespondieren, also jene und diese mit Gegenelementen des gemeinsamen Polardreiecks inzidieren, hingegen, wenn der eine Kegelschnitt reell, der andere reell-imaginär ist, die reellen gemeinsamen Sekanten und reellen Umbilikalpunkte nicht korrespondieren, nicht mit Gegenelementen des Polardreiecks inzidieren. Übertragen wir das auf die Kegel, so folgt, weil der isotrope Kegel reell-imaginär ist:

Bei einem Polarbündel mit reell-imaginärem Basiskegel liegen die Axe, durch welche die reellen zyklischen Ebenen gehen, und die Hauptebene, in der die reellen Fokalaxen sich befinden, gegenüber, hingegen nicht, wenn der Basiskegel reell ist.

Es sollen jedoch diese ausgezeichneten Elemente eines Polarbündels, ähnlich wie in Nr. 317, abgeleitet werden, ohne daß die absolute Kurve herangezogen wird. Wir konstruieren reell die sie darstellenden Involutionen, zunächst in den Hauptebenen die Fokalinvolutionen. Es sei α irgend eine der drei Hauptebenen, q ein

1) Es ist wohl zu unterscheiden zwischen Fokalaxen und Axen schlechthin oder Hauptaxen.

Strahl des Bündels in ihr; zu jeder Ebene π durch ihn werde die rechtwinklige und konjugierte Ebene π' konstruiert. Die Polarstrahlen der π sowohl als die zu ihnen normalen Strahlen des Bündels beschreiben zwei zum Büschel der π projektive Strahlenbüschel in der Polarebene von q und in der zu q senkrechten Ebene. In a, der zu α senkrechten Axe, vereinigen sich die zu α, einer von den π, gehörigen Strahlen, die Strahlenbüschel werden also perspektiv, und das Erzeugnis der Verbindungsebenen π' ist ein Ebenenbüschel, dessen Axe q' in α liegt, denn zu der in q auf α senkrechten Ebene gehört α als π'. Dieser Ebenenbüschel der π' wird dadurch dem der π projektiv. Also gehen die den Ebenen π durch q konjugierten und rechtwinkligen Ebenen π' durch einen festen Strahl q' von α, der dem q involutorisch zugeordnet wird; die involutorischen Büschel der q und q' werden nämlich in α eingeschnitten durch die projektiven Ebenenbüschel um zwei analog beschaffene Geraden r, r' in einer zweiten Hauptebene, etwa β. Da die Rechtwinkligkeit und die Konjugiertheit gegenseitig stattfindet, so muß involutorisches Entsprechen stattfinden; andererseits entsprechen in den Büscheln r, r' der gemeinsamen Ebene β die zu ihr in r', r senkrechten Ebenen, und ihre Schnittlinie b ist die involutorische Axe. Mithin schneidet die durch sie gehende α die Büschel involutorisch.

So ergeben sich die drei Fokalinvolutionen in den Hauptebenen; jede zwei rechtwinkligen und konjugierten Ebenen gehen durch gepaarte Geraden einer jeden.

Daraus folgt, daß diese Involutionen verbunden sind, denn den drei Strahlen in einer Ebene π sind die Strahlen in der rechtwinkligen und konjugierten Ebene π' gepaart.

Eine von ihnen ist daher notwendig hyperbolisch; ist f ein Doppelstrahl derselben, so geht für jede Ebene durch ihn auch die rechtwinklige und konjugierte Ebene durch ihn; d. h. er trägt eine rechtwinklige Involution konjugierter Strahlen, ist Fokalaxe. Diese Involution schneidet dann in die beiden andern Hauptebenen die Fokalinvolutionen ein, also sind die andern Fokalinvolutionen elliptisch und repräsentieren die imaginären Fokalaxen. In jeder von den Fokalinvolutionen bilden die beiden Axen das rechtwinklige Paar.

Durch die beiden reellen Fokalaxen ist die ganze Figur der drei Involutionen bestimmt.

Zwei den Kegel erzeugende projektive Strahlenbüschel werden aus einer Fokalaxe durch projektive Ebenenbüschel projiziert, deren Koinzidenzebenen die Tangentialebenen durch sie sind, d. h. die isotropen Doppelebenen der rechtwinkligen Involution konjugierter Ebenen; daher sind diese Büschel gleich und gleichlaufend.

Das rechtwinklige Paar irgend einer Involution konjugierter

Ebenen geht durch gepaarte Strahlen jeder der Fokalinvolutionen und halbiert die Winkel der Ebenen aus dem Trägerstrahl nach den Fokalaxen, welche die Doppelstrahlen sind, insbesondere die Winkel der Ebenen nach den reellen Fokalaxen. Dieses rechtwinklige Paar besteht bei einer Kante des Kegels aus der Tangentialebene und der Normalebene. Daraus folgt, daß konfokale Kegel sich in jeder gemeinsamen Kante rechtwinklig schneiden.

Wie dann hieraus weitere metrische Sätze abgeleitet werden, insbesondere der Satz über die konstante Summe oder Differenz[1]) der Winkel der Kegelkanten mit den reellen Fokalaxen, sehe man z. B. in Reyes Geometrie der Lage, 4. Aufl., 1. Abt., 18. Vortrag.

Wir stellen analog für jede Axe die Involution her, deren Doppelebenen die zyklischen Ebenen sind. In einer Ebene κ durch die Axe a sei p ein Strahl des Bündels; der rechtwinklige und konjugierte Strahl p', die Schnittlinie der Polarebene von p mit der zu p senkrechten Ebene im Bündel, erzeugt einen Strahlenbüschel, da diese Ebenen projektive Büschel beschreiben in perspektiver Lage, denn kommt p nach a, so vereinigen sie sich in α. Die Ebene κ' des Strahlenbüschels geht ebenfalls durch a, denn a ist rechtwinklig und konjugiert zu $\kappa\alpha$. Dieser Büschel in κ' ist projektiv zu den beiden ihn erzeugenden Ebenenbüscheln und daher zu dem in κ; es sind in ihnen zwei Strahlen homolog, die rechtwinklig und konjugiert sind. Seien λ, λ' zwei ebenso einander zugeordnete Ebenen durch eine zweite Axe b, so projizieren die einander zugeordneten Ebenen κ, κ' durch a entsprechende Strahlen der Büschel in λ, λ', also bewegen sie sich projektiv und überdies involutorisch, weil a in der involutorischen Ebene β der Büschel in λ, λ' liegt.

Das ist die gesuchte Involution um a; jede ihrer Doppelebenen enthält für jeden ihrer Strahlen aus dem Bündel auch den rechtwinkligen und konjugierten Strahl, trägt also eine rechtwinklige Involution konjugierter Strahlen und ist eine zyklische Ebene.

Die drei Involutionen sind wiederum verbunden; denn drei Ebenen aus ihnen, die in einen Strahl zusammenlaufen, sind die drei gepaarrt, die sich im rechtwinkligen und konjugierten Strahle schneiden. Daß nur eine hyperbolisch ist, ergibt sich ähnlich wie vorhin.

Die beiden Hauptebenen bilden stets das rechtwinklige Paar. Und durch die beiden reellen zyklischen Ebenen ist wieder die ganze Figur der drei Involutionen bestimmt.

---

1) Summe, wenn Halbkanten k desselben Halbmantels und Halbstrahlen f, f_1 der Fokalaxen genommen werden, die von diesem eingeschlossen werden, Differenz, wenn von der einen Fokalaxe der andere Halbstrahl f_1' genommen wird; die Konstanten $kf + kf_1$ und $kf_1' - kf'$ sind supplementär.

Zwei den Kegel erzeugende projektive Ebenenbüschel schneiden in eine zyklische Ebene gleiche und gleichlaufende Strahlenbüschel ein; denn die isotropen Kanten, in denen sie den Kegel schneidet, sind die Koinzidenzstrahlen dieser Büschel.

Mit den Tangentialebenen des Kegels bilden die (reellen) zyklischen Ebenen Winkel von konstanter Summe oder Differenz[1]).

Der einem Polarbündel konzentrische orthogonale Polarbündel führt das Dreikant der Axen und Hauptebenen in sich selbst über, den Basiskegel in den Normal- (oder Supplementar-)Kegel, von dem jede Kante und zugehörige Berührungsebene normal ist zu einer Berührungsebene und der zugehörigen Berührungskante jenes Kegels, die Fokalaxen und zyklischen Ebenen des einen in die zyklischen Ebenen und die Fokalaxen des andern.

Beim reellen Kegel 2. Grades liegen die reellen Fokalaxen in derjenigen den Kegel reell schneidenden Hauptebene, welche den größeren inneren Winkel zwischen den Schnittkanten (Öffnung) hat, oder, was dasselbe, die größere Potenz der Involution konjugierter Strahlen, bezogen auf die innere Axe als Zentralstrahl, hat, und die reellen zyklischen Ebenen gehen durch die in ihr liegende äußere Axe.

Schneidet man nämlich den Kegel mit einer zu der inneren Axe normalen Ebene, so geht jene Hauptebene durch die größere Axe der Schnittellipse. Freilich gehen die (reellen) Fokalaxen nicht durch deren (reelle) Brennpunkte, die Spuren jener liegen vielmehr näher am Mittelpunkte als diese. Stellen wir aber über die Ellipse einen normalen Zylinder, so gehen dessen Fokalaxen durch die Brennpunkte, und sie bleiben in derselben Hauptebene, wenn die Ellipse festgehalten und die Spitze auf der Axe in die frühere Lage gebracht wird, da eine Vereinigung der Fokalaxen nur beim Rotationskegel eintreten kann, dieser hier nicht vorkommt.

Die reellen zyklischen Ebenen müssen durch eine der äußeren Axen gehen, weil sie den Kegel imaginär schneiden; nach dem obigen Ergebnisse ist das nicht die der eben besprochenen Hauptebene mit der größeren Öffnung gegenüberliegende, sondern die in ihr liegende. Dies folgt auch daraus, daß zwei Normalkegel in derselben Hauptebene supplementäre Öffnungen haben; also liegen für den Normalkegel des gegebenen die reellen Fokalaxen in der andern reell schneidenden Hauptebene, welche für ihn die mit der größeren Öffnung ist, und die reellen zyklischen Ebenen des gegebenen gehen durch die Gegenaxe.

Für den Polarbündel mit reell-imaginärem Basiskegel

---

1) Vgl. Reye a. a. O.

führen wir den Begriff der homogenen (negativen) Halbaxen-Quadrate ein; die Axen seien mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bezeichnet. Wir schneiden mit einer Ebene, welche auf $\mathfrak{c}$ in der Entfernung c vom Scheitel normal ist; das ausgeschnittene Polarfeld habe auf Parallelen zu $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ die Halbaxen-Quadrate $-a^2$, $-b^2$ (Potenzen der Involutionen konjugierter Punkte); also sind die Potenzen der Involutionen konjugierter Strahlen in den Hauptebenen $\mathfrak{ca}$, $\mathfrak{cb}$, in Tangenten und bezogen auf $\mathfrak{c}$, $-\frac{a^2}{c^2}$, $-\frac{b^2}{c^2}$; demnach $-\frac{c^2}{a^2}$, $-\frac{c^2}{b^2}$, wenn sie auf $\mathfrak{a}$, bzw. $\mathfrak{b}$ bezogen werden. Die Potenz der Durchmesser-Involution jenes Polarfeldes $(-a^2, -b^2)$ ist, in Tangenten geschrieben und bezogen auf die zu $\mathfrak{a}$ parallele Axe, $-\frac{b^2}{a^2}$ (Nr. 317). Zu ihr parallel ist die Involution konjugierter Strahlen in der Hauptebene $\mathfrak{ab}$; ihre auf $\mathfrak{a}$, bzw. $\mathfrak{b}$ bezogenen Potenzen sind $-\frac{b^2}{a^2}$, $-\frac{a^2}{b^2}$. Indem so die Potenzen der Involutionen konjugierter Strahlen in $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{ab}$, bezogen auf $\mathfrak{a}$, gleich $-\frac{c^2}{a^2}$, $-\frac{b^2}{a^2}$ sind, ergeben sich als Halbaxen-Quadrate des Schnittes der Ebene, die auf $\mathfrak{a}$ in der Entfernung a normal ist, $-c^2$, $-b^2$; und ebenso hat das Polarfeld in der Ebene, die auf $\mathfrak{b}$ in der Entfernung b senkrecht steht, die Halbaxen-Quadrate $-c^2$, $-b^2$.

Diese $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$ nennen wir die homogenen Halbaxen-Quadrate des Kegels[1]).

Es sei $-a^2 > -b^2 > -c^2$, also $c > b > a$.

Das Polarfeld $(-a^2, -b^2)$ hat (Nr. 317) dann seine reellen Brennpunkte auf der a-Axe, also liegen die reellen Fokalaxen des über ihm stehenden geraden Zylinders (bzw. seines Polarbündels) in der Ebene $\mathfrak{ac}$; und dabei bleibt es, wenn die Kegelhöhe von ∞ bis c herabgeht.

Der gerade Zylinder über $(-a^2, -c^2)$ hat seine Fokalaxen in der Ebene $\mathfrak{ba}$; sie bleiben darin, wenn die Höhe herabgeht von ∞ bis c; dann liegt ein Rotationskegel um die Axe $\mathfrak{a}$ vor, bei ihm haben sich die Fokalaxen in dieser vereinigt, und sie gehen nun über in die Ebene $\mathfrak{ca}$, worin sie bleiben, bis die Höhe b erreicht ist; und ähnliches gilt für die Kegel über $(-b^2, -c^2)$, die reellen Fokalaxen liegen für die Höhen von ∞ bis c in $\mathfrak{ba}$, für diejenigen von c bis b in $\mathfrak{bc}$, und für diejenigen von b bis a (und weiter) in $\mathfrak{ca}$.

Die reellen Fokalaxen befinden sich daher in derjenigen Hauptebene, welche die Axen mit dem algebraisch größten und dem algebraisch kleinsten Halbaxen-Quadrate verbindet, und die reellen zyklischen Ebenen gehen durch die gegenüberliegende Axe.

---

1) Der reelle Kegel hat zwei positive und ein negatives (oder umgekehrt).

344 Wenn der Scheitel eines Polarbündels O auf einer Fläche 2. Grades F^2 liegt, so gehen die Ebenen, welche je die zweiten Schnittpunkte der F^2 mit den Kanten eines Polardreikants des Polarbündels verbinden, durch einen festen Punkt, welcher auf dem Polarstrahl t der Berührungsebene τ der F^2 in O liegt.

Es sei a ein Strahl des Bündels, α seine Polarebene im Polarbündel, so schneidet die Involution konjugierter Strahlen in α in den Kegelschnitt (F^2, α) eine Involution ein; wenn $\mathfrak{A}$ deren Zentrum ist, so gehen die Verbindungsebenen aller Schnittpunkte-Tripel, zu denen der Schnittpunkt A von a gehört, durch die Gerade $A\mathfrak{A}$. Die Schnittkante $s = \tau\alpha$, eine Tangente von F^2 in O, ist zu a konjugiert; die dritte Kante s' des zugehörigen Polardreikants ist der Schnittstrahl der zu s polaren Ebene ta mit α; die Verbindungslinie der zweiten Schnitte von s und s' geht durch $\mathfrak{A}$; diese Gerade ist aber, weil der zweite Schnitt von s in O fällt, die Gerade s'; folglich geht die Ebene ta durch $\mathfrak{A}$ und nimmt die Gerade $A\mathfrak{A}$ in sich auf. Demnach trifft der feste Strahl t alle derartigen Geraden $A\mathfrak{A}$.

Jetzt sei b ein dem a konjugierter Strahl des Bündels, und c die dritte Kante des zugehörigen Polardreikants; sind dann A, B, C die die drei Schnitte und $\mathfrak{B}$ ebenso zu B gehörig, wie $\mathfrak{A}$ zu A, so geht BC durch $\mathfrak{A}$, CA durch $\mathfrak{B}$, und beide Geraden $A\mathfrak{A}$ und $B\mathfrak{B}$ liegen in der Ebene ABC, welche im allgemeinen nicht durch O geht, und treffen sich. Wenn also der Strahl t, der durch O geht, beide trifft, so muß es im Schnittpunkte geschehen; folglich begegnen $A\mathfrak{A}$ und $B\mathfrak{B}$ beide dem t in demselben Punkte.

Nun seien a, b beliebige Strahlen des Bündels, c der Schnittstrahl der Polarebenen, also beiden konjugiert, und C und $\mathfrak{C}$ die zugehörigen Punkte, so treffen $A\mathfrak{A}$ und $B\mathfrak{B}$ die Gerade t in dem Punkte, wo sie von $C\mathfrak{C}$ getroffen wird, also in demselben; und durch diesen Punkt gehen alle Verbindungsebenen[1]).

Da ∞^3 Polardreikante vorhanden sind und nur ∞^2 Ebenen durch diesen Punkt gehen, so enthält jede Ebene, welche ein solches Schnittpunkte-Tripel enthält, deren ∞^1, und indem wir ihren Schnitt mit F^2 aus O projizieren, sehen wir, daß, wenn ein Kegel 2. Grades ein Polardreikant eines Polarbündels enthält, sofort ∞^1 auf ihm gelegen sind.

Aber dieser Satz folgt aus dem entsprechenden ebenen Satz in Nr. 118.

---

1) Hinsichtlich des ersten Teils des Beweises sehe man: Schröter, Journal f. Math., Bd. 64, S. 79, Nr. 2; dort wird jedoch „konjugiert" im Sinne von „polar" gebraucht.

Wenn der Polarbündel ein orthogonaler ist, so haben wir:

Alle drei rechtwinkligen Dreikante eines Bündels schneiden eine durch den Scheitel gehende Fläche 2. Grades in Punktetripeln, deren Ebenen in einen Punkt der Normale des Scheitels zusammenlaufen.

Ist einem Kegel 2. Grades ein dreirechtwinkliges Dreikant ein- oder umgeschrieben, so sind ihm ∞^1 ein- oder umgeschrieben.

§ 53. Zyklische Ebenen und Fokalaxen von kollinearen Bündeln.

Zwei kollineare Felder (mit endlichen Fluchtgeraden) besitzen zwei reelle Paare entsprechender gleichen Punktreihen (Nr. 275) und zwei reelle Paare entsprechender gleichen Strahlenbüschel (Nr. 277). 345

Ebenso haben zwei kollineare Bündel (mit endlichen Scheiteln) zwei reelle Paare entsprechender gleicher Strahlenbüschel und zwei reelle Paare entsprechender gleicher Ebenenbüschel.

Die Ebenen solcher entsprechender gleichen Strahlenbüschel, etwa $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$, müssen durch entsprechende Axen der Bündel gehen. Es seien l, l' die entsprechenden Strahlen, in denen sie ρ und ρ' schneiden, und nicht selbst schon Axen, und m, m' die wiederum entsprechenden Strahlen, die in den gleichen Strahlenbüscheln zu ihnen senkrecht stehen. Wären diese von r, bzw. r' verschieden, so würde die Ebene mr zu l und $m'r'$ zu l' normal sein; und wir hätten ein viertes Paar entsprechender Strahlen l, l', deren normale Ebenen auch entsprechend sind; ein solches ist im allgemeinen nicht vorhanden.

Also müssen entweder l, l' selbst schon in entsprechende in ρ, bzw. ρ' gelegene Axen fallen, oder m, m' müssen mit r, r' identisch sein. Jedenfalls müssen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$ entsprechende Axen enthalten.

Wir wollen also jetzt unter den entsprechenden durch r und r' gehenden Ebenen nach solchen suchen, welche gleiche Strahlenbüschel tragen. Dazu schneiden wir die beiden Bündel mit Ebenen, welche bzw. auf r, r' senkrecht stehen in gleichen Entfernungen von den Scheiteln. Weil die unendlich fernen Schnitte mit ρ, ρ' entsprechend sind, so entstehen affine Felder. Die Schnitte $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ mit σ, τ, bzw. $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}'$ mit σ', τ' geben die beiden rechtwinkligen Richtungen des einen und und des andern Feldes, die einander entsprechen.

Wenn durch die Spuren $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ von r, r' entsprechende Geraden mit gleichen Punktreihen gehen, so stehen, wegen der gleichen Entfernung von den Scheiteln, über diesen in den Bündeln gleiche Strahlenbüschel, und umgekehrt, solche werden in gleichen Punktreihen geschnitten. In den affinen Feldern sind aber, nach Nr. 284, reelle gleiche

Punktreihen nur dann vorhanden und dann in zwei Richtungen, wenn von den beiden Verhältnissen der entsprechenden Strecken auf $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$ und auf $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}'$ das eine echt, das andere unecht ist.

Das Verhältnis auf $\mathfrak{s}'$ und $\mathfrak{s}$ ist seinem absoluten Werte nach, auf den es hier allein ankommt, gleich

$$\operatorname{tang} r'y' : \operatorname{tang} ry = \operatorname{cotg} ry \cdot \operatorname{cotg} t'y',$$

wo y, y' irgendwelche entsprechenden Strahlen der entsprechenden Büschel in σ, σ' sind, welche die entsprechenden rechten Winkel rt, $r't'$ haben. Ebenso ist das andere Verhältnis auf $\mathfrak{t}'$, $\mathfrak{t}$ gleich

$$\operatorname{tang} r'z' : \operatorname{tang} rz = \operatorname{cotg} rz \cdot \operatorname{cotg} s'z',$$

wo z, z' irgendwelche entsprechenden Strahlen in τ, τ' sind.

Die Produkte $\operatorname{cotg} ry \cdot \operatorname{cotg} t'y'$ und $\operatorname{cotg} rz \cdot \operatorname{cotg} s'z'$ sind Potenzen der Projektivitäten der Strahlenbüschel in σ, σ' und in τ, τ'. Setzen wir:

$$k_\sigma = \operatorname{cotg} ry \cdot \operatorname{cotg} t'y', \quad k_\tau = \operatorname{cotg} sz \cdot \operatorname{cotg} r'z' = \frac{1}{\operatorname{cotg} rz \cdot \operatorname{cotg} s'z'},$$
$$k_\varrho = \operatorname{cotg} tx \cdot \operatorname{cotg} s'x',$$

gleich auch die dritte dieser zyklisch gebildeten Größen einführend, so müssen also k_σ und k_τ gleichartig sein, beide echt oder beide unecht, wenn die affinen Felder reelle gleiche entsprechende Punktreihen und die über ihnen stehenden kollinearen Bündel gleiche entsprechende Strahlenbüschel enthalten, deren Ebenen durch r, r' gehen. Und ebenso müssen k_τ und k_ϱ gleichartig sein, wenn solche durch s und s' gehen, und k_ϱ und k_σ, wenn durch t und t'.

Es seien nun x, y, z die Schnitte einer beliebigen Ebene ξ mit ρ, σ, τ und x', y', z' diejenigen der entsprechenden Ebene ξ' mit ρ', σ', τ', so gibt der Satz von **Menelaus** für das Dreiflach $\rho\sigma\tau$ (Nr. 53):

$$\frac{\sin sx}{\sin tx} \cdot \frac{\sin ty}{\sin ry} \cdot \frac{\sin rz}{\sin sz} = 1$$

oder:

$$\operatorname{cotg} tx \cdot \operatorname{cotg} ry \cdot \operatorname{cotg} sz = 1,$$

und für $\rho'\sigma'\tau'$:

$$\operatorname{cotg} s'x' \cdot \operatorname{cotg} t'y' \cdot \operatorname{cotg} r'z' = 1.$$

Daher (absolut):

$$k_\varrho \cdot k_\sigma \cdot k_\tau = 1.$$

Schreiben wir k_ϱ, k_σ, k_τ in der Form:

$$k_\varrho = \operatorname{cotg} (t, \rho\xi) \cdot \operatorname{cotg} (s', \rho'\xi'),$$
$$k_\sigma = \operatorname{cotg} (r, \sigma\xi) \cdot \operatorname{cotg} (t', \sigma'\xi'),$$
$$k_\tau = \operatorname{cotg} (s, \tau\xi) \cdot \operatorname{cotg} (r', \tau'\xi'),$$

so sehen wir, daß der Satz von **Ceva** zu:

$$k_r \cdot k_s \cdot k_t = 1$$

führt, wo:

$$k_r = \operatorname{cotg}(\tau, rx) \cdot \operatorname{cotg}(\sigma', r'x'),$$
$$k_s = \operatorname{cotg}(\rho, sx) \cdot \operatorname{cotg}(\tau', s'x'),$$
$$k_t = \operatorname{cotg}(\sigma, tx) \cdot \operatorname{cotg}(\rho', t'x')$$

und x, x' beliebige entsprechenden Strahlen sind.

Natürlich kann man auch die drei reziproken Größen nehmen:

$$\operatorname{cotg}(s, \rho\xi) \cdot \operatorname{cotg}(t', \rho'\xi'), \ldots; \quad \operatorname{cotg}(\sigma, rx) \cdot \operatorname{cotg}(\tau', r'x'), \ldots$$

Bei der Korrelation ergeben sich, indem in dem einen Bündel der Satz von Menelaus, in dem andern der von Ceva benutzt wird, folgende zwei (oder vier) Tripel, deren Produkt 1 ist:

$$\operatorname{cotg}(t,\rho\xi)\cdot\operatorname{cotg}(\sigma',r'x'),\ \operatorname{cotg}(r,\sigma\xi)\cdot\operatorname{cotg}(\tau',s'x'),\ \operatorname{cotg}(s,\tau\xi)\cdot\operatorname{cotg}(\rho',t'x');$$
$$\operatorname{cotg}(\tau,rx)\cdot\operatorname{cotg}(s',\rho'\xi'),\ \operatorname{cotg}(\rho,sx)\cdot\operatorname{cotg}(t',\sigma'\xi'),\ \operatorname{cotg}(\sigma,tx)\cdot\operatorname{cotg}(r',\tau'\xi').$$

Kehren wir zu unserer Formel:

$$k_\varrho \cdot k_\sigma \cdot k_\tau = 1$$

zurück, so lehrt dieselbe, daß von diesen drei Größen nur einmal zwei gleichartig sein können. Nehmen wir an: k_σ, k_τ. Es gehen also allein durch r, r' reelle Ebenen, welche gleiche entsprechende Strahlenbüschel tragen, und zwar zwei Paare[1]); im ganzen gibt es sechs Paare, zwei reelle und vier imaginäre. Wir wollen diese Ebenen die zyklischen Ebenen der beiden kollinearen Bündel nennen, insbesondere die reellen:

$$\mathfrak{d},\ \mathfrak{d}_1;\ \ \mathfrak{d}',\ \mathfrak{d}_1'.$$

Wir wissen, daß in den affinen Feldern die Winkel der beiden durch den Spurpunkt $\mathfrak{R}$ von r gehenden Punktreihen $\mathfrak{g}$, denen gleiche Punktreihen $\mathfrak{g}'$ entsprechen, durch $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, die Spuren von σ, τ, und die der $\mathfrak{g}'$ durch $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{t}'$, die von σ', τ' halbiert werden. Also sind auch σ, τ die Halbierungsebenen von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$, σ', τ' diejenigen von $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}_1'$.

In den affinen Feldern hatten wir (Nr. 284):

$$\operatorname{tang} \mathfrak{s}\mathfrak{g}^2 = \frac{1-\mu^2}{\nu^2-1}, \quad \operatorname{tang} \mathfrak{s}'\mathfrak{g}'^2 = \frac{\frac{1}{\mu^2}-1}{1-\frac{1}{\nu^2}},$$

wo μ, ν die Verhältnisse sind, die a. a. O. mit σ, τ bezeichnet worden sind. Nun ist $\sphericalangle\, \mathfrak{s}\mathfrak{g} = \sigma\mathfrak{d}$, $\mathfrak{s}'\mathfrak{g}' = \sigma'\mathfrak{d}'$, und:

$$\mu = \frac{\operatorname{tang} r'y'}{\operatorname{tang} ry} = \operatorname{cotg} ry \cdot \operatorname{cotg} t'y' = k_\sigma, \quad \nu = \frac{1}{k_\tau};$$

---

1) Die vorangehende Darstellung ist — etwas vereinfacht — diejenige von Schröter, Oberflächen 2. Ordnung und Raumkurven 3. Ordnung, § 45. Dieselbe ist auch noch im folgenden verwertet; ferner aber sind vor allem die in Nr. 275 zitierten Abhandlungen von Smith und Reye zu erwähnen.

also ergibt sich für die Winkel der reellen zyklischen Ebenen:

$$\operatorname{tang} \sigma\delta^2 = \operatorname{cotg} \tau\delta^2 = \frac{1 - k_\sigma^2}{\frac{1}{k_\tau^2} - 1}, \quad \operatorname{tang} \sigma'\delta'^2 = \operatorname{cotg} \tau'\delta'^2 = \frac{\frac{1}{k_\sigma^2} - 1}{1 - k_\tau^2}; \text{ [1]}$$

die einen Vorzeichen der ersten Potenzen gehören zu δ, δ', die andern zu δ_1, δ_1'.

Nennen wir die andern, imaginären, zyklischen Ebenen durch s, s'; t, t' bzw. ϵ, ϵ'; φ, φ'; so ergibt sich:

$$\operatorname{tang} \tau\epsilon^2 = \operatorname{cotg} \rho\epsilon^2 = \frac{1 - k_\tau^2}{\frac{1}{k_\varrho^2} - 1}, \quad \operatorname{tang} \tau'\epsilon'^2 = \operatorname{cotg} \rho'\epsilon'^2 = \frac{\frac{1}{k_\tau^2} - 1}{1 - k_\varrho^2};$$

$$\operatorname{tang} \rho\varphi^2 = \operatorname{cotg} \sigma\varphi^2 = \frac{1 - k_\varrho^2}{\frac{1}{k_\sigma^2} - 1}, \quad \operatorname{tang} \rho'\varphi'^2 = \operatorname{cotg} \sigma'\varphi'^2 = \frac{\frac{1}{k_\varrho^2} - 1}{1 - k_\sigma^2};$$

wir erhalten also:

$$\operatorname{tang} \tau\epsilon^2 = -\cos \sigma\delta^2, \qquad \operatorname{tang} \tau'\epsilon'^2 = -\cos \sigma'\delta'^2;$$
$$\operatorname{tang} \rho\varphi^2 = -\operatorname{cosec} \sigma\delta^2, \quad \operatorname{tang} \rho'\varphi'^2 = -\operatorname{cosec} \sigma\delta'^2;$$

woraus die Imaginarietät noch deutlicher hervortritt.

Daher:

$$\operatorname{tang} \sigma\delta^2 \cdot \operatorname{tang} \tau\epsilon^2 \cdot \operatorname{tang} \rho\varphi^2 = 1, \quad \operatorname{tang} \sigma'\delta'^2 \cdot \operatorname{tang} \tau'\epsilon'^2 \cdot \operatorname{tang} \rho'\varphi'^2 = 1.$$

Die drei Involutionen um r, s, t, von denen δ, δ_1; ϵ, ϵ_1; φ, φ_1 die Doppelebenen sind, eine hyperbolische und zwei elliptische, sind drei verbundene. Die Ebenen σ, τ; τ, ρ; ρ, σ bilden die rechtwinkligen Paare; daher sind $\operatorname{tang} \sigma\delta^2$, $\operatorname{tang} \tau\epsilon^2$, $\operatorname{tang} \rho\varphi^2$ die Potenzen, und wenn ξ, η, ζ drei Ebenen aus ihnen sind, welche in einen Strahl zusammenlaufen, so laufen die drei gepaarten Ebenen ξ_1, η_1, ζ_1 ebenfalls in einen Strahl zusammen; denn es ist:

$$\operatorname{tang} \sigma\xi \cdot \operatorname{tang} \sigma\xi_1 = \operatorname{tang} \sigma\delta^2, \quad \operatorname{tang} \tau\eta \cdot \operatorname{tang} \tau\eta_1 = \operatorname{tang} \tau\epsilon^2,$$
$$\operatorname{tang} \rho\zeta \cdot \operatorname{tang} \rho\zeta_1 = \operatorname{tang} \rho\varphi^2;$$

daher:

$$\operatorname{tang} \sigma\xi \cdot \operatorname{tang} \tau\eta \cdot \operatorname{tang} \rho\zeta \times \operatorname{tang} \sigma\xi_1 \cdot \operatorname{tang} \tau\eta_1 \cdot \operatorname{tang} \rho\zeta_1 = 1;$$

wegen des Satzes von Ceva ist (wofern $\sin \tau\sigma \cdot \sin \rho\tau \cdot \sin \sigma\rho = 1$):

$$\operatorname{tang} \sigma\xi \cdot \operatorname{tang} \tau\eta \cdot \operatorname{tang} \rho\zeta = 1,$$

---

1) Die Formel: $\operatorname{tang} \tau'\delta'^2 = \dfrac{1 - k_\tau^2}{\frac{1}{k_\sigma^2} - 1}$ ist gleichmäßiger zu derjenigen für $\operatorname{tang} \sigma\delta^2$.

daher auch:

$$\operatorname{tang} \sigma\xi_1 \cdot \operatorname{tang} \tau\eta_1 \cdot \operatorname{tang} \rho\zeta_1 = 1.$$

Daraus folgt, daß die sechs Doppelebenen viermal je drei (aus verschiedenen Involutionen) in einen Strahl zusammenlaufen, also die Paare der Gegenebenen eines Vierkants sind.

Ferner in jede von den Doppelebenen schneiden die beiden andern Involutionen die nämliche Involution ein; insbesondere gilt dies für δ, δ_1.

Analoges besteht im andern Bündel.

Zu den entsprechenden gleichen Ebenenbüscheln der beiden kolli- 346
nearen Bündel O, O' kann man nicht in gleicher Weise gelangen; die affinen Felder, die wir oben heranzogen, besitzen keine entsprechenden gleichen Büschel. Es ist besser, die nun schon gewonnenen gleichen Strahlenbüschel zu benützen. Zunächst aber haben wir uns klar zu machen, daß die Axen d, d' solcher entsprechenden gleichen Ebenenbüschel nur in Hauptebenen gelegen sein können. Wenn die Ebenen $\lambda = rd$, $\lambda' = r'd'$ von Hauptebenen verschieden sind, so seien μ, μ' die zu ihnen rechtwinkligen Ebenen in den Büscheln d, d', also auch entsprechend; diese sind mit ρ und ρ' identisch; denn im andern Falle wäre λ zur Schnittlinie $\mu\rho$, ebenso λ' zu $\mu'\rho'$ normal; es gäbe also ein viertes Paar entsprechender Ebenen in den Bündeln, deren senkrechte Strahlen auch entsprechend sind; was nicht der Fall ist. Jedenfalls liegen d, d' in Hauptebenen.

Nehmen wir nun zwei solche Axen d, d' in ρ, ρ' an; so seien $d\mathfrak{d}$, $d'\mathfrak{d}'$ zwei gleiche entsprechende Winkel in den projektiven Büscheln dieser Ebenen (aus einem der beiden Systeme), die beiden entsprechenden Ebenen $\mathfrak{d}r$, $\mathfrak{d}'r'$, welche zu ρ, ρ' normal sind, schneiden wir mit entsprechenden Ebenen ξ, ξ' aus den gleichen Büscheln d, d' in x, x', wodurch zwei kongruente Dreikante $d\mathfrak{d}x$, $d'\mathfrak{d}'x'$ sich ergeben, denn $\sphericalangle\, d\mathfrak{d} = d'\mathfrak{d}'$, $\sphericalangle\, \rho\xi = \rho'\xi'$[1]) und $(\rho, \mathfrak{d}x) = (\rho', \mathfrak{d}'x') = \frac{\pi}{2}$; daher $\sphericalangle\, \mathfrak{d}x = \mathfrak{d}'x'$; ξ, ξ' waren beliebige entsprechende Ebenen von d, d', daher sind x, x' auch beliebige entsprechende Strahlen in den Büscheln von $\mathfrak{d}r$, $\mathfrak{d}'r'$, so daß diese gleich sind.

Sobald wir also in zwei entsprechenden Hauptebenen Axen reeller entsprechender gleicher Ebenenbüschel annehmen, ergeben sich für die gegenüberliegenden Hauptaxen durchgehende reelle zyklische Ebenen. Da nur durch r, r' reelle zyklische Ebenen gehen, so können nur in ρ, ρ' reelle Axen entsprechender gleicher Ebenenbüschel sich befinden. Umgekehrt, wenn die δ, δ' durch r, r' die ρ, ρ' in $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$ schneiden, so konstruiere man in den Büscheln in ρ, ρ' zwei gleiche

1) Von den verschiedenen möglichen dreiseitigen Ecken nimmt man solche, welche diese Winkel gleich haben (nicht supplementär).

entsprechende Winkel $\mathfrak{d}d$, $\mathfrak{d}'d'$; werden wieder δ, δ' von beliebigen entsprechenden Ebenen der Büschel d, d' in x, x' geschnitten, so sind nunmehr die Dreikante $d\mathfrak{d}x$ und $d'\mathfrak{d}'x'$ deshalb kongruent, weil $\mathfrak{d}d = \mathfrak{d}d'$, $\mathfrak{d}x = \mathfrak{d}'x'$, $\rho\delta = \rho'\delta' = \frac{\pi}{2}$; also $\rho\xi = \rho'\xi'$, die Büschel um d und d' sind gleich.

Man kann an $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$ auf zwei Weisen entsprechende gleiche Winkel anlegen (Nr. 60), nämlich, da st, $s't'$ die entsprechenden rechten Winkel sind, indem man $s\mathfrak{d}$ an t' nach beiden Seiten anlegt als $t'd'$ und $t'd_1'$ und dann die entsprechenden Strahlen d, d_1 aufsucht.

Wir erhalten also aus δ, δ' zwei Axenpaare d, d'; d_1, d_1', deren Ebenenbüschel gleich sind.

Wir fanden $\tau = rs$ als die eine Halbierungsebene der Winkel von δ und δ_1; daher ist, weil r senkrecht zu ρ, s die eine Halbierungslinie der Winkel der Schnitte $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$ von δ, δ_1 mit ρ; d. h. $s\mathfrak{d} = s\mathfrak{d}_1$; folglich können d, d_1; d', d_1' ebenso aus δ_1, δ_1' wie aus δ, δ' hergestellt werden.

Wir nennen solche Axen entsprechender gleicher Ebenenbüschel F o k a l a x e n der beiden kollinearen Bündel und haben sechs Paare: zwei reelle Paare, welche vorzugsweise so heißen und mit d, d'; d_1, d_1' bezeichnet werden mögen, gelegen in den Hauptebenen ρ, ρ', durch deren gegenüberliegende Hauptaxen r, r' die reellen zyklischen Ebenen gehen, und vier imaginäre: e, e'; e_1, e_1' in σ, σ' und f, f'; f_1, f_1' in τ, τ'.

Wir machten eben $t'd'$, $t'd_1'$ mit $s\mathfrak{d}$, $s\mathfrak{d}_1$ gleich; diese sind aber die Neigungswinkel der Flächenwinkel $\tau\delta$, $\tau\delta_1$; daher ist der Winkel der zyklischen Ebenen in dem einen Bündel gleich dem Winkel der zugehörigen Fokalaxen im andern, insbesondere:

$$\delta\delta_1 = d'd_1', \quad dd_1 = \delta'\delta_1'.$$

Diejenigen Axen, durch welche die reellen zyklischen Ebenen gehen, also die r, r', nennt S m i t h die m i t t l e r e n. In ρ bilden dd_1, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ eine gleichseitig-hyperbolische Involution, von welcher s, t die Doppelstrahlen sind, ebenso in ρ' die $d'd_1'$, $\mathfrak{d}'\mathfrak{d}_1'$ mit s', t' als Doppelstrahlen; da nun:

$$\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1 = \delta\delta_1 = d'd_1' \quad \text{und} \quad dd_1 = \delta'\delta_1' = \mathfrak{d}'\mathfrak{d}_1',$$

wobei s und t' die einen gleichen Winkel halbieren und t und s' die Nebenwinkel, so läßt sich die eine Involution so auf die andere legen, daß

$$t's'd'd_1'\mathfrak{d}'\mathfrak{d}_1' \text{ auf } st\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1dd_1$$

fällt; und dasselbe gilt für die zu ihnen perspektiven Ebeneninvolutionen um r, r'.

Legt man aber $t's'$ auf ts und zwar so, daß der Winkel $t's'$, welcher $d'\mathfrak{d}'$ enthält, sich mit demjenigen ts deckt, welcher $d_1\mathfrak{d}_1$ enthält, so stellen sich d', d_1', $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}_1'$ senkrecht auf $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$, d, d_1 und daher d', d_1', $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}_1'$ senkrecht auf $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$, d, d_1.

Weil $sd + td + s\mathfrak{d} + t\mathfrak{d} = \pi$ (worin die Winkel spitz und absolut sind), so ist von den Summen $sd + s\mathfrak{d}$ oder $sd + s\mathfrak{d}$ und $td + t\mathfrak{d}$ eine $< \frac{\pi}{2}$, die andere $> \frac{\pi}{2}$. Wenn $sd + s\mathfrak{d} < \frac{\pi}{2}$, so nennt Smith die Axe s die größere und t die kleinere. Nun ist $t'd' = s\mathfrak{d}$, $t'\mathfrak{d}' = sd$; daher $t'd' + t'\mathfrak{d}' < \frac{\pi}{2}$; im andern Bündel ist also t' die größere und s' die kleinere Axe.

Ferner führt Smith auch hier Parameter der Bündel ein, nämlich die spitzen Winkel sd und $s'd'$ als Parameter c und c' des ersten und zweiten Bündels, obwohl sie als Winkel $t'\mathfrak{d}'$ oder $\sigma'\mathfrak{d}'$, bzw. $t\mathfrak{d}$ oder $\sigma\mathfrak{d}$ auch Beziehung zum andern Bündel haben; es werden bei dieser Zuordnung die Fokalaxen bevorzugt.

Da nun $s\mathfrak{d} = \frac{\pi}{2} - c'$, so ist:

$$sd + s\mathfrak{d} = \frac{\pi}{2} - (c' - c);$$

also ist $c' > c$, wenn s und t' die größeren Axen sind.

Die Potenzen der drei Involutionen um r, s, t, welche die zyklischen Ebenen zu Doppelebenen haben, lassen sich durch die Parameter ausdrücken und zwar im ersten Bündel:

$$\operatorname{tang} c'^2, \quad -\cos c'^2, \quad -\operatorname{cosec} c'^2,$$

im zweiten:

$$\operatorname{tang} c^2, \quad -\cos c^2, \quad -\operatorname{cosec} c^2.$$

Bringt man zwei entsprechende gleichen Ebenenbüschel, etwa d und d', so zur Deckung, daß entsprechende Ebenen sich decken, so werden die beiden Bündel perspektiv. 347

Bringt man aber zwei entsprechende gleichen Strahlenbüschel, etwa $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$, mit den entsprechenden Strahlen zur Deckung, so ergeben sich konzentrische kollineare Bündel, die sich in Homologie befinden; die Ebene dieser beiden Büschel ist die Ebene der Homologie; in den Büschel um die Axe der Homologie vereinigen sich zwei entsprechende gleiche Ebenenbüschel. Vereinigt man jene Strahlenbüschel durch Drehung um 180° in ihrer Ebene auf die zweite Weise, so decken sich nunmehr die andern entsprechenden gleichen Ebenenbüschel.

Liegen die beiden kollinearen Bündel O, O' perspektiv, so sind die entsprechenden gleichen Gebilde leicht zu erkennen. Der gemeinsame Büschel gibt das eine Paar entsprechender gleicher Ebenenbüschel d, d'. Die beiden andern Fokalaxen d_1, d_1' gehen je nach dem Spiegelbilde des andern Scheitels in der Perspektivitätsebene Σ. Die einen zyklischen Ebenen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$ sind die Parallelebenen zu Σ und die andern $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_1'$ gehen nach dem Schnitte von Σ mit der Ebene, welche auf OO' in der Mitte senkrecht steht.

Die Ebenen ρ, ρ' vereinigen sich in der Ebene, welche durch OO' senkrecht zu Σ geht, r, r' sind also senkrecht zu dieser Ebene; s, t; s', t' sind die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel in den projektiven Büscheln in ρ, ρ'. Die vier Ebenen $\mathfrak{d}$ stehen auf $\rho \equiv \rho'$ senkrecht und gehen daher durch r, r', alle vier Fokalaxen d liegen in $\rho \equiv \rho'$, woraus ein einfacher Beweis für: $dd_1 = \mathfrak{d}'\mathfrak{d}_1'$ sich ergibt; und die Winkel der $\mathfrak{d}$ und der d werden durch die σ, τ; s, t halbiert.

Um zu erkennen, daß auch die drei Involutionen in ρ, σ, τ, deren Doppelstrahlen die Fokalaxen sind, verbundene sind, d. h. daß drei Strahlen aus ihnen, die in einer Ebene liegen, drei gepaart sind, die wiederum in einer Ebene liegen, wird besser eine bald vorzunehmende allgemeine Betrachtung herangezogen.

Weil $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1 = d'd_1'$ und $dd_1 = \mathfrak{d}'\mathfrak{d}_1'$, so hat jede der beiden Gleichheiten:

$$dd_1 = d'd_1', \quad \mathfrak{d}\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}'\mathfrak{d}_1'$$

die andere zur Folge; es sind dann alle vier Winkel einander gleich. Das läßt sich auch leicht direkt einsehen. Wenn $dd_1 = d'd_1'$ ist, so sind die Figuren, gebildet durch d_1 und die in d auf der Ebene $dd_1 = \rho$ senkrecht stehende Ebene und durch d_1' und die in d' auf $d'd_1' = \rho'$ senkrechte Ebene, kongruent; also schneiden die gleichen Ebenenbüschel um d_1, d_1' in diese Ebenen, welche entsprechend sind, gleiche Strahlenbüschel ein: wir haben das eine von den beiden Paaren $\mathfrak{d}\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_1'$, etwa $\mathfrak{d}\mathfrak{d}'$, und die Ebenen, welche in d_1 auf ρ und in d_1' auf ρ' senkrecht stehen, bilden das andere Paar $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_1'$. Daraus erhellt, daß $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$ den Winkel dd_1 und $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}_1'$ den Winkel $d'd_1'$ bilden, also jene denselben Winkel bilden wie diese.

Es inzidieren $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}_1'$ bzw. mit d, d_1, d', d_1', welche also mit $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}_1'$ identisch werden. Und wenn eine von diesen Inzidenzen eintritt, so treten alle ein, sowie die Winkelgleichheit.

Gleichheit der Winkel kann auch dadurch eintreten, daß beide 0 sind, also d und d_1, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$ sich vereinigen und ebenso im andern Bündel.

348 Wir kehren zum allgemeinen Falle zurück und machen die beiden kollinearen Bündel so konzentrisch, daß die entsprechenden Axen und Hauptebenen sich decken:

$$r \equiv r', \ s \equiv s', \ t \equiv t'; \ \rho \equiv \rho', \ \sigma \equiv \sigma', \ \tau \equiv \tau';$$

was auf acht Weisen möglich ist. Wir haben dann ein dreirechtwinkliges Koinzidenzdreikant.

Wir wollen dartun, daß bei dieser Kollineation ineinander liegender Bündel, welche mit Γ bezeichnet werde, Elemente, welche zu entsprechenden Elementen normal sind, wiederum entsprechend sind, aber umgekehrt, d. h. so, daß das zu einem Elemente des ersten, zweiten Bündels normale Element dem zweiten, ersten Bündel angehört[1]). Wenn also x' und x auf den in der Kollineation Γ entsprechenden Ebenen ξ, ξ' normal sind: $x' \perp \xi$, $x \perp \xi'$; so sei zunächst die Verwandtschaft zwischen x' und ξ' untersucht, von denen x' zu ξ normal ist und ξ' der ξ in der Kollineation entspricht; sie ist offenbar Korrelation, und zwar ein Polarbündel. Wir können leicht ein Polardreikant nachweisen; es sind r' und ρ' entsprechend; denn $r' \equiv r$ ist zu ρ senkrecht und $\rho' \equiv \rho$ entspricht ρ, ebenso sind s' und σ', t' und τ' entsprechend; das Koinzidenzdreikant von Γ ist Polardreikant für diese Korrelation. Nennen wir diesen Polarbündel Π'. Er ist ersichtlich das Produkt des orthogonalen Polarbündels Π_0 und der Kollineation Γ. Lassen wir x' eine Ebene η' durchlaufen, so dreht sich ξ um den Strahl y, der auf η' senkrecht steht, und ξ' um den dem y in Γ entsprechenden Strahl y'; es sind daher in Π' auch η' und y' entsprechend, von denen η' auf y senkrecht ist und y' dem y in Γ korrespondiert.

Zwei in Π' entsprechende Elemente gehören beide zum zweiten Bündel, und jedes hat das zum andern senkrechte zum entsprechenden in Γ. Und es gibt auch einen Polarbündel Π, in welchem Elemente aus dem ersten Bündel zugeordnet sind.

Gehen wir also von x' aus, konstruieren dazu senkrecht ξ, dann die ξ in Γ entsprechende Ebene ξ', darauf senkrecht x, dazu in der Kollineation Γ den entsprechenden Strahl x_1'; so sind sowohl x' und ξ' in Π' entsprechend, als auch ξ' und x_1'; das bedeutet, weil Π' involutorisch ist, daß $x_1' \equiv x'$ ist. Also entspricht x' dem x in Γ; durch die Akzentuierung ist dabei immer gekennzeichnet, zu welchem Bündel jedes Element in Γ gerechnet wird. Es ist also erkannt, daß die zu ξ, ξ' normalen Strahlen x', x in Γ korrespondieren, aber umgekehrt[2]). Bewegt sich x' in η', so dreht sich ξ um y, der auf η' senkrecht steht, mithin ξ' um den in Γ entsprechenden Strahl y', und x in der Ebene η, die auf y' senkrecht ist, sie wird zu η' in Γ entsprechend; es sind also auch die Ebenen η' und η in Γ entsprechend, die auf den entsprechenden Strahlen y und y' senkrecht stehen.

Mit Hilfe dieser Beziehung kann man aus jeder der beiden Figuren δ, δ_1; δ', δ_1' und d, d_1; d', d_1' die andere ableiten.

Es sei die erste Figur bekannt und x, x'; y, y' seien zwei Paare entsprechender Strahlen in den gleichen Büscheln δ und δ'; so sind die zu ihnen senkrechten Ebenen ξ', ξ; η', η' ebenfalls entsprechend.

---

1) Smith, a. a. O.

2) Daraus folgt, daß, wenn ξ und x' normal sind, dies auch für die entsprechenden Elemente ξ' und x gilt.

Nun ist:

$$\sphericalangle xy = x'y'; \; \sphericalangle xy = \xi'\eta'; \; \sphericalangle x'y' = \xi\eta;$$

daher:

$$\sphericalangle \xi\eta = \xi'\eta'.$$

Wir sehen, wie um die auf den Ebenen δ, δ' senkrechten Strahlen d', d gleiche Ebenenbüschel entstehen, und ebenso um die auf δ_1, δ_1' normalen Strahlen d_1', d_1; und wir erkennen auch:

$$\sphericalangle \delta\delta_1 = d'd_1', \; \sphericalangle \delta'\delta_1' = dd_1.$$

Da d, d_1 auf δ', δ_1' normal sind, so hat auch die d, d_1 darstellende Involution in ρ ihre Elementenpaare bzw. normal zu den Elementenpaaren der Involution um r', welche δ', δ_1' darstellt, insbesondere ist das rechtwinklige Paar st jener normal zu dem rechtwinkligen Paare $\sigma'\tau'$ dieser, und daher sind die Potenzen der Involutionen, welche sich auf die zueinander rechtwinkligen Zentralelemente s, σ' beziehen, gleich:

$$\operatorname{tang} sd^2 = \operatorname{tang} \sigma'\delta'^2 = \operatorname{tang} c^2, \; \operatorname{tang} s'd'^2 = \operatorname{tang} \sigma\delta^2 = \operatorname{tang} c'^2.$$

In gleicher Weise ergeben sich dann zu den die ϵ', ϵ_1'; φ', φ_1' darstellenden Involutionen normal die Involutionen, welche e, e_1; f, f_1 darstellen, und von gleichen Potenzen:

$$\operatorname{tang} te^2 = \operatorname{tang} \tau'\epsilon'^2 = -\cos c^2, \; \operatorname{tang} rf^2 = \operatorname{tang} \rho'\varphi'^2 = -\operatorname{cosec} c^2,$$

und ebenso:

$$\operatorname{tang} t'e'^2 = \operatorname{tang} \tau\epsilon^2 = -\cos c'^2, \; \operatorname{tang} r'f'^2 = \operatorname{tang} \rho\varphi^2 = -\operatorname{cosec} c'^2.$$

Zu drei Ebenen des Bündels, die durch eine Gerade gehen, sind drei Strahlen des Bündels normal, die in einer Ebene liegen, und umgekehrt. Also schließen wir, bei dieser Lage der Bündel, wo die entsprechenden dreirechtwinkligen Dreikante vereinigt sind, daraus, daß die drei Involutionen $(\delta'\delta_1')$, $(\epsilon'\epsilon_1')$, $(\varphi'\varphi_1')$ so liegen, daß drei Ebenen, welche in eine Gerade zusammenlaufen, drei Ebenen gepaart sind, für welche das ebenfalls gilt, oder daß sie verbundene Involutionen sind, für die Involutionen (dd_1), (ee_1), (ff_1), daß drei Strahlen, die in einer Ebene liegen, drei Strahlen gepaart sind, für welche das ebenfalls gilt oder, daß sie ebenfalls verbundene Involutionen sind. Daraus folgt, daß die sechs Fokalaxen, also die Doppelstrahlen dieser Involutionen, die Paare der Gegenkanten eines vollständigen Vierflachs sind, und daß je zwei der drei Involutionen aus jedem der Doppelstrahlen der dritten durch die nämliche Ebeneninvolution projiziert werden, insbesondere die beiden elliptischen aus d, d_1.

Dasselbe gilt natürlich auch für die Involutionen $(d'd_1')$, ..., und die Aufhebung der Vereinigung der Bündel läßt diese Eigenschaften bestehen.

Die eben erhaltene Involution, welche aus d (oder d_1) 349
die beiden elliptischen Involutionen in σ und τ projiziert, deren Doppelstrahlen die imaginären Fokalaxen $e, e_1; f, f_1$ sind, ist rechtwinklig. Denn schneiden wir die Ebene $\sigma = tr$ mit der rechtwinkligen Involution um d, so ist tr das rechtwinklige Paar der eingeschnittenen Involution; yy_1 sei ein zweites Paar. Die beiden Dreikante dty, dty_1, bei t rechtwinklig, geben:

$$\operatorname{tang}(yd, dt) = \frac{\operatorname{tang} ty}{\sin td}, \quad \operatorname{tang}(y_1 d, dt) = \frac{\operatorname{tang} ty_1}{\sin td};$$

also, da $(yd, dt) + (dt, y_1 d) = \frac{\pi}{2}$,

$$\operatorname{tang} ty \cdot \operatorname{tang} ty_1 = -\sin td^2 = -\cos c^2.$$

Von der in $\tau = rs$ eingeschnittenen Involution ist rs das rechtwinklige Paar und zz_1 sei ein anderes, so ergibt sich ebenso:

$$\operatorname{tang} sz \cdot \operatorname{tang} sz_1 = -\sin c^2,$$

daher:

$$\operatorname{tang} rz \cdot \operatorname{tang} rz_1 = -\operatorname{cosec} c^2.$$

Diese beiden Involutionen stimmen also mit (ee_1), (ff_1) in den rechtwinkligen Paaren tr und rs und den zu t und r gehörigen Potenzen überein, sind also mit ihnen identisch.

Und in gleicher Weise ist die Involution, in welcher die reelle zyklische Ebene $\mathfrak{d}$ (oder $\mathfrak{d}_1$) von den beiden elliptischen Involutionen geschnitten wird, deren Doppelebenen die imaginären zyklischen Ebenen $\epsilon, \epsilon_1; \varphi, \varphi_1$ sind, rechtwinklig. Denn $\mathfrak{d}$ und irgendein einschneidendes Paar, etwa $\eta\eta_1$ von der Involution $(\epsilon\epsilon_1)$, stehen, wenn wieder die Vereinigung statt hat, auf d' und einem Paar $y'y_1'$ der Involution $(e'e_1')$ normal. Wie wir eben erkannt haben, ist der Flächenwinkel $d'\,(y', y_1')$ ein rechter, und da $\mathfrak{d}\eta$ auf $d'y'$, $\mathfrak{d}\eta_1$ auf $d'y_1'$ senkrecht steht, so sind auch die Strahlen $\mathfrak{d}\eta$ und $\mathfrak{d}\eta_1$ zu einander normal.

Stellen wir, ebenfalls die Vereinigung annehmend, auf die entsprechenden Strahlen x, x', welche in

$$k_r = \operatorname{cotg}(\tau, rx) \cdot \operatorname{cotg}(\sigma', r'x')$$

(Nr. 344) vorkommen, die Ebenen ξ', ξ normal, so geht k_r über in $\operatorname{cotg}(t', \rho'\xi') \cdot \operatorname{cotg}(s, \rho\xi)$, weil $\sphericalangle(\tau, rx) = (t', \rho'\xi')$, $(\sigma', r'x') = (s, \rho\xi)$, also in $\frac{1}{k_\varrho}$. Daher ist:

$$k_r = \frac{1}{k_\varrho}, \quad k_s = \frac{1}{k_\sigma}, \quad k_t = \frac{1}{k_\tau}.$$

Das war zu erwarten, weil diese Größen die Invarianten der ineinander liegenden Bündel sind. Lassen wir nämlich bei der Invariante

$\xi\xi'$ (s, t, ξ, ξ') die beiden entsprechenden Ebenen ξ, ξ' durch $r \equiv r'$ gehen, so wird sie $(\tau, \sigma, \xi, \xi')$ oder, durch Schnitt mit $\rho \equiv \rho'$,

$$(s, t, \rho\xi, \rho\xi') = \operatorname{cotg}(t, \rho\xi) \cdot \operatorname{cotg}(s', \rho'\xi') = k_\varrho.$$

Und ebenso wird xx' (σ, τ, x, x'), wenn x, x' in $\rho \equiv \rho'$ liegen,

$$(t, s, x, x') = (\sigma, \tau, rx, r'x') = \operatorname{cotg}(\tau, rx) \cdot \operatorname{cotg}(\sigma', r'x') = k_r.$$

Wird die Vereinigung aufgegeben, so bleiben diese Werte bestehen.

350 Wenn für eine Kollineation zweier Bündel die mittleren Axen r, r', die größeren s, t', die kleineren t, s' und die Parameter c, c' gegeben sind, so sind die Fokalaxen und die zyklischen Ebenen gegeben, aber noch nicht die Zuordnung und die Sinne, in denen zugeordnete Gebilde durchlaufen werden. Werden etwa d und d' als entsprechend angenommen und die Gleichheit der Büschel um diese Strahlen, in denen schon die entsprechenden rechten Winkel (ρ, dr) und $(\rho', d'r')$ gegeben sind, noch durch die gleichen Winkel (ρ, ξ) und (ρ', ξ') endgültig festgelegt (Nr. 64), so ist durch:

$$\begin{vmatrix} \rho, & \sigma, & \tau, & \xi \\ \rho', & \sigma', & \tau', & \xi' \end{vmatrix}$$

die Kollineation bestimmt, und mit ihr die weiteren ausgezeichneten Elemente.

Jedem Paar von Scheiteloktanten des einen Bündels entspricht ein solches Paar im andern und benachbarten benachbarte. Seien auf der einen Seite von ρ, sich an einander schließend, die Oktanten I, II, III, IV gelegen, I, II von IV, III durch σ, I, IV von II, III durch τ getrennt, $\mathrm{I}_1, \ldots \mathrm{IV}_1$ die Scheiteloktanten und $\mathrm{I}' \ldots \mathrm{IV}_1'$ im andern Bündel entsprechend, so wollen wir die beiden Bündel mit zwei Ebenen Σ, Σ' schneiden, von denen die eine zu s senkrecht ist und I, II, IV_1, III_1 durchschneidet, die andere zu t' senkrecht ist und I', III_1', II_1', IV' durchschneidet; wir erhalten dann jedes der beiden Felder in die in Nr. 278 betrachteten Viertelfelder, jedes aus einem Oktanten ausgeschnitten, zerlegt. Die Spuren von τ und σ' sind die Fluchtgeraden und diejenigen von ρ und ρ' die Hauptgeraden (Nr. 277); und die einen Viertelfelder und ihre entsprechenden sind so angeordnet, wie es a. a. O. gefunden wurde. Es läßt sich erreichen, daß die gleichen Strahlenbüschel $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$ und, wegen der Symmetrie in bezug auf τ, resp. σ', auch die $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_1'$ in gleichen Punktreihen geschnitten werden; man hat nur die Transversalebenen Σ, Σ' so zu legen, daß ihre Spuren in $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$ von den Scheiteln der Bündel gleichweit entfernt sind. Entsprechende Strahlen x, x' liegen in solchen Flächenwinkeln $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}'\mathfrak{d}_1'$, die von σ und σ' oder von τ und τ' halbiert werden. Daraus folgt, daß Punkten des einen Feldes, welche zwischen den gleichstreckigen Geraden liegen oder außerhalb, Punkte im andern Felde entsprechen, welche außerhalb der gleichstreckigen Geraden desselben liegen oder zwischen ihnen; wie es a. a. O. gefunden wurde.

Die Ebenen Σ, Σ' schneiden nicht die Fokalaxen der Bündel in Brennpunkten der Felder; denn die Spuren von d und d' haben nicht gleiche Entfernung von denen der $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$.

Bei der involutorischen Homologie tritt die in Nr. 347 erwähnte Winkelgleichheit in folgender Weise ein; $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$ vereinigen sich in der Ebene σ der Homologie und tragen identische Büschel, $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_1'$ in der Ebene durch die Axe s und die Gerade, welche in σ zu ihr durch den Bündelscheitel rechtwinklig gezogen ist, und die Büschel bilden eine hyperbolisch-gleichseitige Involution. In der Axe fallen d_1, d_1' zusammen und in ihrer Orthogonalprojektion auf σ die d, d'.

Nur kollineare Bündel mit dieser Winkelgleichheit lassen sich involutorisch machen.

§ 54. Fortsetzung. Feld und Bündel in Kollineation.

Zu den ausgezeichneten Elementen kollinearer Bündel gelangt 351
man schneller, wenn man die absolute Kurve benutzt[1]). Es seien $\mathfrak{K}^2$ und $\mathfrak{L}'^2$ die nach der absoluten Kurve gehenden isotropen Kegel der beiden Bündel und $\mathfrak{K}'^2$, $\mathfrak{L}^2$ die ihnen durch die Kollineation entsprechenden Kegel, bzw. deren Polarbündel. Das gemeinsame Polardreikant von $\mathfrak{K}^2$ und $\mathfrak{L}^2$ ist, als Polardreikant von $\mathfrak{K}^2$ dreirechtwinklig, daher das Dreikant der Axen von $\mathfrak{L}^2$, und ebenso ist das gemeinsame Polardreikant von $\mathfrak{K}'^2$ und $\mathfrak{L}'^2$ das Dreikant der Axen von $\mathfrak{K}'^2$. Weil $\mathfrak{K}^2$, $\mathfrak{L}^2$ den $\mathfrak{K}'^2$, $\mathfrak{L}'^2$ entsprechen, so entspricht das eine gemeinsame Polardreikant dem andern. Diese beiden gemeinsamen Polardreikante, die Axendreikante von $\mathfrak{L}^2$ und $\mathfrak{K}'^2$, sind unsere Dreikante $rst \equiv \rho\sigma\tau$ und $r's't' \equiv \rho'\sigma'\tau'$; und ähnlich ergeben sich $rst \equiv \rho\sigma\tau$ und $\rho'\sigma'\tau' \equiv r's't'$ bei der Korrelation.

Im Falle der Vereinigung: $rst \equiv r's't'$ sind $\mathfrak{L}^2$ und $\mathfrak{K}'^2$ Supplementarkegel, d. h. jede Kante des einen ist senkrecht auf einer Berührungsebene des andern. In der Tat, es sei $\mathfrak{x}$ und x' polar in bezug auf den isotropen Kegel $\mathfrak{K}^2 \equiv \mathfrak{L}'^2$, also senkrecht zueinander, so sind auch die beiden entsprechenden Elemente $\mathfrak{x}'$ und x senkrecht zueinander. Werden $\mathfrak{x}$ und x' Berührungsebene und zugehörige Kante des isotropen Kegels, so wird $\mathfrak{x}'$ Berührungsebene von $\mathfrak{K}'^2$, x Kante von $\mathfrak{L}^2$.

Kehren wir wieder zum allgemeinen Falle zurück. Die vier gemeinsamen Berührungsebenen von $\mathfrak{K}^2$ und $\mathfrak{L}^2$ entsprechen denen von $\mathfrak{K}'^2$ und $\mathfrak{L}'^2$, die sechs Schnittkanten jener denen dieser und den zwei reellen unter jenen die zwei reellen unter diesen.

---

1) Smith, a. a. O.

Immer zwei Gegenkanten (darunter auch die beiden reellen) liegen in einer Ebene des gemeinsamen Polardreikants. Die Ebenenbüschel um zwei entsprechende Schnittkanten enthalten je zwei isotrope Ebenen (Berührungsebenen von $\mathfrak{K}^2$ und $\mathfrak{L}'^2$), und die einen entsprechen den andern; also sind die Ebenenbüschel gleich. Wir haben die sechs Paare Fokalaxen, darunter zwei Paare reeller, und in jedem Bündel das Vierflach, von welchem die Fokalaxen die Gegenkanten sind.

In gleicher Weise führen die Schnittkanten von $\mathfrak{K}^2$ und $\mathfrak{L}^2$ und die ihnen entsprechenden von $\mathfrak{K}'^2$ und $\mathfrak{L}'^2$ zu sechs Paaren entsprechender Verbindungsebenen, darunter zwei reellen. In den projektiven Strahlenbüscheln solcher entsprechenden Ebenen sind die isotropen Strahlen, in denen $\mathfrak{K}^2$ und $\mathfrak{L}'^2$ geschnitten werden, entsprechend, daher die Büschel gleich. Wir haben die sechs Paare zyklischer Ebenen und das Vierkant eines jeden der beiden Bündel, von welchem diese Ebenen die Gegenebenen sind. Wir wissen aus Nr. 334, daß die reellen Geraden d, d_1 und reellen Ebenen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$ mit gegenüberliegenden Elementen ρ, r des Polardreikants inzidieren, und ebenso d', d_1' und $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}_1'$ mit ρ' und r'.

Wenn die absolute Kurve mit der unendlich fernen Kurve von $\mathfrak{L}^2$ sich doppelt berührt, so gibt es ∞^1 Paare entsprechender dreirechtwinkliger Dreikante, in jedem Bündel mit zwei festen Gegenelementen, in diesen vereinigen sich $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$, d und d_1, und ebenso im andern Bündel, und Gleichheit der Winkel dd_1, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ tritt dadurch ein, daß sie beide null sind, so daß der am Ende von Nr. 347 erwähnte Fall vorliegt.

Wir wollen den Kegel $\mathfrak{L}^2$ noch genauer festlegen, indem wir für jede der drei Hauptebenen die Potenz der Involution der konjugierten Strahlen, je für die eine Axe als Zentralstrahl, bestimmen. Diesen Involutionen entsprechen rechtwinklige Involutionen in bezug auf den isotropen Kegel $\mathfrak{L}'^2$. Es seien x', y' zwei rechtwinklige Strahlen in ρ', ihnen entsprechend und in bezug auf $\mathfrak{L}^2$ konjugiert seien x, y. Wir haben:

$$stdxy \;\overline{\wedge}\; s't'd'x'y';$$

die Potenz in bezug auf s und t' ist:

$$\operatorname{tang} sd \cdot \operatorname{tang} t'd' = \operatorname{tang} c \cdot \operatorname{cotg} c';$$

daher auch:

$$\operatorname{tang} sx \cdot \operatorname{tang} t'x' = \operatorname{tang} sy \cdot \operatorname{tang} t'y' = \operatorname{tang} c \cdot \operatorname{cotg} c';$$

nun ist:

$$\operatorname{tang} t'x' \cdot \operatorname{tang} t'y' = -1;$$

also:

$$\operatorname{tang} sx \cdot \operatorname{tang} sy = -\operatorname{tang} c^2 \cdot \operatorname{cotg} c'^2;$$

das ist die Potenz der Involution der in bezug auf $\mathfrak{L}^2$ konjugierten Strahlen in ρ für s als Zentralstrahl.

Für die Projektivität zwischen den Büscheln in σ und σ' ist die Potenz, in bezug auf t und r':

$$\operatorname{tang} te \cdot \operatorname{tang} r'e' = \cos c \cdot i \cdot \sec c' \cdot i = -\cos c \cdot \sec c'.$$

Aber einer Projektivitäts-Potenz (bei getrennten Gebilden) kann man beliebiges Vorzeichen geben, wenn es nur festgehalten wird (Nr. 56); nehmen wir lieber:

$$\cos c \cdot \sec c';$$

so ergibt sich als Potenz der Involution der konjugierten Strahlen in σ, für t als Zentralstrahl, $-\cos c^2 \cdot \sec c'^2$, und ebenso in τ, für r als Zentralstrahl, $-\operatorname{cosec} c^2 \cdot \sin c'^2$.[1])

Aus den Sätzen von Nr. 343 schließen wir: 352

Der Schar konfokaler Kegel 2. Grades mit den Fokalaxen d, d_1 in dem einen Bündel entspricht die Schar konfokaler Kegel mit den Fokalaxen d', d_1' im andern; jene wie diese haben dann auch die weiteren Fokalaxen des betreffenden Bündels zu den ihrigen.

Und dem Büschel konzyklischer Kegel, welche die Ebenen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$ zu zyklischen Ebenen haben, entspricht der Büschel konzyklischer Kegel, für welche $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}_1'$ zyklische Ebenen sind; jene wie diese haben dann auch die weiteren zyklischen Ebenen ihres Bündels zu den ihrigen.

Denn wegen der Gleichheit der Büschel um die entsprechenden Fokalaxen d, d_1 oder in den entsprechenden zyklischen Ebenen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$ geht die rechtwinklige Involution konjugierter Elemente in eine ebensolche um d', d_1', bzw. in $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}_1'$ über, und diese rechtwinkligen Involutionen bestimmen dann die Involutionen, welche die übrigen Fokalaxen bzw. zyklischen Ebenen darstellen.

Auf die entsprechenden Dreikante dd_1x und $d'd_1'x'$, welche bei d und d', d_1 und d_1' gleiche Flächenwinkel haben und in denen die Kantenwinkel dd_1, $d'd_1'$ gleich $2c$, $2c'$ sind, wenden wir die sogenannten Napierschen Analogien der sphärischen Trigonometrie in der Form I an[2]) und dividieren die entsprechenden Gleichungen, wodurch sich ergibt:

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(dx + d_1 x)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(d'x' + d_1'x')} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(dx - d_1 x)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(d'x' - d_1'x')} = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} c'}.$$

---

1) Daraus folgt, wenn s, r, t als Koordinatenaxen genommen werden, als Gleichung des Kegels $\mathfrak{K}^2$:

$$\sin c^2 \cdot \operatorname{cosec} c'^2 x^2 + y^2 + \cos c^2 \cdot \sec c'^2 \cdot z^2 = 0;$$

vgl. Smith.

2) Napiersche Analogien (a, b, c Kantenwinkel, α, β, γ Flächenwinkel):

$$\text{I}\quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c;$$

$$\text{II}\quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} \gamma, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} \gamma.$$

Aus der Konstanz von $dx + d_1x$ oder $dx - d_1x$ folgt diejenige von $d'x' + d_1'x'$ oder von $d'x' - d_1'x'$; was von neuem aussagt, daß einem Kegel aus der Schar (d, d_1) ein Kegel aus der Schar (d', d_1') entspricht.

Weil konfokale Kegel sich rechtwinklig schneiden, so entsprechen sich auch die Normalebenen entsprechender Kegel der beiden Scharen in entsprechenden Kanten, da sie Tangentialebenen je des zweiten durchgehenden konfokalen Kegels sind, daher auch die Evolutenkegel entsprechender Kegel.

Werden die Bündel wieder in der obigen Weise konzentrisch gemacht, daß rst und $r's't'$ sich decken und $d', d_1', \mathfrak{d}', \mathfrak{d}_1'$ auf $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1, d, d_1$ und x', x auf $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$ senkrecht stehen, so führt, weil deren Winkeln $dx, d_1x, d'x', d_1'x'$ die Winkel $\mathfrak{d}'\mathfrak{x}', \mathfrak{d}_1'\mathfrak{x}', \mathfrak{d}\mathfrak{x}, \mathfrak{d}_1\mathfrak{x}$ sich gleich — oder, wenn man will, supplementär — erweisen, die obige Formel zu:

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\mathfrak{d}\mathfrak{x} + \mathfrak{d}_1\mathfrak{x})}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\mathfrak{d}'\mathfrak{x}' + \mathfrak{d}_1'\mathfrak{x}')} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\mathfrak{d}\mathfrak{x} - \mathfrak{d}_1\mathfrak{x})}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\mathfrak{d}'\mathfrak{x}' - \mathfrak{d}_1'\mathfrak{x}')} = \frac{\operatorname{tang} c'}{\operatorname{tang} c}.$$

Diese Formel ergibt sich direkt, wenn man auf die Dreiflache $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1\mathfrak{x}$, $\mathfrak{d}'\mathfrak{d}_1'\mathfrak{x}'$, in denen die Kantenwinkel in $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_1'$ gleich und die Flächenwinkel $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_1'$ gleich $2c'$, $2c$ sind, die Napierschen Analogien II anwendet.

Aus ihr folgt, daß mit $\mathfrak{d}\mathfrak{x} + \mathfrak{d}_1\mathfrak{x}$, bzw. $\mathfrak{d}\mathfrak{x} - \mathfrak{d}_1\mathfrak{x}$ auch $\mathfrak{d}'\mathfrak{x}' + \mathfrak{d}_1'\mathfrak{x}_1'$, bzw. $\mathfrak{d}'\mathfrak{x}' - \mathfrak{d}_1'\mathfrak{x}'$ konstant bleibt, d. h. daß die Ebenen $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$ entsprechende konzyklische Kegel aus den beiden Büscheln umhüllen.

353 Ein Rotationskegel im Bündel O um die Fokalaxe d als Drehaxe geht über in einen Kegel, für welchen d' Fokalaxe ist. Jener berührt den isotropen Kegel $\mathfrak{K}^2$ doppelt in der zu d senkrechten Ebene, welche zu d polar ist nach ihm; daher berührt dieser den Kegel $\mathfrak{K}'^2$ doppelt in der zu d' nach ihm polaren Ebene, welche jener Ebene entspricht.

Wenn aber des ersteren Drehaxe zu $\mathfrak{d}$ normal ist, so entspricht ihm ein Kegel, welcher $\mathfrak{d}'$ zur zyklischen Ebene hat. Die doppelte Berührung mit $\mathfrak{K}'^2$ findet in $\mathfrak{d}'$ statt.

Damit der einem Rotationskegel entsprechende Kegel ebenfalls Rotationskegel sei, muß der erstere auch $\mathfrak{L}^2$ doppelt berühren, und wir haben uns also mit den Kegeln 2. Grades zu beschäftigen, welche $\mathfrak{K}^2$ und $\mathfrak{L}^2$ doppelt berühren. Es gibt drei Systeme von Kegeln, die das tun[1]). Zu jeder Kante des gemeinsamen Polardreikants rst jener Kegel gehört eins; aus ihr haben wir ein zum Büschel $\mathfrak{K}^2\mathfrak{L}^2$ gehöriges Ebenenpaar, in unserem Falle $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1, \epsilon\epsilon_1, \varphi\varphi_1$. Mit zwei Ebenen, welche zu den Ebenen eines dieser Paare harmonisch

1) Vgl. für doppelt berührende Kegelschnitte: Poncelet, Traité des propriétés projectives, Nr. 427 (Band I der 2. Auflage); Steiner, Gesammelte Werke, Bd. II, S. 471; Chasles, Traité des sections coniques, Nr. 482, 497.

sind, haben wir bzw. den einen und den andern Kegel $\mathfrak{K}^2$, $\mathfrak{L}^2$ zu schneiden, und erhalten die Kantenpaare, längs denen sie von einem doppelt berührenden Kegel tangiert werden.

Nehmen wir etwa r und das reelle Paar $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$; die harmonischen Ebenen (ein Paar der darstellenden Involution) seien λ, μ; wenn wir λ mit $\mathfrak{K}^2$ schneiden, so wird die Polare von λ in bezug auf diesen Kegel, also die Senkrechte zu λ die Drehaxe des Rotationskegels sein, welcher längs der Schnittkanten den $\mathfrak{K}^2$ berührt; sie liegt, weil λ durch r geht, in ρ, der Polarebene von r in bezug auf $\mathfrak{K}^2$. Folglich können nur Strahlen des Büschels in ρ Drehaxen von Rotationskegeln des ersten Systems sein. Es sei nun a ein Strahl dieses Büschels und φ der Winkel sa, die Öffnung eines Rotationskegels um die Axe a sei 2ψ; senkrecht zu a sei λ, und zu dieser Ebene sei μ harmonisch in bezug auf $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$; wenn der Rotationskegel den Kegel $\mathfrak{L}^2$ doppelt berührt, so muß die Polare m_1 von μ nach $\mathfrak{L}^2$ identisch sein mit der Polare von μ nach dem Rotationskegel oder, wenn m der Schnitt von μ mit ρ ist, muß m_1 zu m nach beiden Kegeln konjugiert sein. Der Schnitt $\rho\lambda$ sei l; $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$ sind die Schnitte von $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$ (Nr. 346). Wir haben, weil l zu a senkrecht ist, $\operatorname{tang} sl = -\operatorname{cotg}\varphi$; l und m sind zu $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$ harmonisch, also:

$$\operatorname{tang} sl \cdot \operatorname{tang} sm = \operatorname{tang} s\mathfrak{d}^2 = \operatorname{cotg} c'^2;$$

mithin:

$$\operatorname{tang} sm = -\operatorname{cotg} c'^2 \cdot \operatorname{tang}\varphi.$$

Die Potenzen der Involutionen konjugierter Strahlen in ρ, in bezug auf s und a als Zentralstrahlen, sind für die beiden Kegel:

$$-\operatorname{tang} c^2 \cdot \operatorname{cotg} c'^2 \text{ (Nr. 351)} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang}\psi^2.$$

Daher ist:

$$\operatorname{tang} sm \cdot \operatorname{tang} sm_1 = -\operatorname{tang} c \cdot \operatorname{cotg} c'^2;$$

also:

$$\operatorname{tang} sm_1 = \operatorname{tang} c^2 \cdot \operatorname{cotg}\varphi;$$

ferner:

$$\operatorname{tang} am \cdot \operatorname{tang} am_1 = \operatorname{tang}\psi^2;$$

also:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang}\psi^2 &= \frac{\operatorname{tang} sm - \operatorname{tang}\varphi}{1 + \operatorname{tang} sm \cdot \operatorname{tang}\varphi} \cdot \frac{\operatorname{tang} sm_1 - \operatorname{tang}\varphi}{1 + \operatorname{tang} sm_1 \cdot \operatorname{tang}\varphi} \\
&= \frac{-\operatorname{cotg} c'^2 \cdot \operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varphi}{1 - \operatorname{cotg} c'^2 \operatorname{tang}\varphi^2} \cdot \frac{\operatorname{cotg}\varphi \operatorname{tang} c^2 - \operatorname{tang}\varphi}{1 + \operatorname{tang} c^2} \\
&= -\frac{1 + \operatorname{cotg} c'^2}{1 + \operatorname{tang} c^2} \cdot \frac{\operatorname{tang} c^2 - \operatorname{tang}\varphi^2}{1 - \operatorname{cotg} c'^2 \operatorname{tang}\varphi^2} \\
&= -\frac{\cos c^2}{\sin c'^2} \cdot \frac{(\operatorname{tang} c + \operatorname{tang}\varphi)(\operatorname{tang} c - \operatorname{tang}\varphi)}{(1 + \operatorname{cotg} c' \operatorname{tang}\varphi)(1 - \operatorname{cotg} c' \operatorname{tang}\varphi)} \\
&= -\frac{\sin(\varphi + c) \ \sin(\varphi - c)}{\sin(\varphi + c') \cdot \sin(\varphi - c')} \text{ [1]}.
\end{aligned}$$

---

1) Vgl. Smith a. a. O.

Aus dieser Relation zwischen der Öffnung 2ψ des Rotationskegels und dem Winkel φ seiner in ρ gelegenen Axe mit s ergibt sich, daß nur für Winkel φ zwischen c und c' reelle Rotationskegel um die Axe a möglich sind, welche $\mathfrak{L}^2$ doppelt tangieren und denen deshalb im andern Bündel wiederum Rotationskegel entsprechen.

In der Ebene σ haben wir s, $\operatorname{tang} s\mathfrak{d}^2 = \operatorname{cotg} c'^2$, $-\operatorname{tang} c^2 \cdot \operatorname{cotg} c'^2$ zu ersetzen durch t, $\operatorname{tang} t\mathfrak{e}^2 = -\sec c'^2$, $-\cos c^2 \cdot \sec c'^2$ und in τ durch r, $\operatorname{tang} r\mathfrak{f}^2 = -\sin c'^2$, $-\operatorname{cosec} c^2 \cdot \sin c'^2$ und erhalten im ersten Falle:

$$\operatorname{tang} \psi^2 = -\frac{\operatorname{tang} c'^2}{\sin c^2} \cdot \frac{\cos c^2 + \operatorname{tang} \varphi^2}{1 + \sec c'^2 \operatorname{tang} \varphi^2},$$

im zweiten Falle:

$$\operatorname{tang} \psi^2 = -\frac{\cos c'^2}{\operatorname{cotg} c^2} \cdot \frac{\operatorname{cosec} c^2 + \operatorname{tang} \varphi^2}{1 + \sin c^2 \cdot \operatorname{tang} \varphi^2};$$

ψ ist in beiden Fällen imaginär.

Folglich führt nur der Strahlenbüschel in ρ zu reellen Rotationskegeln, denen ebenfalls Rotationskegel entsprechen, und in ihm auch nur die beiden in bezug auf s symmetrischen Winkel zwischen den Strahlen, die mit s die spitzen Winkel c und c' bilden.

Smith hat dies Ergebnis für mit den Bündeln konzentrische Kugeln und die auf ihnen durch die Kollineation hervorgerufene Korrespondenz ausgesprochen. Die Smithsche Abhandlung enthält noch zahlreiche metrische Ergebnisse, auf die wir hier nicht weiter eingehen können.

354 Den einen von zwei korrelativen Bündeln O, O', etwa O', transformiere man durch den konzentrischen orthogonalen Polarbündel in den Bündel O'', der dann zu O kollinear ist. Jeder Winkel von zwei Strahlen oder Ebenen des O' geht in einen ebenso großen Winkel von Ebenen oder Strahlen des O'' über. Seien rst, $r''s''t''$ die entsprechenden dreirechtwinkligen Dreikante von O und O'', so geht $r''s''t''$ durch jenen Polarbündel in das identische dreirechtwinklige Dreiflach $\rho'\sigma'\tau'$ über, wo ρ' die Kanten s'', t'', ... verbindet, und wir haben rst und $\rho'\sigma'\tau'$ entsprechend in O und O'. Seien d und d'', d_1 und d_1'' die entsprechenden gleichen Ebenenbüschel (es genüge, die reellen zu betrachten), so sind, wenn d'' und d_1'' durch den Polarbündel in die ihnen bzw. gleichen Strahlenbüschel δ', δ_1' übergehen, diese den d und d_1 in der gegebenen Korrelation entsprechend. Ebenso entsprechen, wenn δ und δ'', δ_1 und δ_1'' die entsprechenden gleichen Strahlenbüschel in O und O'' sind, von denen δ'' und δ_1'' durch die Polarkorrelation in die gleichen Ebenenbüschel d' und d_1' übergehen, diese den δ und δ_1 in der Korrelation. Man kann ersichtlich noch

weitere Ergebnisse der vorangehenden Betrachtungen in dieser Weise für die Korrelation umwandeln.

Ein Bündel O und ein Feld ω' seien kollinear. Dem isotropen 355
Kegel von O und dem ihn repräsentierenden orthogonalen Polarbündel entspricht in ω' ein Kegelschnitt j'^2 und das ihn darstellende Polarfeld (j'^2). Die Tangenten desselben aus den absoluten Punkten von ω' liefern vier Schnittpunkte, die vier Brennpunkte von j'^2. Den isotropen Tangenten aus einem von ihnen an j'^2 entsprechen isotrope Ebenen in O (Berührungsebenen des isotropen Kegels); und deren Schnittlinie, welche dem Punkte entspricht, ist Axe eines Ebenenbüschels im Bündel, der dem entsprechenden Strahlenbüschel im Felde gleich ist.

W e n n e i n B ü n d e l u n d e i n F e l d k o l l i n e a r s i n d, s o e n t h ä l t j e n e r v i e r E b e n e n b ü s c h e l, z w e i r e e l l e u n d z w e i i m a g i n ä r e, w e l c h e d e n e n t s p r e c h e n d e n S t r a h l e n b ü s c h e l n i n d i e s e m g l e i c h s i n d.

Transformiert man den Bündel durch den konzentrischen orthogonalen Polarbündel, so ergibt sich der entsprechende Satz über gleiche entsprechende Strahlenbüschel in Bündel und Feld, welche korrelativ sind.

Es seien nun Bündel und Feld durch perspektive Lage kollinear. Dann ist ersichtlich derjenige Ebenenbüschel im Bündel, dessen Axe zur Ebene des Feldes normal ist, seinem entsprechenden Strahlenbüschel gleich. Er ist der einzige. Der Kegelschnitt j'^2, der Schnitt des isotropen Kegels in O mit ω' in diesem Falle, geht, wegen dessen in der Parallelebene durch O zu ω' gelegenen Kanten, durch die absoluten Punkte von ω', ist also ein reell-imaginärer Kreis. Die Tangenten aus ihnen vereinigen sich zu je zwei in die Asymptoten, und die vier Schnitte in den Schnittpunkt derselben, den Mittelpunkt, den Fußpunkt jener Büschelaxe, welche ja im orthogonalen Polarbündel der zu ω' parallelen Ebene des Bündels O korrespondiert.

B e i e i n e m B ü n d e l u n d e i n e m F e l d e, d i e i n p e r s p e k t i v e r L a g e s i n d, v e r e i n i g e n s i c h d i e v i e r E b e n e n b ü s c h e l d e s e r s t e r e n, w e l c h e d e n e n t s p r e c h e n d e n S t r a h l e n b ü s c h e l n g l e i c h s i n d, i n d e m j e n i g e n, d e s s e n A x e a u f d e r E b e n e d e s F e l d e s s e n k r e c h t s t e h t.

Wir sehen von neuem (Nr. 337), daß e i n B ü n d e l u n d e i n F e l d, w e l c h e k o l l i n e a r s i n d, i m a l l g e m e i n e n n i c h t i n p e r s p e k t i v e L a g e g e b r a c h t w e r d e n k ö n n e n; e s i s t d a z u e r f o r d e r l i c h, d a ß die beiden reellen Ebenenbüschel des Bündels, welche den entsprechenden Strahlenbüscheln des Feldes gleich sind, sich vereinigt haben (was dann zur Folge hat, daß die imaginären auch an der Vereinigung teilnehmen), oder daß dem isotropen Kegel des Bündels ein (reell-imaginärer) Kreis entspricht, oder reell ausgesprochen, daß durch die

Kollineation zwischen dem Bündel und Felde dem mit jenem konzentrischen orthogonalen Polarbündel ein Polarfeld in diesem korrespondiert, zu welchem dessen absolute Involution als Involution konjugierter Punkte gehört, oder noch einfacher, daß der absoluten Involution des Feldes eine rechtwinklige Strahleninvolution im Bündel entspricht. Das bedeutet aber, daß, wenn (O, τ) der Büschel im Bündel ist, welcher der unendlich fernen Punktreihe des Feldes korrespondiert, und (P, ω') ein beliebiger diese Punktreihe projizierender Büschel ist, der dadurch zu jenem projektiv wird, daß jedem rechten Winkel in (O, τ) ein rechter Winkel in (P, ω') entspricht, d. h. daß diese beiden Büschel gleich sind. Das war die Bedingung für die Möglichkeit der perspektiven Lage, die wir schon a. a. O. erwähnten. Und sie ist hinreichend.

Wir benutzen dazu den Ebenenbüschel von O, dessen Axe m zur Ebene τ senkrecht ist, und den dieser Axe entsprechenden Punkt M' im Felde. Aus ihm projizieren wir die unendlich ferne Punktreihe desselben und erhalten einen Strahlenbüschel, der nach Voraussetzung mit (O, τ) gleich ist und daher auch mit dem Ebenenbüschel m. Letzteren legen wir, mit zur Ebene des Feldes senkrechter Axe, durch den Büschel (M', ω'), jede Ebene durch den entsprechenden Strahl. Die Ebene τ ist parallel zu ω' geworden, und jeder Strahl von (O, τ) geht nach dem entsprechenden unendlich fernen Punkt von ω'. Sind ferner a und A' entsprechende Elemente in Bündel und Feld, so trifft a den Strahl $M'A'$, durch den die a enthaltende Ebene von m geht. Schieben wir also den Bündel parallel, so daß der Scheitel O die Gerade m durchläuft, so werden wir erreichen, daß der an $M'A'$ gleitende Strahl a durch A' geht; dann sind vier Strahlen des Bündels mit den entsprechenden Punkten zur Inzidenz gebracht, nämlich m, a und irgend zwei Strahlen von (O, τ), und infolgedessen alle; denn das vom Bündel (in dieser Lage) in ω' eingeschnittene Feld ist mit dem gegebenen, wegen vier sich selbst entsprechender Punkte, von denen nicht drei in gerader Linie liegen, identisch. Die perspektive Lage ist erreicht.

§ 55. Kongruente Bündel.

356 Zwei Bündel, in denen die parallelen Strahlen einander zugeordnet sind, befinden sich in perspektiver Lage; die Perspektivitätsebene ist die unendlich ferne. Sie sind deshalb kollinear. Auch die entsprechenden Ebenen sind parallel, und alle entsprechenden Winkel von Strahlen oder Ebenen sind gleich; deshalb nennt man solche Bündel kongruent (bisweilen auch gleich). Diese Kongruenz bleibt bestehen, wenn durch Verlegung, unter Festhaltung der Beziehung, die perspektive Lage aufgehoben wird.

Man erhält kongruente Bündel, wenn zwei ähnliche Felder aus Punkten projiziert werden, deren Orthogonalprojektionen auf die Felder entsprechende Punkte sind und deren Entfernungen von den Feldern das Ähnlichkeitsverhältnis haben.

In kongruenten Bündeln sind alle entsprechenden Büschel von Strahlen und Ebenen gleich; daraus folgt, daß die in ihnen enthaltenen isotropen Kegel (und die sie darstellenden orthogonalen Polarbündel) einander entsprechen, und umgekehrt, jede Kollineation zweier Bündel, bei welcher die beiden isotropen Kegel oder deren darstellende orthogonalen Polarbündel entsprechend sind, also rechtwinkligen Elementen stets wieder rechtwinklige Elemente korrespondieren, ist Kongruenz; weil ja dann in jeden zwei entsprechenden Büscheln (von Strahlen oder Ebenen) die isotropen Elemente homolog sind.

Zwei konzentrische kongruente Bündel befinden sich in Hermitescher Kollineation (§ 46), weil der isotrope Kegel sich selbst entspricht; zwei Koinzidenzstrahlen v, w liegen daher auf ihm und sind imaginär; ihre Verbindungsebene ist reell, und ebenso der dritte Koinzidenzstrahl u, der zu ihr nach dem Kegel polar, also senkrecht zu ihr ist.

Zwei ineinanderliegende kongruente Bündel haben nur zwei reelle Koinzidenzelemente, einen Strahl u und die zu ihm senkrechte Ebene.

Die Büschel-Schar der sich selbst entsprechenden Kegel 2. Grades dieser Hermiteschen Kollineation besteht aus den Rotationskegeln (des Bündels) um die Axe u.

Zwei nicht konzentrische kongruente Bündel (mit nicht durchweg parallelen entsprechenden Elementen) haben in jedem nur einen reellen Strahl und eine reelle Ebene, zu ihm senkrecht, welche zu den entsprechenden Elementen parallel sind.

Es seien aus zwei Punkten O, O' zwei Paare von Halbstrahlen gezogen: a_1, b_1; a_1', b_1', welche gleiche Winkel bilden: $a_1 b_1 = a_1' b_1'$; die ergänzenden Halbstrahlen seien a_2, b_2; a_2', b_2', während a, b, a', b' die Namen der vollen Strahlen sein mögen. Zu einem dritten Halbstrahl c_1 kann man in zwei Weisen einen dritten Halbstrahl c_1' im andern Bündel fügen, so daß die dreikantigen Ecken $a_1 b_1 c_1$ und $a_1' b_1' c_1'$ kongruent sind: einmal in der Weise, daß diese Ecken zur Deckung gebracht werden können, also gleichsinnig sind, das andere Mal so, daß sie nicht zur Deckung gebracht werden können, ungleichsinnig sind; in diesem Falle kann man aber die Scheitelecke $a_2' b_2' c_2'$ mit $a_1 b_1 c_1$ und $a_1' b_1' c_1'$ mit $a_2 b_2 c_2$ zur Deckung bringen. Man wird kongruente Bündel erhalten, wenn man die Konstruktion entsprechender Halbstrahlen x_1, x_1' in gleicher Weise fortsetzt, immer gleichsinnige oder immer ungleichsinnige Ecken herstellend. Arbeitet man mit $a_2' b_2' x_2'$ statt mit $a_1' b_1' x_1'$, so führt man den einen Fall auf den andern zurück.

Kongruente Bündel sind daher immer deckbar; man muß nur die richtigen Halbstrahlen vereinigen.

Die Bündel z. B., welche aus zwei in bezug auf eine Ebene symmetrischen Punkten O, O' deren Feld projizieren, sind kongruent; es lassen sich aber nicht diejenigen Halbstrahlen zur Deckung bringen, welche die projizierten Punkte enthalten. Die Deckung wird erzielt, wenn man den einen Bündel um die Gerade OO' um 180^0 dreht und dann durch Parallelverschiebung die Scheitel vereinigt.

Man kann also die Bezeichnung so einrichten, daß mit a_1 und b_1, a_1' und b_1' von x_1 und x_1' gleichsinnige kongruente Ecken gebildet werden.

357 Wir suchen zwei kongruente Bündel durch vier Paare entsprechender Strahlen zu bestimmen. Es würde nicht genügen, wenn man etwa zweimal gleiche Strahlenbüschel so in den Ebenen ϵ und ϵ', φ und φ' herstellte, daß beidemal $l = \epsilon\varphi$ und $l' = \epsilon'\varphi'$ entsprechend sind, und dann aus ihnen die Strahlen a, b und a', b', c, d und c', d' zur Festlegung nähme. Denn beliebige zwei kollineare Bündel enthalten zwei Paare entsprechender gleicher Strahlenbüschel. Sind aber sowohl ϵ und φ, als ϵ' und φ' rechtwinklig, so wird die Kongruenz erreicht. Denn die durch: $abl \;\overline{\wedge}\; a'b'l'$ und $cdl \;\overline{\wedge}\; c'd'l'$ festgelegten Projektivitäten sind die Gleichheiten, aus denen wir diese entsprechenden Elemente genommen haben. Infolge dieser Gleichheiten sind dann in der Kollineation

$$\begin{vmatrix} a\,b\,c\,d \\ a'b'c'd' \end{vmatrix}$$

die orthogonalen Involutionen in (O, ϵ) und (O', ϵ') entsprechend, sowie die in (O, φ) und (O', φ'); das sind Involutionen konjugierter Elemente in den orthogonalen Polarbündeln O, O'; da nun auch ϵ und φ in dem einen, ϵ' und φ' in dem andern konjugiert sind, so geht der orthogonale Polarbündel in O durch die Kollineation in einen Polarbündel über, in welchem die orthogonalen Involutionen in (O', ϵ'), (O', φ') Involutionen konjugierter Strahlen und die Trägerebenen ϵ', φ' konjugiert sind, also in den orthogonalen Polarbündel in O' über, denn dadurch ist ein Polarbündel eindeutig bestimmt. Daraus folgt die Kongruenz der Bündel.

Schneiden wir ϵ und ϵ', φ und φ' mit entsprechenden Ebenen ξ, ξ', so ergeben sich entsprechende Strahlen der gleichen Strahlenbüschel; es entstehen die kongruenten rechtwinkligen Ecken $\epsilon\varphi\xi$, $\epsilon'\varphi'\xi'$; also sind auch die Flächenwinkel $\epsilon\xi$ und $\epsilon'\xi'$ gleich; ebenso $\epsilon\eta$, $\epsilon'\eta'$. Nun sind auch die Ecken $\epsilon\xi\eta$, $\epsilon'\xi'\eta'$ (je aus den acht Ecken geeignet gewählt) kongruent, denn auch die Kantenwinkel in ϵ und ϵ' sind gleich. Daher sind die Winkel $\xi\eta$ und $\xi'\eta'$ gleich.

Formt man beide Bündel orthogonal um, wodurch die Kongruenz in sich übergeht, so erhält man die Bestimmung durch vier Paare entsprechender Ebenen. Formt man bloß den einen um, so ergeben sich korrelative Bündel mit durchweg gleichen entsprechenden Winkeln (ungleicher Art).

Zwei ineinander liegende kongruente Bündel seien aus 358
den gleichen Winkeln $a_1 b_1$ und $a_1' b_1'$ so konstruiert, daß entsprechende Halbstrahlen x_1 und x_1' mit a_1 und b_1, a_1' und b_1' gleichsinnige kongruente Ecken bilden. Sie bilden dann auch mit a_1 und b_2, a_1' und b_2', usw. gleichsinnige kongruente Ecken, und umgekehrt. Es seien $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ die Halbstrahlen, welche die Winkel $a_1 a_1'$, $b_1 b_1'$ halbieren, α, β die Ebenen, welche in diesen Strahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ auf den Winkelebenen senkrecht stehen, u die Schnittebene $\alpha\beta$, die durch O geht, und u_1, u_2 ihre Halbstrahlen. Weil die Ecken $a_1 \mathfrak{a}_1 u_1$ und $a_1' \mathfrak{a}_1 u_1$ kongruent sind, so ist $\sphericalangle\, a_1 u_1 = a_1' u_1$ und ebenso $\sphericalangle\, b_1 u_1 = b_1' u_1$. Die Ebene Σ, welche auf u in U, der etwa zu u_1 gehöre, normal ist, schneide $a, \ldots, b'$ in A, B, A', B'. Weil $\sphericalangle\, a_1 u_1 = a_1' u_1$, so liegen A und A' auf a_1 und a_1' oder auf a_2 und a_2'. Die rechtwinkligen Dreiecke OUA und OUA' sind kongruent, also $OA = OA'$, ebenso $OB = OB'$. Die Winkel AOB und $A'OB'$ sind entweder $a_1 b_1$ und $a_1' b_1'$, oder $a_1 b_2$ und $a_1' b_2'$, oder usw., also jedenfalls gleich; demnach $AB = A'B'$.

Die Ebene α geht durch die Mitte von AA', steht senkrecht auf aa' und Σ, daher auf der Schnittlinie AA'; folglich ist $\alpha\Sigma$ die Mittelsenkrechte von AA', $\beta\Sigma$ die von BB' in Σ, der Schnittpunkt U dieser Mittelsenkrechten also das Zentrum der Drehung (in Σ), welche AB in $A'B'$ überführt (Nr. 293). Demnach führt die Drehung um u die a, b in a', b'.

Nehmen wir an, A und A' liegen auf a_1, a_1', B und B' aber auf b_2, b_2', so kommt durch die Drehung die Ecke (a_1, b_2, OU) zur Deckung mit (a_1', b_2', OU); also sind sie (schon in der ursprünglichen Lage) kongruent und gleichsinnig; mithin gilt das auch für (a_1, b_1, OU) und (a_1', b_1', OU). Daher ist $\alpha\beta = OU = u$ die reelle Koinzidenzgerade der ineinander liegenden Bündel.

Die Halbstrahlen x_1 und x_1', welche nach Konstruktion mit a_1 und b_1, a_1' und b_1' gleichsinnige kongruente Bündel bilden und daher auch mit a_1 und b_2, a_1' und b_2', kommen bei der obigen Drehung, welche a_1, b_2 nach a_1', b_2' bringt, zur Deckung, also jeder Strahl mit seinem entsprechenden.

Und ähnliches gilt bei den andern Lagen von $A, \ldots$ auf $a, \ldots$

Die reelle Koinzidenzgerade, welche zwei in einander liegende kongruente Bündel besitzen, ist Axe einer Drehung, welche sie zur Deckung bringt.

Im Anschluß an diese Betrachtung kongruenter Bündel will ich eine Aufgabe erwähnen, auf welche mich Cayley vor längerer Zeit brieflich aufmerksam gemacht hat[1]): Zwei Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$, deren Ecken homolog zugeordnet sind, in perspektive Lage zu bringen oder zunächst ihre homologen Ecken durch entsprechende Strahlen kongruenter Bündel zu projizieren. Wenn bloß ABC, $A'B'C'$ gegeben sind, so ist jedem Punkte O eine endliche Anzahl von Punkten O' (vielleicht acht) zugeordnet, so daß die Bündel $O\ (A, B, C)$ und $O'\ (A', B'; C')$ kongruent sind; womit nicht gesagt ist, daß diejenigen Ecken, deren Kanten die Punkte enthalten, die zur Deckung zu bringenden sind.

Bei den Tetraedern muß es dann zwei Kurven von Punkten O und O' geben, aus denen die Ecken durch kongruente Bündel projiziert werden.

Jedenfalls liegt nicht ein konstruierbares Problem vor (§ 20).

§ 56. Zyklische Kollineationen, Kollineation in eingeschriebener Dreieckslage.

359 Weil die Ergebnisse projektiv sind, so genügt es, Felder zu betrachten. Zu einem Punkt A_1 des ersten Feldes sei A_2 im zweiten, das mit dem ersten in derselben Ebene liegend angenommen wird, dem A_2, wenn er zum ersten Felde gerechnet wird, A_3 im zweiten entsprechend, usw.; wir nehmen an, die Kollineation sei so beschaffen, daß A_{n+1} mit A_1 identisch ist, daß sie also einen n-elementigen Zyklus von Punkten enthält, der dann unmittelbar mit einem Zyklus von Geraden A_1A_2, $A_2A_3, \ldots A_nA_1$ verbunden ist. Und umgekehrt, ein solcher Zyklus $a_1, \ldots a_n$ führt zu einem Punkte-Zyklus $a_1 a_2$, $a_2 a_3, \ldots a_n a_1$. Wir setzen voraus: $n > 2$, weil wir den Fall involu-
p.60 torischer kollinearer Felder: $n = 2$ schon behandelt haben.

Ist U ein reeller Koinzidenzpunkt, so entsteht durch unsern Zyklus in dem Büschel U eine zyklische Projektivität, die aber möglicherweise einen niedrigeren Grad n' hat, wobei n' ein Teiler von n ist und der n'-strahlige Zyklus $\frac{n}{n'}$-mal durchlaufen wird. Ist auch noch $n' > 2$, so sind die Koinzidenzstrahlen v, w dieser Projektivität imaginär (Nr. 141), und demnach auch die Punkte W, V von u, durch die sie gehen. Daher müssen, wenn alle drei Koinzidenzpunkte U, V, W reell sind, sämtliche Punkte des Zyklus sowohl auf zwei Strahlen durch U abwechselnd liegen, als auch auf zwei Strahlen durch V (oder W), wobei jene wie diese Strahlen gepaart sind in einer Involution,

1) Vgl. Proceed. London Math. Society, Bd. 4, S. 396; Mathematical Papers, Bd. 8, S. 200.

welche U (V, W), V (U, W) zu Doppelstrahlen hat. Es kann sich dann nur um die vier Punkte handeln, in denen jene von diesen geschnitten werden.

Aber auch, wenn der vorausgesetzte Zyklus aus vier Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 besteht, wo dann die Kollineation gerade durch ihn bestimmt ist:

$$\begin{vmatrix} A_1 A_2 A_3 A_4 \\ A_2 A_3 A_4 A_1 \end{vmatrix},$$

ist nur ein Koinzidenzpunkt und die ihm gegenüberliegende Koinzidenzgerade reell. Ersichtlich entsprechen die beiden Geraden A_1A_3, A_2A_4 sich involutorisch und ebenso die beiden Punkte $S = (A_1A_2, A_3A_4)$ und $T = (A_1A_4, A_2A_3)$; daher ist $U = (A_1A_3, A_2A_4)$ ein reeller Koinzidenzpunkt und $u = ST$ eine reelle Koinzidenzgerade; auf ihr sind die konjektiven Punktreihen entsprechender Punkte involutorisch wegen des involutorischen Paars ST; auch für die Schnitte K, L von A_1A_3, A_2A_4 mit u erkennt man dies sofort. Aber diese liegen zu jenen harmonisch, also elliptisch; daher sind die sich selbst entsprechenden Punkte V, W auf u imaginär und durch diese elliptische Involution (ST, KL) dargestellt.

Wenn also eine ebene Kollineation einen n-elementigen Zyklus besitzt, wo $n > 2$, so sind nur ein Koinzidenzpunkt U und die gegenüberliegende Koinzidenzgerade u reell.

Über die elliptische Involution auf u, welche die imaginären Koinzidenzpunkte V, W definiert, stellen wir nun (Nr. 79) eine rechtwinklige Involution in einer andern Ebene τ und projizieren unsere ebene Kollineation mit einem n-elementigen Zyklus $A_1A_2 \ldots A_n$ aus dem Scheitel dieser Involution auf eine Ebene, welche zur Ebene τ parallel ist. Wir erhalten dann eine ebene Kollineation mit einem endlichen Koinzidenzpunkte $\mathfrak{U}$ und zwei unendlich fernen $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, die in den absoluten Punkten liegen. Daher ist sie eine gleichsinnige Ähnlichkeit mit $\mathfrak{U}$ als Ähnlichkeitszentrum (Nr. 292). Sie enthält einen Zyklus $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n$, die Projektion des gegebenen Zyklus. Nehmen wir an, daß $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ nicht auf demselben Kreise um $\mathfrak{U}$ liegen, so daß $\mathfrak{U}\mathfrak{A}_1 \gtrless \mathfrak{U}\mathfrak{A}_2$, so folgt, weil:

$$\frac{\mathfrak{U}\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{U}\mathfrak{A}_2} = \frac{\mathfrak{U}\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{U}\mathfrak{A}_3} = \cdots,$$

daß die Punkte $\mathfrak{A}$ sich immer weiter von $\mathfrak{U}$ entfernen oder immer mehr sich ihm nähern. Das widerspricht der Voraussetzung, daß $\mathfrak{A}_{n+1}$ in $\mathfrak{A}_1$ fällt. Folglich liegen alle n Punkte des Zyklus der $\mathfrak{A}$ auf demselben Kreise um $\mathfrak{U}$, und es handelt sich sogar um Kongruenz. Die entsprechenden Winkel $\mathfrak{A}_1\mathfrak{U}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_2\mathfrak{U}\mathfrak{A}_3, \ldots \mathfrak{A}_n\mathfrak{U}\mathfrak{A}_1$ sind gleich, also jeder gleich $\frac{2\nu\pi}{n}$, wo ν zu n teilerfremd ist, weil sonst schon früher Rückkehr zum Anfangspunkte stattfände. Die Kollineation in der Projektionsebene ist durch Drehung um $\mathfrak{U}$ um den Winkel $\frac{2\nu\pi}{n}$ entstanden[1]); und jeder Punkt der Ebene führt zu einem n-elementigen Zyklus (einem regelmäßigen n-Ecke ν^{ter} Art), der auf einem Kreise um $\mathfrak{U}$ liegt und dessen Seiten einen zweiten konzentrischen Kreis berühren.

Den konzentrischen Kreisen um $\mathfrak{U}$, welche alle $\mathfrak{U}$ und die unendlich ferne Gerade zu Pol und Polare haben und daher sich in den absoluten Punkten berühren, entsprechen in der ursprünglichen Figur Kegelschnitte einer Büschel-Schar, welche sich in den imaginären Koinzidenzpunkten V, W berühren mit w, v als zugehörigen Tangenten, also mit u als Berührungssehne und U als Berührungspol. Wie solche Kegelschnitte reell konstruiert werden können, sobald die definierenden Involutionen für V, W; w, v gegeben sind, ist in Nr. 304 besprochen werden. Somit ergibt sich:

Wenn eine ebene Kollineation einen Zyklus von n Punkten oder Geraden, wo $n > 2$, besitzt, so liegt derselbe vollständig auf einem Kegelschnitt, welcher in den imaginären Koinzidenzpunkten V, W die Koinzidenzgeraden w, v berührt, bzw. tangiert einen solchen. Auf diesem Kegelschnitte (und um ihn) erhalten wir dann (Nr. 139) eine zyklische Projektivität. Aber auch jeder andere Kegelschnitt der durch jene Berührungen definierten Büschel-Schar trägt zwei solche Projektivitäten. Die ganze Kollineation ist zyklisch; jedes Element gehört zu einem Zyklus. Wir nennen sie zyklisch vom n^{ten} Grade, weil das $(n+1)^{\text{te}}$ Element (und kein früheres) mit dem Ausgangselemente sich vereinigt. Man sagt wohl auch: Kollineation in n-Eckslage.

Die Kollineation ist eine Hermitesche, weil alle Kegelschnitte jener Büschel-Schar sich selbst entsprechen (§ 46). Jedem ist ein zweiter so zugeordnet, daß die beiden Kurven Ponceletsche n-Ecke zulassen (Nr. 198). Jeder der beiden Kegelschnitte ist Direktionskurve der zyklischen Projektivität auf bzw. um den andern.

Wenn aus einem Zyklus auf vollständige Zyklizität geschlossen werden soll, so darf kein Element desselben mit einem Koinzidenzelemente inzidieren; weil dann der ganze Zyklus sich auf diesem befindet und nur die konjektiven Gebilde, welche von ihm getragen werden, zyklisch projektiv werden.

Man erkennt leicht, daß eine Homologie nicht zyklisch von höherem Grade als 2 sein kann.

---

1) Im Büschel um $\mathfrak{U}$ entsteht nur zyklische Projektivität vom Grade $\frac{n}{2}$, wenn n gerade ist (Nr. 361).

In dem Falle $n=3$[1]) sind zwei zyklische Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ stets in perspektiver Lage und zwar dreifach. 360

Denn aus:

$$A_1(A_2, A_3, B_1, B_2) \barwedge A_2(A_3, A_1, B_2, B_3) \barwedge A_2(A_1, A_3, B_3, B_2)$$

folgt, daß (A_1B_1, A_2B_3), A_3, B_2 in gerader Linie liegen oder daß:

$$A_1B_1,\ A_2B_3,\ A_3B_2$$

durch denselben Punkt C_1 gehen.

Dieser Figur, im ersten Felde, entspricht im zweiten, daß:

$$A_2B_2,\ A_3B_1,\ A_1B_3$$

durch einen Punkt C_2 gehen, und die nochmalige Wiederholung gibt, daß auch:

$$A_3B_3,\ A_1B_2,\ A_2B_1$$

durch einen Punkt C_3 gehen.

Die drei Zentren C_1, C_2, C_3 bilden also ebenfalls ein zyklisches Dreieck. Aber je zwei von drei so zusammengehörigen Dreiecken sind dreifach perspektiv mit den Ecken des dritten Dreiecks als Zentren; denn z. B. C_1A_1, C_2A_3, C_3A_2 gehen durch B_1, usw.

Die Perspektivitätsaxen sind auch zyklisch.

Bei zwei beliebigen kollinearen Feldern seien wieder r, q' die Fluchtgeraden; ferner seien p und p' zwei entsprechende Strahlen zweier entsprechender gleicher Strahlenbüschel der Felder; dann ist $\sphericalangle pr = \sphericalangle p'q'$ (Nr. 277). Daher kann man das zweite Feld mit p' und q' auf r und p legen und hat in $pq^\infty r \equiv q'r'^\infty p'$ ein zyklisches Dreiseit. Folglich ist die Kollineation zyklisch vom dritten Grade geworden.

Beliebige zwei kollineare (nicht affine) Felder kann man so ineinander legen, daß sie zyklisch vom 3. Grade werden.

Bei $n=4$ wollen wir in dem Büschel von Kegelschnitten durch den Zyklus $A_1A_2A_3A_4$ denjenigen aufsuchen, der zur Büschel-Schar der sich in den imaginären Koinzidenzpunkten doppelt berührenden Kegelschnitte gehört. Für alle Kegelschnitte jenes Büschels sind die in Nr. 359 erwähnten U und u Pol und Polare und die Punkte S und T konjugiert; für den verlangten müssen auch K und L konjugiert sein. Er ist also derjenige, aus dessen Punkten A_1, A_3; A_2, A_4 durch harmonische Würfe projiziert werden; seine Tangente in A_1 ist der vierte harmonische Strahl zu A_1A_3 in bezug auf $A_1(A_2, A_4)$, geht also durch L; dasselbe tut die Tangente in A_3, so daß A_1A_3K Polare von L ist und A_2A_4L Polare von K.

1) Für ihn gebraucht Schröter (Oberflächen 2. Ordnung, § 47) die Benennung: Kollineation in trilinearer Lage, welche sich jedoch nicht empfiehlt.

Es sei auf dem Kegelschnitt aus der Büschel-Schar, welcher den Zyklus $X_1 \ldots X_4$ trägt, Y_1 ein beliebiger anderer Punkt, $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$ der Zyklus, zu dem er gehört; so ist:

$$Y_1(X_1, X_3, X_2, X_4) \barwedge Y_4(X_1, X_3, X_2, X_4) \barwedge Y_1(X_2, X_4, X_3, X_1)$$
$$\barwedge Y_1(X_1, X_3, X_4, X_2);$$

also ist dieser Wurf harmonisch.

361 Wiederholt man eine ebene Kollineation S als Transformation, die vom ersten zum zweiten Felde führt, mehrmals, so ergibt sich, da die Eindeutigkeit und Linearität erhalten bleibt, eine Kollineation, welche ersichtlich das nämliche Koinzidenzdreieck hat; wir bezeichnen diese Kollineation wiederum als Potenz S^k (Nr. 143), wo k die Zahl ist, wie oft die Transformation vorgenommen wird. Besitzt die gegebene Kollineation einen n-elementigen Zyklus, so sind bei S^n alle n Elemente desselben sich selbst entsprechend; dazu kommt das Koinzidenzdreieck. Die Büschel um dessen Ecken sind identisch geworden; daraus folgt, daß jeder Punkt mit seinem entsprechenden sich deckt. Die Projektivität auf (um) jeden Kegelschnitt der Büschel-Schar ist Identität geworden. Jedes Element kehrt durch die n-malige Kollineation in sich zurück; d. h. es gehört in S einem Zyklus an.

Für die Kollineation S^k ergibt sich durch dieselben Überlegungen, wie in Nr. 143, daß sie vom Grade $\frac{n}{d}$ ist, wenn n und k den größten gemeinsamen Teiler d haben, indem jeder Zyklus von S in d Zyklen von $\frac{n}{d}$ Elementen zerlegt wird. Ist n gerade und $k = \frac{n}{2}$, so erhält man eine involutorische Kollineation, also (Nr. 297) involutorische Homologie mit U als Zentrum und u als Axe. Es sind in ihr entsprechend der i^{te} und der $\left(\frac{n}{2} + i\right)^{\text{te}}$ Punkt des Zyklus von S, also zwei gegenüberliegende Punkte und liegen je auf einem Strahle durch U und ebenso schneiden gegenüberliegende Seiten des Zyklus sich auf u. Wir sehen, daß, bei geradem n, die zyklischen Projektivitäten um U und auf u nicht vom n^{ten}, sondern nur vom $\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ Grade sind.

Zwei Zahlen k, die sich zu n ergänzen, führen zu denselben Zyklen, nur in entgegengesetztem Sinne umlaufen. In dem aus A_i sich ergebenden Zyklus (von $\frac{n}{d}$ Elementen) von S^k hat das α^{te} Element hinter A_i den Zeiger $i + \alpha k$, in dem Zyklus aber von S^{n-k} das $\left(\frac{n}{d} - \alpha\right)^{\text{te}}$ Element den Zeiger $i + \left(\frac{n}{d} - \alpha\right)(n - k)$. Diese beiden Zeiger sind nach dem Modul n kongruent; also handelt es sich um den nämlichen Punkt.

Wird aber beim zweiten Zyklus der Sinn umgekehrt, so wird das $\left(\frac{n}{d} - \alpha\right)^{\text{te}}$ Element das α^{te} hinter A_i. Z. B.:

$$\begin{aligned} n = 6 \quad & k = 1 \quad A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \\ & k = 5 \quad A_1 A_{1+5} A_{1+2\cdot5} A_{1+3\cdot5} A_{1+4\cdot5} A_{1+5\cdot5} \\ & \qquad \equiv A_1 A_6 A_5 A_4 A_3 A_2. \end{aligned}$$

Die beiden Kollineationen S^k und S^{n-k} sind also Umkehrungen voneinander: sie sind dieselbe Kollineation, die eine als Transformation vom ersten ins zweite Feld, die andere als Transformation vom zweiten ins erste. Bezeichnet man wieder, wie in Nr. 86 und 143, S^n, die Identität mit 1, so kann man S^{n-k} auch mit S^{-k}, also S^{n-1}, die Umkehrung von S, mit S^{-1} bezeichnen.

Weil jeder Zyklus von einem Kegelschnitt der Büschel-Schar getragen wird, und für die zyklische Projektivität auf ihm u, welche die sich selbst entsprechenden Punkte V, W verbindet, die Projektivitätsaxe ist, so laufen (Nr. 139) alle Verbindungslinien zweier Punkte eines Zyklus, deren Zeigersumme einer bestimmten Zahl ζ nach dem Modul n kongruent ist, durch denselben Punkt der u, und die den n Werten von ζ entsprechenden Punkte bilden auf u einen Zyklus der zyklischen Projektivität, welche diese Gerade trägt. Für die obige Projektionsfigur mit ihren regelmäßigen Polygonen ist dies unmittelbar zu erkennen.

Es sei K_0 ein bestimmter Kegelschnitt der Büschel-Schar. Alle S^k, deren k denselben größten gemeinsamen Teiler d mit n hat, führen zu ihm eingeschriebenen zyklischen $\frac{n}{d}$-Ecken, die alle demselben zweiten Kegelschnitt K_0' der Büschel-Schar umgeschrieben sind, und alle jenem umgeschriebenen sind einem dritten K_0'' eingeschrieben. Ist, bei geradem n, $d = \frac{n}{2}$, so ist K_0' der doppelte Büschel U, K_0'' die doppelte Gerade u.

Weil V, W imaginär sind, so sind die Invarianten (Nr. 290) von 362
der Form:

$$\lambda_{uv} = \alpha + \beta i; \quad \lambda_{wu} = \frac{1}{\alpha - \beta i}, \quad \lambda_{vw} = \frac{\alpha - \beta i}{\alpha + \beta i}.$$

Da eine zyklische Kollineation eine Hermitesche ist, so ist $\lambda_{wu} = \lambda_{uv}$; daher $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, und alle drei Invarianten haben den absoluten Betrag 1. Ihr Produkt ist 1. Bezeichnen wir sie, bzw. ihre Umkehrungen, einfacher:

$$\lambda_{vw} = \lambda, \quad \lambda_{uw} = \lambda_{vu} = \lambda_1;$$

so ist:

$$\lambda = \lambda_1^2.$$

Nun ist:

$\lambda = (A_1 A_2 \mathfrak{V} \mathfrak{W}) = U(A_1 A_2 W V) = U(A_2 A_3 W V) = \ldots = U(A_n A_1 W V)$;

folglich:

$$\lambda^n = 1.$$

Ebenso:

$$\lambda_1{}^n = 1.$$

Also sind beide Invarianten λ, λ_1 imaginäre n^{te} Wurzeln der positiven Einheit. Zugleich erkennt man λ^k, $\lambda_1{}^k$ als Invarianten von S^k; die von $S^n = 1$ müssen ja 1 sein.

Es fragt sich, ob λ, λ_1 primitive Wurzeln sind, d. h. ob die n^{ten} Potenzen die niedrigsten der Einheit gleichen Potenzen sind. Nehmen wir an, λ^ν, $\lambda_1{}^{\nu_1}$ seien die niedrigsten Potenzen, wo dann ν, ν_1 Teiler von n sein müssen; denn der Exponent einer Potenz, die gleichfalls 1 ist, ist ein Vielfaches des niedrigsten Exponenten. Nun ist $1 = \lambda^\nu = \lambda_1{}^{2\nu}$; daher ist 2ν ein Vielfaches von ν_1. Ferner, wenn 2ρ ein Vielfaches von ν_1 ist, so ist $\lambda^\rho = \lambda_1{}^{2\rho} = 1$; also $\rho \geqq \nu$. Daher ist 2ν die kleinste gerade Zahl, die ein Vielfaches von ν_1 ist. Also ist $\nu = \frac{\nu_1}{2}$ oder $\nu = \nu_1$, je nachdem ν_1 gerade oder ungerade ist. Wir haben, aus $A_1 \ldots A_n$ hervorgehend, in beiden Büscheln U und V (oder W) einen ν_1-elementigen Zyklus, der im Falle eines geraden ν_1 im Büschel U ein zweimal durchlaufener $\frac{\nu_1}{2}$-elementiger ist; es sind sowohl die Strahlen UA_1 und UA_{ν_1+1}, als die Strahlen VA_1 und VA_{ν_1+1} identisch, demnach auch $A_1 \equiv A_{\nu_1+1}$. Folglich muß $\nu_1 = n$ sein, weil sonst die Kollineation nicht zyklisch vom n^{ten} Grade wäre; λ_1 ist also primitive Wurzel. Ist n ungerade, so ist auch $\nu = n$, daher auch λ primitiv, und wir haben im Büschel U eine zyklische Projektivität n^{ten} Grades, und ebenso auf u. Ist aber n gerade, so ist $\nu = \frac{n}{2}$ und λ nicht primitiv. Die Projektivität um U und auf u ist nur zyklisch vom Grade $\frac{n}{2}$.

Bei $n = 3$ ist $\lambda_{wu}^3 = 1$; daher: $\lambda_{vw} = \frac{1}{\lambda_{wu}^2} = \lambda_{wu}$; es sind alle drei Invarianten gleich: $\lambda_{vw} = \lambda_{wu} = \lambda_{uv}$; und die Kollineation ist eine dreifach Hermitesche. Daß, umgekehrt, eine dreifach Hermitesche Kollineation zyklisch vom 3. Grade ist, haben wir schon in Nr. 305 erkannt. Wir haben daher auf dem Kegelschnitte $UVWA_1A_2$ (der nicht A_3 enthält) drei Involutionen (Nr. 304):

$$A_1A_2,\ VW,\ UU;\quad A_1A_2,\ WU,\ VV;\quad A_1A_2,\ UV,\ WW,$$

von denen je zwei durch die dritte ineinander übergeführt werden (Nr. 85). A_1A_2 ist die Gerade, auf der die Seiten des eingeschriebenen Dreiecks UVW sich mit den Tangenten in den Gegenecken treffen.

Wenn zwei ebene Kollineationen S, T (als Transformationen 363
vom ersten ins zweite Feld) dasselbe Koinzidenzdreieck UVW haben, so sind sie vertauschbar; d. h. die Kollineation, die sich durch sie, hintereinander vorgenommen, ergibt, ist bei beiden Reihenfolgen dieselbe. Man bezeichnet diese Kollineation (vgl. Nr. 86) als ein Produkt ST, und die Vertauschbarkeit der Faktoren (Kommutativität) gilt im allgemeinen nicht; im vorliegenden Falle gilt sie, und dann nennt man die Transformationen vertauschbar.

In der Tat, X gehe durch S in X' und dieser durch T in X'' über, hingegen X durch T in X_1 und dieser durch S in X_2. Wegen S ist dann:

$$U(X, X_1, V, W) = U(X', X_2, V, W),$$

wegen T:

$$U(X, X', V, W) = U(X_1, X'', V, W),$$

also auch:

$$U(X, X_1, V, W) = U(X', X'', V, W);$$

daher:

$$U(X', X_2, V, W) = U(X', X'', V, W);$$

also $UX_2 \equiv UX''$, ebenso $VX_2 \equiv VX''$; folglich $X_2 \equiv X''$.

Die Kollineation S enthalte einen Zyklus $A_1 A_2 \ldots A_n$; wir legen, indem X_1 ein beliebiger Punkt der Ebene ist, aus dem, durch Wiederholung von S, X_2, X_3, $X_4, \ldots$ sich ergeben, eine Kollineation T fest, in der den Punkten A_1, U, V, W die Punkte X_1, U, V, W entsprechen. Durch die Reihenfolge T, S geht A_1 in X_1, dieser in X_2 über; also geht durch die Reihenfolge S, T A_1 in A_2 und A_2 in X_2 über. T führt also A_1 in X_1, A_2 in X_2, ebenso A_3 in $X_3, \ldots, A_{n+1} \equiv A_1$ in $X_{n+1} \equiv X_1$ über; auch die X bilden in S einen Zyklus[1]).

Aus zwei involutorischen Homologien $\mathfrak{H}_1 = (S_1, s_1)$, 364
$\mathfrak{H}_2 = (S_2, s_2)$ mit einer gewissen Spezialität läßt sich eine zyklische Kollineation 3. Grades ableiten, welche für die Theorie der ebenen Kurven 3. Ordnung wertvoll ist. Die Spezialität besteht darin, daß, wenn $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ die Schnitte der Axen s_1, s_2 mit der Verbindungslinie $\mathfrak{s} = S_1 S_2$ der Zentren sind, derselbe Punkt S_3 zu S_2 in bezug auf S_1, $\mathfrak{S}_1$ und zu S_1 in bezug auf S_2, $\mathfrak{S}_2$ harmonisch ist.

Wir bilden das Produkt $\mathfrak{H}_2 \mathfrak{H}_1$ der beiden Homologien und erkennen sofort den Zyklus $S_1 S_2 S_3$ und damit einfach unendlich viele auf $\mathfrak{s}$.

Jetzt liege X_1 auf der Gerade von S_1 nach dem Schnitt $\mathfrak{S} = s_1 s_2$; ihm entspricht durch $\mathfrak{H}_2$ der Punkt $(S_2 X_1, \mathfrak{S} S_3) = Y_3$, diesem durch $\mathfrak{H}_1$ der Punkt $(S_1 Y_3, \mathfrak{S} S_2) = X_2$, so daß X_2 dem X_1 in $\mathfrak{H}_2 \mathfrak{H}_1$ korrespondiert. X_2 geht wieder durch $\mathfrak{H}_2$ in den vierten harmonischen Punkt Y_2 zu ihm in bezug auf S_2 und $\mathfrak{S}$ über, und dieser durch $\mathfrak{H}_1$

1) Mir von O. Töplitz mitgeteilt.

in $(S_1 Y_2, \mathfrak{S} S_3) = X_3$; dem X_3 ist in $\mathfrak{H}_2$ entsprechend der Punkt $(S_2 X_3, \mathfrak{S} S_1) = Y_1$ und diesem in $\mathfrak{H}_1$ der vierte harmonische Punkt X_4 zu ihm in bezug auf S_1 und $\mathfrak{S}$.

Der Punkt X_4 deckt sich aber mit X_1, denn zum harmonischen Wurfe $S_2 \mathfrak{S} X_2 Y_2$ ist $S_3 \mathfrak{S} Y_3 X_3$ und zu diesem $S_1 \mathfrak{S} X_1 Y_1$ perspektiv. Der Zyklus $X_1 X_2 X_3$, der so entstanden ist, lehrt, daß die Kollineation $\mathfrak{H}_2 \mathfrak{H}_1$ ganz zyklisch ist; $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{s}$ sind die reellen Koinzidenzelemente; Y_1, Y_2, Y_3 bilden auch einen Zyklus der Kollineation.

Der Gerade $X_3 Y_1$ korrespondiert $X_1 Y_2$; da jene durch S_2 geht, geht diese durch S_3, ebenso tut es $X_2 Y_1$.

Ist $\mathfrak{S}_3$ zu S_3 harmonisch in bezug auf S_1, S_2, $s_3 = \mathfrak{S}\mathfrak{S}_3$, und $\mathfrak{H}_3$ die involutorische Homologie (S_3, s_3), so ergibt sich das Produkt $\mathfrak{H}_2 \mathfrak{H}_1$ identisch mit $\mathfrak{H}_3 \mathfrak{H}_2$ und $\mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_3$; $\mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2 \equiv \mathfrak{H}_2 \mathfrak{H}_3 \equiv \mathfrak{H}_3 \mathfrak{H}_1$ ist die Umkehrung der Kollineation. Ferner kann man $S_1 S_2 S_3$, $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3$ durch zwei andere in derselben Weise (Nr. 144) zueinander gehörige Zyklen der Projektivität auf $\mathfrak{s}$ ersetzen.

Die beiden Zyklen $X_1 X_2 X_3$ und $Y_1 Y_2 Y_3$ liegen auf demselben Träger-Kegelschnitte K der Büschel-Schar, da X_1 und $Y_1, \ldots$ durch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{s}$, die in bezug auf alle diese Trägerkurven polar sind, harmonisch getrennt werden.

Die drei Zyklen $S_1 S_2 S_3$, $X_1 X_2 X_3$, $Y_1 Y_2 Y_3$ sind neun assoziierte Punkte; denn sie sind die Schnittpunkte der beiden Kurven 3. Ordnung $\mathfrak{S}(S_1, S_2, S_3)$ und $(\mathfrak{s}, K)$. Der Büschel 3. Ordnung, für den sie Grundpunkte sind, geht durch die Kollineation in sich selber über.

365 Die zyklische Kollineation 3. Grades läßt sich einer andern speziellen Kollineation unterordnen.

Wir setzen voraus, eine ebene Kollineation habe die Eigenschaft, daß einmal einem Dreiecke ABC des Feldes Σ das entsprechende $A'B'C'$ eingeschrieben ist, und zwar so, daß A' auf BC, B' auf CA, C' auf AB liegt. Wir wollen noch eine andere Bezeichnung einführen: in der Reihe $\ldots A^{-2}, A^{-1}, A, A', A'', A''' \ldots$ entspreche jedem Punkt, als Punkt von Σ, der folgende in Σ'. Die projektiven Büschel um die entsprechenden Punkte A^{-1} und A von Σ und Σ' schneiden in BC konjektive Punktreihen; in ihnen entsprechen sich B und C involutorisch, denn sie sind sowohl Schnitte von $A^{-1}B$ und AB', als von AC' und $A^{-1}C$. Folglich haben wir eine Involution, und wenn Y, Z in ihr gepaart und Y', Z' die entsprechenden Punkte sind, so geht AY' durch Z und AZ' durch Y, und dem Dreieck AYZ ist in gleicher Weise das Dreieck $A'Y'Z'$ eingeschrieben.

Weil BC von den beiden projektiven Büscheln A^{-1} und A in involutorischen Punktreihen geschnitten wird, so muß sie durch das involutorische Zentrum derselben (Nr. 90) gehen, d. i. den Schnittpunkt der beiden Strahlen jener Büschel, die dem gemeinsamen Strahle

$A^{-1}A$ entsprechen; insofern er als Strahl von A^{-1} durch A geht, muß der entsprechende in A durch A' gehen. Dieser Punkt ist also das involutorische Zentrum, und jede Gerade durch ihn wird ebenfalls von den Büscheln involutorisch geschnitten. Ist also Y ein beliebiger Punkt der Ebene und Z_1 ihm gepaart in der auf $A'Y$ entstehenden Involution, so bedeutet dies, wenn Y', Z_1' die entsprechenden Punkte sind, daß der entsprechende Strahl in A zu $A^{-1}Y$, welcher Y' enthält, durch Z_1 geht, und derjenige zu $A^{-1}Z_1$, welcher Z_1' enthält, durch Y, so daß AYZ_1 wieder ein Dreieck ist, dem das entsprechende $A'Y'Z'_1$ eingeschrieben ist. Damit haben wir zwei solche Dreiecke erhalten mit zwei beliebigen entsprechenden Punkten Y, Y' als Ecken, die aber noch zwei entsprechende Ecken A, A' mit den ursprünglichen gemeinsam haben. Halten wir nunmehr Y, Y' fest, so können wir jetzt zwei entsprechende Dreiecke YXZ, $X'Y'Z'$ erreichen, bei denen Y, Y' die vorigen Punkte sind, X und X' wiederum beliebige entsprechenden Punkte; das dritte Eckenpaar Z, Z' ist bestimmt, denn Z ist (XY', YX') und Z' der entsprechende Punkt.

Wenn also bei einer ebenen Kollineation einmal ein Dreieck ABC vorhanden ist, dem das entsprechende $A'B'C'$ eingeschrieben ist und zwar so, daß A' auf BC liegt usw., so sind solcher Dreiecke ∞^4 vorhanden; beliebige zwei Punkte X, Y können als Ecken genommen werden; die dritte Z ist dann jedesmal bestimmt als Schnitt (XY', YX').

Für diese Lage von Z ist allein zu sorgen; ist daher in einer derartigen Kollineation bei zwei Dreiecken XYZ, $X'Y'Z'$ erreicht, daß X' auf YZ, Y' auf ZX liegt, so liegt von selbst Z' auf XY; denn wegen jener Lage von X' und Y' ist $Z = (XY', YX')$.

Weil eine solche Kollineation, als Transformation vom ersten ins zweite Feld, Dreiecke in letzterem liefert, welche je ihrem entsprechenden im ersten eingeschrieben sind, wird sie Kollineation in eingeschriebener Dreieckslage genannt, und die inverse Transformation, die vom zweiten ins erste Feld führt, Kollineation in umgeschriebener Dreieckslage[1]).

Natürlich können auch X', Y' in Σ' beliebig gegeben werden. Indem wir die obige Bezeichnung benutzen, haben wir in $XX'X''$ und $X'X''X'''$ zwei entsprechende Dreiecke; da die Ecken X', X'' des zweiten Dreiecks auf den den entsprechenden Ecken gegenüberliegenden Seiten $X'X''$, XX'' des ersten liegen, so liegt nach dem eben erhaltenen Satze auch X''' auf XX'.

Und umgekehrt, wenn diese drei Punkte X, X', X''' in gerader Linie liegen, so ist $X'X''X'''$ dem $XX'X''$ eingeschrieben, und wir haben Kollineation in eingeschriebener Dreieckslage vor uns,

1) Pasch, Mathem. Annalen, Bd. 23, S. 426; Bd. 26, S. 211.

und für sie ein anderes Kennzeichen, welches darin besteht, daß einmal in der Folge entsprechender Punkte X, X', X'', X''' der erste, zweite und vierte in gerader Linie liegen[1]).

Für die Kollineation in umgeschriebener Dreieckslage, wo die Reihenfolge den umgekehrten Sinn (von Σ' nach Σ) hat, ist daher Kennzeichen, daß X, X'', X''' in gerader Linie liegen.

Dualisieren wir, so ergibt sich als Kennzeichen für um-, bzw. eingeschriebene Dreieckslage, daß x, x', x''', bzw. x, x'', x''' in einen Punkt zusammenlaufen.

366 Bei einer zyklischen Kollineation 3. Grades ist jedes der zyklischen Dreiecke $A_1A_2A_3$ dem entsprechenden $A_2A_3A_1$ sowohl um- als eingeschrieben; folglich liegt gleichzeitig ein- und umgeschriebene Lage vor, und es gibt in jedem der beiden Felder ∞^4 Dreiecke, welche dem entsprechenden je umgeschrieben sind. Lassen wir X, Y in die Punkte A_1, B_1 fallen, mit denen die Zyklen $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ beginnen, so fallen X', Y' nach A_2, B_2 und Z ist (A_1B_2, B_1A_2), d. i. das obige Perspektivitätszentrum C_3 (Nr. 360), Z' ist also $C_1 = (A_2B_3, B_2A_3)$. Dieses liegt, wie wir dort fanden, auf A_1B_1 und so ist $A_1B_1C_3$ dem $A_2B_2C_1$ umgeschrieben.

Fallen aber X', Y' in A_2, B_2, so fallen X, Y in A_1, B_1, Z' in $(A_2B_1, B_2A_1) = C_3$, Z in $C_2 = (A_1B_3, B_1A_3)$, und $A_2B_2C_3$ ist dem $A_1B_1C_2$ umgeschrieben.

Umgekehrt, wenn gleichzeitig um- und eingeschriebene Dreieckslage statt hat, handelt es sich um zyklische Kollineation 3. Grades (oder in Dreieckslage). Es sei XYZ dem $X'Y'Z'$ umgeschrieben, so daß YZ durch X', ZX durch Y', XY durch Z' geht, und gleichzeitig XYZ_1 dem $X'Y'Z_1'$ eingeschrieben, so daß X auf $Y'Z_1'$, Y auf $Z_1'X'$, Z_1 auf $X'Y'$ liegt; die Ausgangsecken X, Y können ja beliebig sein, wir haben also beidemal dieselben gewählt. Sofort ist ersichtlich, daß Z und Z_1' identisch sind, denn sie sind beide (XY', YX'). Es entsprechen sich also Z_1 im ersten Felde und Z im zweiten, und Z_1 wird besser Z^{-1} genannt. Folglich hat das Dreieck $Z^{-1}ZZ'$ zum entsprechenden im zweiten Felde $ZZ'Z''$. Dessen Ecken Z und Z' liegen bzw. auf ZZ', $Z^{-1}Z'$, daher liegt Z'' auf $Z^{-1}Z$; weil aber Z' auf XY liegt, muß Z'' auf $X'Y'$ liegen und ist daher identisch mit Z^{-1}, der auch auf $Z^{-1}Z$ und $X'Y'$ liegt. Es geht also durch die Kollineation Z^{-1} in Z, Z in Z', Z' in Z^{-1} über, die drei Punkte bilden einen Zyklus.

Entsprechen noch X^{-1}, Y^{-1} im ersten Felde den X, Y als Punkten des zweiten, so sind $X^{-1}XX'$ und $Y^{-1}YY'$ ebenfalls Zyklen,

---

1) Dies wurde von Clebsch und Gordan: Math. Annalen, Bd. 1, S. 392 gefunden. — Wenn X, X', X'' in gerader Linie liegen, so ist diese eine Koinzidenzgerade, auf der dann auch X''', ... und X^{-1}, ... liegen.

und es ist das Dreieck $X'Y'Z'$ dem XYZ, $X^{-1}Y^{-1}Z^{-1}$ dem $X'Y'Z'$ und XYZ dem $X^{-1}Y^{-1}Z^{-1}$ eingeschrieben.

Für eine beliebige ebene Kollineation kann man fünf Punkte 367
$A_1, A_2, \ldots, A_5$ geben und sie durch:

$$\begin{vmatrix} A_1 A_2 A_3 A_4 \\ A_2 A_3 A_4 A_5 \end{vmatrix}$$

festlegen.

Wenn man aber eine Kollineation in eingeschriebener Dreieckslage haben will, so muß man A_4 auf $A_1 A_2$ legen; tut man dies, so kann dann A_5 nicht außerhalb $A_2 A_3$ liegen; folglich involviert A_5, so gelegen und dem A_4 zugeordnet, nur eine, nicht zwei Bedingungen, und man kann noch A_6 auf $A_3 A_4$ geben. Es ist dann:

$$A_1(A_2 A_4,\ A_3,\ A_5,\ A_6) \barwedge A_2(A_3 A_5,\ A_4,\ A_6,\ A_7),$$

wo A_7 dem A_6 entspricht. Schneidet man mit $A_3 A_4$, so ergibt sich:

$$A_3 A_4(A_4,\ A_3,\ A_1 A_5,\ A_6) \barwedge A_3 A_4(A_3,\ A_4,\ A_6,\ A_2 A_7)$$
$$\barwedge A_3 A_4(A_4,\ A_3,\ A_2 A_7,\ A_6);$$

also schneiden sich $A_1 A_5$ und $A_2 A_7$ auf $A_3 A_4$; und A_7 ergibt sich als Projektion von $(A_1 A_5,\ A_3 A_4)$ aus A_2 auf $A_4 A_5$, ebenso A_8, welcher dem A_7 entspricht, als Projektion von $(A_2 A_6,\ A_4 A_5)$ aus A_3 auf $A_5 A_6$, usw.

Für eine Kollineation in eingeschriebener Dreieckslage kann man eine Folge entsprechender Punkte $A_1, A_2, A_3 \ldots$ in nachstehender Weise geben und konstruieren: A_1, A_2, A_3 seien beliebig, ferner A_4 auf $A_1 A_2$, A_5 auf $A_2 A_3$, A_6 auf $A_3 A_4$. Es ist dann A_{6+i} die Projektion von $(A_i A_{4+i},\ A_{2+i} A_{3+i})$ aus A_{1+i} auf $A_{3+i} A_{4+i}$[1]).

Wenn zwei beliebige kollineare Bündel O, O' gegeben sind, so 368
wollen wir die Ebenen ermitteln, von denen sie in kollinearen Feldern geschnitten werden, die sich in eingeschriebener Dreieckslage befinden Suchen wir, ob wir solche in einem gegebenen Büschel finden; wir können dann aus zwei beliebigen Punkten X, Y auf der Axe desselben Dreiecke herzustellen suchen; wenn x', y' den Strahlen $x = OX$, $y = OY$ entsprechen, so bewegen sich X', Y' auf diesen Geraden, eingeschnitten je von einer Ebene jenes Büschels, also läuft $Z = (XY',\ YX')$ auf der Schnittlinie der Ebenen Xy', Yx', OZ in einem Strahlenbüschel, der entsprechende in O' tut es auch und trifft einmal die XY; wenn Z' der Schnitt ist, so ist von den Dreiecken XYZ, $X'Y'Z'$, die auf entsprechenden Dreikanten liegen, das zweite dem ersten eingeschrieben. Wir haben also in jedem Büschel eine der gesuchten Ebenen, und dieselben erzeugen einen Bündel.

1) Von London mitgeteilt.

Den Scheitel dieses Bündels gewinnen wir schneller mit Hilfe des Kennzeichens, daß A, A', A''' in gerader Linie liegen. Es sei a' der Verbindungsstrahl der beiden Scheitel O, O' und a, a'' die ihm in O, bzw. O' entsprechenden Strahlen, so konstruiere man noch die Ebene β', welche der Ebene β von O nach a'' entspricht. Eine beliebige Ebene treffe a, a', a'' in A, A', A'' und den Strahl von β', der dem Strahle OA'' entspricht, in A''', so bilden in der ausgeschnittenen ebenen Kollineation diese Punkte eine Folge entsprechender Punkte. Wird nun verlangt, daß A''' mit A, A' in gerader Linie liegt, so kann er sich nur auf dem Strahle befinden, in dem die Ebene aa' die β' schneidet; also ist $O'A'''$ dieser feste Strahl und demnach sind auch der Strahl OA'' und der Punkt A'' fest. Dieser Punkt A'' ist der gesuchte Scheitel. Wir haben also:

Wenn zwei kollineare Bündel O, O' vorliegen, so bilden die Ebenen, welche von ihnen in kollinearen Feldern in eingeschriebener Dreieckslage geschnitten werden und zwar so, daß die eingeschriebenen Dreiecke vom Bündel O' herrühren, auch einen Bündel, dessen Scheitel sich folgendermaßen ergibt. Es seien a, a'' die Strahlen von O, O', die dem Verbindungsstrahle $OO' = a'$ entsprechen, β' die Ebene, welche der $\beta = Oa''$ korrespondiert, c' ihr Schnittstrahl mit aa', c der ihm in (O, β) korrespondierende. Dann ist $C = ca''$ der Scheitel.

§ 57. Erzeugnisse kollinearer Gebilde. Kubische Raumkurve.

369 Zwei kollineare Bündel O, O' führen zu zwei Erzeugnissen, die jedoch in Zusammenhang stehen. Jede zwei entsprechenden Ebenen schneiden sich, und wir erhalten ∞^2 solche Schnittlinien, also eine Kongruenz als das eine Erzeugnis.

Aber nicht jede zwei entsprechenden Strahlen haben einen Schnittpunkt. Der Verbindungsstrahl der beiden Scheitel sei $e \equiv f'$ und die ihm entsprechenden Strahlen e', f. Wenn x und x' entsprechende Strahlen sind, welche sich schneiden, so sei die Ebene des gemeinsamen Büschels (um OO'), welche beide enthält, $\eta \equiv \zeta'$ und η', ζ seien wiederum die entsprechenden Ebenen; weil x' in ζ' liegt, so liegt x in ζ, und ebenso liegt x' in η'; diese Ebenen ζ und η' gehen durch f, bzw. e'. Folglich schneiden nur solche Strahlen x von O ihre entsprechenden x' in O', in denen sich entsprechende Ebenen ζ, ζ' der beiden projektiven Büschel f und f' begegnen, und in dem entsprechenden Strahle x' begegnen sich entsprechende Ebenen η, η' aus e und e'. Jene Strahlen x erzeugen daher einen Kegel 2. Grades mit der Spitze in $O = ff'$ und diese x' einen Kegel 2. Grades aus $O' = ee'$. Beide Kegel gehen durch $e \equiv f'$, und die kubische Raumkurve, welche sie außerdem gemeinsam haben, ist der Ort der Schnitte xx'; zu ihnen gehören die Scheitel O, O' als ff', ee'. Die dem gemeinsamen Strahle entsprechenden Strahlen f und e' sind die Tangenten in O und O'; denn auf jedem Strahle x, x' von O oder O', der sich mit seinem entsprechenden x', x schneidet, ist der Schnitt xx' der zweite Begegnungspunkt mit der Kurve außer O, bzw. O'; der Strahl ist Sehne oder Doppelsekante der Kurve. Bei f, e' ist dieser zweite Begegnungspunkt ff', ee' in O, O' gerückt.

Unter den ∞^2 Paaren entsprechender Strahlen der beiden kollinearen Bündel gibt es ∞^1, die einen Schnittpunkt haben. Der Ort dieser Schnittpunkte ist eine kubische Raumkurve R^3, welche durch die Scheitel geht und in ihnen je von dem Strahle berührt wird, welcher der Verbindungslinie der Scheitel als Strahle des andern Bündels korrespondiert. Die Kurve ist, neben dieser Verbindungslinie, Schnittkurve der beiden Kegel 2. Grades, welche durch den gemeinsamen Ebenenbüschel der beiden Bündel und je einen der entsprechenden erzeugt werden[1]).

Die Schnitte der Kurve mit einer beliebigen Ebene sind die drei Koinzidenzpunkte der kollinearen Felder, welche in ihr durch die Bündel entstehen.

Die projektiven Büschel von O und O' in zwei entsprechenden Ebenen ξ, ξ' rufen auf der Schnittlinie zwei konjektive Punktreihen hervor; deren Koinzidenzen lehren, daß auf ihr zweimal zwei entsprechende Strahlen sich schneiden.

Die Schnittlinien entsprechender Ebenen der beiden kollinearen Bündel bilden die Kongruenz der (eigentlichen oder ideellen) Doppelsekanten der obigen kubischen Raumkurve R^3. Ihre Ordnung ist, wie wir wissen, 1, die Klasse 3. Die drei in einer Ebene befindlichen sind die Koinzidenzgeraden der vorherigen ebenen Kollineation, die Verbindungslinien der Koinzidenzpunkte. Ein Punkt ferner legt in dem einen Bündel einen Strahl und den zugehörigen Ebenenbüschel fest; unter den entsprechenden Ebenen gibt es im allgemeinen eine, die durch ihn geht. Nur die Schnittlinie dieser Ebene und der ihr entsprechenden im ersten Bündel geht durch ihn. Es sei denn, daß der Punkt auf R^3 liegt, und so den Axen zweier entsprechender Büschel gemeinsam ist; dann gehen ∞^1 Schnittlinien durch ihn, welche den durch diese Büschel erzeugten

1) Diese Erzeugung der kubischen Raumkurve durch kollineare Bündel wurde zuerst von Seydewitz gefunden: Archiv der Mathematik, Teil 10 (1847), S. 203 und dann nochmals von Chasles an den in Nr. 201 erwähnten Stellen. — Zur Geschichte der kubischen Raumkurve vgl. Reye, Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnis der kubischen Raumkurve, Festschrift der Mathem. Gesellschaft in Hamburg, 1890.

Kegel 2. Grades bilden; wir haben in ihm den Kegel, welcher R^3 aus dem Punkte auf ihr projiziert.

Zwei entsprechende Büschel aus O und O' mit windschiefen Axen erzeugen eine Regelschar von Doppelsekanten, auf deren Trägerfläche die Kurve R^3 liegt, die Geraden dieser Schar zweimal, die der andern infolge dessen einmal treffend.

Zwei entsprechende Ebenenbüschel von O, O' schneiden ferner in eine beliebige Gerade g konjektive Punktreihen; es enthält also jeder Ebenenbüschel von O oder O' zwei Ebenen, welche je mit der entsprechenden sich in einer die g treffenden Gerade schneiden. Oder:

In jedem der beiden Bündel umhüllen die Ebenen, welche je mit der entsprechenden in einer Gerade sich schneiden, die einer gegebenen Gerade g begegnet, einen Kegel 2. Grades.

Wenn g aber die R^3 in X trifft, so löst sich von diesem Kegel der Ebenenbüschel um OX oder $O'X$; es bleiben in den Bündeln zwei entsprechende Ebenenbüschel, und alle Doppelsekanten der von ihnen erzeugten Regelschar treffen g; sie gehört zur Leitschar.

Wenn in den Punkten A, B von g sich die entsprechenden Ebenen α und α', β und β' von O, O' schneiden, so liefern die entsprechenden Büschel um $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ diese Regelschar; denn die nach OX, $O'X$ gehenden entsprechenden Ebenen derselben schneiden sich in einer durch X gehenden Gerade. So treffen drei Geraden der Regelschar die g, also alle.

Also bilden die einer einfachen Sekante g begegnenden Doppelsekanten der R^3 eine Regelschar.

Die von O ausgehenden Doppelsekanten bilden den oben besprochenen, durch die Büschel f und f' erzeugten Kegel (O); die Ebenen, welche sie aus O' projizieren, gehen alle durch $O'O = f'$, also die entsprechenden, welche sie aus O projizieren, durch die Tangente f, und diejenigen, welche die von O' ausgehenden Doppelsekanten aus O' projizieren, durch die Tangente e', sind also in jedem Falle bestimmte Ebenen, obwohl sie sich zunächst durch eine Gerade und einen auf ihr gelegenen Punkt ergeben.

In der Doppelsekante OO' schneiden sich die entsprechenden Ebenen fe, $e'f'$ oder fO', $e'O$.

370 Nachdem wir den Kegel zweiten Grades (X) erhalten haben, welcher R^3 aus irgend einem Punkte X auf ihr projiziert, erkennen wir, daß die Kantenreihen auf zwei solchen Kegeln (X), (Y) projektiv sind mit solchen Kanten als entsprechenden, die nach demselben Kurvenpunkte gehen; denn sie werden durch denselben Ebenenbüschel aus der gemeinsamen Kante projiziert. Für (O) und (O') lehrt es unmittelbar die erzeugende Kollineation.

Sind nun x, y irgend zwei Kanten von (X), (Y), also Doppelsekanten von R^3, so sind die Büschel, welche aus ihnen die beiden projektiven Kantenreihen projizieren, projektiv; es entsprechen sich Ebenen, welche nach zwei sich schneidenden Kanten, also nach demselben Punkte von R^3 gehen.

So ist zunächst erkannt, daß die krumme Punktreihe auf R^3 aus zwei eigentlichen Doppelsekanten durch projektive Ebenenbüschel projiziert wird.

Ferner, aus einer Regelschar von Doppelsekanten, welche, wie oben gefunden, durch zwei entsprechende Ebenenbüschel aus den kollinearen Bündeln O, O' erzeugt wird, seien zwei Geraden genommen; von ihnen gehen nach den Geraden der Leitschar, einfachen Sekanten der Kurve, projektive Ebenenbüschel oder nach den Punkten der Kurve, durch welche diese Geraden gehen; gleichgültig ob jene beiden Doppelsekanten eigentliche oder ideelle sind.

Ist nun von den Schnittlinien $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ entsprechender Ebenen die erstere eine eigentliche, die andere eine ideelle Doppelsekante, so gehören diese beiden Geraden der Regelschar an, welche durch die entsprechenden Ebenenbüschel $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ erzeugt wird, und senden nach den Punkten von R^3 projektive Ebenenbüschel.

Damit ist erkannt, daß der Satz, daß von den Doppelsekanten projektive Ebenenbüschel nach den Punkten der Punktreihe auf R^3 gehen, für alle Doppelsekanten gilt, eigentliche und ideelle.

Nehmen wir drei Doppelsekanten, so erhellt, daß die durch zwei kollineare Bündel erzeugte Raumkurve auch auf die frühere Weise: durch drei projektive Ebenenbüschel (§ 32) erzeugt werden kann.

Bei dieser früheren Erzeugungsweise wurde auch gefunden, daß aus jedem Punkte der Kurve ein projizierender Kegel 2. Grades kommt und daß die Kantenreihen zweier solchen Kegel projektiv sind, wobei nach demselben Punkte der Kurve gehende Kanten einander entsprechen. In Nr. 268 wurde dargetan, daß zwei Kegelschnitte, welche projektive Punktreihen tragen, so zu entsprechenden Kurven in kollinearen Feldern gemacht werden können, daß in dieser Kollineation dieselben Punkte entsprechend sind wie in der Projektivität. Übertragen wir das auf Bündel, so lassen sich die Bündel um die Scheitel jener Kegel so kollinear machen, daß die je nach demselben Kurvenpunkte gehenden Kegelkanten entsprechend sind, daß also die Kurve das Erzeugnis dieser kollinearen Bündel ist. Folglich kann eine in der früheren Weise erzeugte Kurve auch auf die jetzige Weise hergestellt werden; die beiden Erzeugnisse sind identisch.

Es hat sich nun auch ergeben, daß aus allen Punkten der kubischen Raumkurve kollineare Bündel kommen, in denen die je denselben Punkt der Kurve projizierenden Strahlen und daher auch die je dieselbe Doppelsekante projizierenden Ebenen entsprechend sind.

Beweisen wir dies direkter auf Grund der jetzigen Erzeugung durch die kollinearen Bündel O, O'. X, Y seien beliebige Punkte der Kurve; daß die Ebenen ihrer Bündel durch die Doppelsekanten eindeutig einander zugeordnet werden, ist ersichtlich, weil jede Ebene von X oder Y nur zwei fernere Schnitte hat. Die Linearität dieser Zuordnung ist noch darzutun. Wenn g Axe eines Büschels aus X ist, also einfache Sekante der R^3 in X, so gibt es, wie wir oben fanden, in den Bündeln O, O' zwei entsprechende Büschel von der Art, daß sie eine Regelschar von Doppelsekanten erzeugen, in deren Leitschar sich g befindet; R^3 liegt auf der Trägerfläche und durch Y geht eine zweite Gerade h der Leitschar; die Doppelsekanten, welche g treffen, treffen also auch h, und die Ebenen von X und Y nach ihnen bilden die Büschel um g und h.

In den ∞^1 kollinearen Bündeln aus den verschiedenen Punkten von R^3 bilden die denselben Punkt dieser Kurve projizierenden entsprechenden Strahlen einen Kegel 2. Grades, andere entsprechenden Geraden eine Regelschar (von einfachen Sekanten). Wenn x_0 eine von ihnen ist im Bündel X_0 und η_0, ζ_0 zwei Ebenen durch sie, so sind die korrespondierenden x die Schnittlinien der entsprechenden Ebenen η, ζ in den andern Bündeln; diese gehen durch dieselben zwei festen Doppelsekanten, und da die Ebenen η, ζ je nach demselben Punkte von R^3 gehen, so sind diese Büschel projektiv und erzeugen durch die Schnittlinien $x = \eta\zeta$ eine Regelschar.

Wir haben kollineare Bündel in allgemeiner Lage angenommen; kollineare Bündel in perspektiver Lage erzeugen ersichtlich keine kubische Raumkurve. Punkt-Erzeugnis ist das Punktfeld in der Perspektivitätsebene und der gemeinsame sich selbst entsprechende Strahl. Schnittlinien entsprechender Ebenen sind die Geraden jener Ebene, aber auch jede Gerade, welche diesen Strahl trifft.

Sind, wie in Nr. 260, $a_1, a_2, \ldots a_5$ Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve, so sind in allen Bündeln aus den verschiedenen Punkten X der Kurve die Ebenen $X(a_1, \ldots a_5)$ entsprechend, sowie der von ihnen berührte Kegel 2. Grades, und die Tangentialebenen-Büschel um sie sind so projektiv, daß in ihnen jene Ebenen auch homolog sind.

Die ∞^2 Bündelkollineationen schneiden in eine feste Ebene ebensoviele ebene Kollineationen mit gemeinsamem Koinzidenzdreiecke ein, und zwar alle, denen dies Koinzidenzdreieck zukommt; denn ist eine von ihnen durch die entsprechenden Geraden x, x' endgültig bestimmt, so sei s die Doppelsekante aus dem Punkte xx'; die Ebenen xs, $x's$ bestimmen durch ihre dritten Schnitte die Scheitel O, O', von denen diese Kollineation herrührt.

Die ∞^2 projektiven Ebenenbüschel um die Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve, in denen entsprechende Ebenen je nach demselben Punkte der Kurve gehen, bezeichnet Reye[1]) als lineare Kongruenz von projektiven Ebenenbüscheln und die ∞^1 kollinearen Bündel um die Punkte der Kurve, in welchen entsprechende Ebenen je nach derselben Doppelsekante der Kurve gehen, als Reihe kollinearer Bündel. Ich ziehe, aus später zu erörternden Gründen, für das erstere Gebilde den Namen Netz vor. 371

Diese doppelt und einfach unendlichen Systeme stehen also in der Beziehung zueinander, daß entsprechende Ebenen der Büschel des Netzes einen Bündel der Reihe und entsprechende Ebenen dieser Bündel einen von jenen Büscheln bilden. Reye drückt diese Beziehung, ebenso wie bei den zwei Schaaren projektiver Ebenenbüschel um die Geraden verbundener Regelscharen (Nr. 95), dadurch aus, daß er von dem Netze und der Reihe sagt: sie stützen sich.

Die früheren, eben erwähnten einfach unendlichen Systeme, die sich auch stützen, sind in unsern jetzigen enthalten. Entsprechende Ebenenbüschel, aus den Bündeln genommen, bilden mit ihren Axen, entsprechenden Geraden, eine Regelschar von einfachen Sekanten der kubischen Raumkurve, und ihre entsprechenden Ebenen gehen nach Doppelsekanten der Kurve, welche jene Geraden treffen, also die verbundene Regelschaar bilden. Die Schar projektiver Ebenenbüschel um diese, welche sich auf die Schar jener projektiven Büschel stützt, ist im Netze enthalten.

Wir kommen darauf ausführlich zurück.

In Nr. 206 haben wir, aus der Erzeugung der kubischen Raumkurve durch drei projektive Ebenenbüschel, Schlüsse gezogen auf ihre Bestimmung durch Punkte und Doppelsekanten. Wir erkennen abermals die eindeutige Bestimmung der Kurve 1) durch sechs Punkte, 2) durch fünf Punkte und eine Doppelsekante, 3) durch drei Punkte und drei Doppelsekanten und neu 4) die durch zwei Punkte und vier Doppelsekanten. Denn wenn zwei der gegebenen Punkte zu den Scheiteln der erzeugenden Bündel genommen werden, so ist die Kollineation zwischen ihnen bestimmt durch i Paare entsprechender Strahlen und $4-i$ Paare entsprechender Ebenen, wo $i = 4, 3, 1, 0$ ist; und dadurch ist sie eindeutig bestimmt (Nr. 264, 266). Diese Eindeutigkeit wird, wenn mehr als zwei Punkte gegeben 372

1) Journal f. Mathem., Bd. 104, S. 214.

sind, dadurch, daß man beliebige zwei von ihnen als Scheitel nehmen kann, nicht in Frage gestellt; weil die bei irgend zwei sich ergebende kubische Raumkurve und die Kongruenz ihrer Doppelsekanten ja aus jeden zwei ihrer Punkte, also aus beliebigen zwei andern von den gegebenen Punkten durch kollineare Bündel projiziert wird und also auch bei diesen als Scheiteln sich als Erzeugnis ergibt.

Im Falle $i = 2$, der zu vier Punkten und zwei Doppelsekanten gehört, ist keine Kollineation möglich (Nr. 266).

Zwischen zwei gegebenen Bündeln sind ∞^8 Kollineationen möglich; denn vier festen Elementen: i Strahlen und $4-i$ Ebenen ($i = 4, 3, 1, 0$) des einen kann man auf ∞^8 Weisen entsprechende Elemente im andern zuordnen.

Nun gibt es $\infty^{2 \cdot 3}$ Paare von Bündeln, zwischen je zweien ∞^8 Kollineationen; andererseits kann jede kubische Raumkurve aus bebeliebigen zwei ihrer Punkte, also auf ∞^2 Weisen durch kollineare Bündel erzeugt werden; so ergibt sich die schon (Nr. 202) aus der früheren Erzeugung abgeleitete Mannigfaltigkeit

$$2 \cdot 3 + 8 - 2 = 12$$

der kubischen Raumkurve von neuem.

Aus dieser Mannigfaltigkeit 12 und dem Umstand, daß sechs Punkte zu einer endlichen Anzahl von kubischen Raumkurven führen, folgt, daß es für eine Kurve im Raume eine doppelte Bedingung ist, durch einen gegebenen Punkt zu gehen. Daher ist die Bedingung, daß sieben Punkte einer kubischen Raumkurve angehören, eine doppelte: für zwei der sieben Punkte müssen die sechs Verbindungslinien mit den übrigen dem Pascalschen Satze im Bündel genügen[1]).

Durch $i \leqq 5$ Punkte und $5-i$ Doppelsekanten ist also ein doppelt unendliches System von kubischen Raumkurven festgelegt. Insbesondere erwähnenswert (Nr. 324) ist der Bündel kubischer Raumkurven durch fünf Punkte. Durch jeden Punkt des Raums geht eine, jede Gerade ist Doppelsekante für eine von seinen Kurven. In Nr. 241 fanden wir zwei solche Bündel in eindeutiger Beziehung ihrer Kurven.

373 Die ∞^1 kollinearen Bündel um die Punkte von R^3 mögen etwas weiter untersucht werden. O_0 sei festgehalten, π_0 eine Ebene in ihm, die entsprechenden Ebenen in den andern Bündeln gehen durch die Doppelsekante, welche in jener enthalten ist, also eine von ihnen durch einen gegebenen Punkt P. Von den Strahlen in O_0, welche

---

1) Chasles, Aperçu historique (Deutsche Übersetzung von Sohncke, Geschichte der Geometrie, 1839, S. 442, Nr. 4). — In Schröters Oberflächen 2. Ordnung und Raumkurven 3. Ordnung, S. 240 wird eine dieser Bedingungen als hinreichend bezeichnet; sie bewirkt nur, daß einer der sieben Punkte Spitze eines Kegels 2. Grades ist und die sechs übrigen auf diesem liegen.

den Strahlen aus den verschiedenen Bündeln O nach P korrespondieren, fällt einer in die Ebene π_0, daher bilden sie einen Strahlenbüschel; seine Ebene π_P geht durch die von P kommende Doppelsekante.

Dem Strahle l_0 von O_0 korrespondieren in den O die Geraden einer Regelschar (einfacher Sekanten) (Nr. 370), von ihnen treffen also zwei eine gegebene Gerade g; von den Ebenen des O_0, die den nach g gehenden Ebenen der verschiedenen Bündel O korrespondieren, gehen daher zwei durch l_0; also umhüllen sie einen Kegel 2. Grades K_g^2.

Wenn nun in den Bündel O_0 ein fester Kegel $\mathfrak{K}_0^2$ gelegt wird, so folgt daraus, daß er mit π_P zwei Kanten und mit K_g^2 vier Berührungsebenen gemein hat, daß von dem Systeme der ihm in den Bündeln entsprechenden Kegel, zu dem er selbst gehört, zwei durch einen gegebenen Punkt gehen und vier eine gegebene Gerade berühren; dies gilt also auch für die in eine feste Ebene E eingeschnittenen Kegelschnitte. Die drei Schnitte von E mit R^3 liefern Geradenpaare, die aber in den Formeln: $2\nu = \rho + \eta$, $2\rho = \nu + \delta$ (Nr. 186) doppelt zu rechnen sind.

Jetzt sei in diese feste Ebene E ein Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2$ gelegt: wir untersuchen das System der Kegel im Bündel O_0, welche den den $\mathfrak{C}^2$ projizierenden Kegeln der verschiedenen Bündel O entsprechen.

Von der Regelschar der Geraden, die dem Strahle l_0 entsprechen, treffen vier den $\mathfrak{C}^2$; also gehen vier von den fraglichen Kegeln durch l_0; von den Ebenen, die der π_0 korrespondieren, berühren zwei den $\mathfrak{C}^2$, mithin berühren zwei von den Kegeln die π_0.

Wenn vorhin $\mathfrak{K}_0^2$ der die Kurve R^3 projizierende Kegel ist, so gilt dies auch für die entsprechenden Kegel, und die von allen diesen Kegeln in eine feste Ebene eingeschnittenen Kegelschnitte haben also die Charakteristiken $\nu = 2$, $\rho = 4$. Die Schnittkurve 4. Ordnung 3. Klasse (Nr. 203, 205) der abwickelbaren Fläche der Tangenten der R^3 ist Enveloppe dieser Kurven. Hier ergeben sich ν und ρ einfacher daraus, daß aus einem Punkte von E eine Doppelsekante kommt und eine Gerade von E vier Tangenten der R^3 trifft.

Im zweiten Falle sei $\mathfrak{C}^2$ die absolute Kurve, also handelt es sich um das System der Kegel im Bündel O_0, welche den isotropen Kegeln der verschiedenen Bündel O entsprechen. Der isotrope Kegel $O_0\mathfrak{C}^2$ gehört zu ihm; und für jede von seinen Berührungsebenen ist er der eine berührte Kegel; sie gehört daher stets zu einem Quadrupel gemeinsamer Berührungsebenen dieses Kegels mit einem der andern; so daß um $O_0\mathfrak{C}^2$ eine Involution 4. Grades entsteht. Die sechs Schnittkanten, unter ihnen zwei reelle, sind je die Fokalaxen, in O_0, der Kollineation zwischen O_0 und einem andern Bündel O. Sie erzeugen den reellen Direktionskegel 3. Ordnung dieser (reell-imaginären) Involution 4. Grades, einer involutorischen Korrespondenz [3] (Nr. 194).

Durch jede Kante k von $O_0\mathfrak{C}^2$ gehen noch drei andere Kegel des Systems, also gehört sie zu drei Schnittkanten-Quadrupeln und ihr sind $3 \cdot 3$ andere Schnittkanten involutorisch zugeordnet. Der Direktionskegel 9. Klasse dieser involutorischen Korrespondenz [9], ebenfalls reell, wird von den zyklischen Ebenen, in O_0, der Kollineationen zwischen O_0 und den andern Bündeln eingehüllt, jedesmal sechs, darunter zwei reellen. Jedem Sextupel von Fokalaxen, Kanten des vorigen Kegels 3. Ordnung, ist ein Sextupel von zyklischen Ebenen, Tangentialebenen des jetzigen Kegels, zugeordnet, beide von demselben Punkte O herrührend. Es muß eine endliche Anzahl von Malen geschehen, daß Inzidenzen zwischen zusammengehörigen Fokalaxen und zyklischen Ebenen stattfinden. Wenn reelle Elemente inzidieren, also d und $\mathfrak{d}$, so tritt die in Nr. 347 besprochene Spezialität: $dd_1 = d'd_1'$ der Kollineation ein.

Da nun noch O_0 auf R^3 verändert werden kann, so folgt, daß, abgesehen von der Realität, die noch genauer untersucht werden muß, jede kubische Raumkurve auf ∞^1 Weisen durch kollineare Bündel von dieser Spezialität erzeugt werden kann.

374 Etwas einfacher und anders liegen die Verhältnisse bei einer speziellen Kurve, welche von Helmholtz gefunden wurde und Horopterkurve genannt wird[1]).

Wir können sie durch zwei kongruente Bündel erzeugen[2]).

Die Koinzidenzelemente ineinanderliegender kongruenter Bündel lehren, daß von den unendlich fernen Punkten dieser kubischen Raumkurve zwei imaginäre V, W auf der absoluten Kurve $\mathfrak{C}^2$ liegen, der dritte reelle im Pole U von VW in bezug auf diese Kurve; woraus folgt, daß die Kurve aus U durch einen Rotationszylinder projiziert wird.

Sie entsteht auf ∞^1 Weisen durch kongruente Bündel, und die Scheitel sind involutorisch auf ihr gepaart. Solche Bündel müssen in der unendlich fernen Ebene kollineare Felder hervorrufen, in denen $\mathfrak{C}^2$ sich selbst entspricht, oder allgemeiner ein Kegelschnitt K, welcher in V, W die $U(V, W)$ und damit den $\mathfrak{C}^2$ berührt, also die unendlich ferne Kurve irgend eines (reellen) Rotationskegels, dessen Axe nach U geht. Diese ebene Kollineation hat UVW zum

1) Helmholtz, Handbuch der physiologischen Optik, 2. Aufl., § 27 und 31; F. Schur, Sitzungsber. der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft, 2. Nov. 1889; Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. 47, S. 375; W Ludwig, Die Horopterkurve, Mathem. Mitteilungen aus dem Verlage math. Modelle von Martin Schilling. Neue Folge, Nr. 3.

2) Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl., Abt. II, S. 176.

Koinzidenzdreiecke; ordnen wir noch zwei Tangenten von K einander zu, so ist eine derartige Kollineation festgelegt; da jeder Tangente von K eine andere entspricht, so können wir eine t fest annehmen. Die Ebene von O nach ihr enthalte die Doppelsekante s, die zweite Tangente t' aus st an K führt zu der Ebene st' und dem dritten Schnitte O'. Die beiden erzeugenden Bündel um O und O' sind kongruent.

Zwei Punkte O und O' sind zugeordnet, wenn einmal und dann ∞^1-mal nach zwei Tangenten von K homologe Ebenen gehen; damit sind sie als involutorisch zugeordnet erkannt, und die Verbindungslinien OO' bilden eine Regelschar.

Da jeder Kegelschnitt aus der Büschel-Schar genommen werden kann, so können wir einen festen Punkt P in der unendlich fernen Ebene und die Involution der Tangentenpaare aus ihm an diese Kegelschnitte benutzen; aus der von dem Punkte ausgehenden Doppelsekante der R^3 auf diese projiziert, gibt sie die Involution der Punkte O, O'.

Die beiden Tangenten vereinigen sich beim Geradenpaare $U(V, W)$ der Büschel-Schar und bei dem durch P gehenden Kegelschnitte. Ersteres liefert U als den einen Doppelpunkt der Involution; sein Bündel kann ja nur mit sich selbst kongruent sein. Der andere Z hat die bemerkenswerte Eigenschaft, daß durch ihn alle Ebenen laufen, die bei jedem Punkte der unendlich fernen Ebene durch die Doppelsekante, die von ihm ausgeht, und die Tangente des durchgehenden Kegelschnitts der Büschel-Schar bestimmt werden. Wir erwähnen noch ohne Beweis:

Z ist derjenige Punkt der Raumkurve, welcher sich auf der der Asymptote diametral gegenüberliegenden Kante des Rotationszylinders befindet; das Lot aus diesem Punkte auf die Asymptote ist Leitgerade für alle die Doppelsekanten OO', und in bezug auf dasselbe ist die Kurve in sich symmetrisch.

Für diese Horopterkurve ist die nach VW gehende Ebene, in allen Bündeln entsprechend, immer zyklische Ebene $\mathfrak{d}$ und der darauf senkrechte Strahl nach U, ebenfalls in allen entsprechend, die eine Fokalaxe d.

In jedem der Bündel O berühren der eigene isotrope Kegel und der dem isotropen Kegel des andern O' entsprechende einander längs OV, OW mit den Berührungsebenen $OU(V, W)$, da der andere isotrope Kegel sich ebenso zu $O'U, \ldots$ verhält und diese Elemente jenen in der Kollineation entsprechend sind. In OU haben sich daher die beiden reellen Fokalaxen d, d_1 vereinigt, in OVW die beiden reellen zyklischen Ebenen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$; die Winkel dd_1 und $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ sind dadurch gleich geworden, daß sie null sind (Schlußbemerkung von Nr. 347). Inzidenz zwischen d und $\mathfrak{d}$ findet nicht statt.

Jede zwei dieser Bündel haben ∞^1 Paare entsprechender dreirechtwinkliger Dreikante mit OU, OVW; $O'U$, $O'VW$ als festen Gegenelementen (Nr. 351).

375 Nehmen wir nun an, daß die beiden kollinearen Bündel O, O' eine (dem Büschel OO' angehörige) sich selbst entsprechende Ebene $\alpha \equiv \alpha'$ haben; die entsprechenden Büschel (O, α), (O', α') erzeugen dann einen in dieser Ebene gelegenen Kegelschnitt R^2, der ein Teil des vollen Erzeugnisses R^3 ist. In $\alpha \equiv \alpha'$ liegen auch f und e' und sind die Tangenten von R^2 in O, O'. Die beiden Büschel um f und f' (Nr. 369) werden perspektiv, und der Kegel (O), der die Strahlen von O enthält, welche die entsprechenden schneiden, zerfällt in zwei Strahlenbüschel (O, α), (O, β), wo β die Ebene der Perspektivität ist, und ebenso der andere (O'), der diese entsprechenden Strahlen enthält, in (O', α') und (O', β'), wo die Strahlen von (O, β) denen von (O', β') entsprechen und sie je schneiden. Folglich ist die Schnittgerade $\beta\beta'$, der Ort dieser Schnittpunkte, der andere Bestandteil von R^3; gemeinsam ist ihnen der Punkt $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$. Jede Schnittlinie $\xi\xi'$ trifft beide Teile, den Kegelschnitt im Punkte $(\alpha\xi, \alpha'\xi')$, die Gerade in $(\beta\xi, \beta'\xi')$; die Schnittlinie $\alpha\alpha'$ wird unbestimmt, jede Gerade in der Ebene $\alpha \equiv \alpha'$ ist Doppelsekante von R^2.

Von der Kongruenz 1. Ordnung 3. Klasse der Doppelsekanten sondert sich also das Strahlenfeld in $\alpha \equiv \alpha'$ ab; es bleibt die Kongruenz der Doppelsekanten zwischen Kegelschnitt und Gerade: 1. Ordnung 2. Klasse.

Wenn im gemeinsamen Büschel OO' zwei sich selbst entsprechende Ebenen $\alpha \equiv \alpha'$, $\alpha_1 \equiv \alpha_1'$ vorhanden sind, so entspricht OO' sich selbst; und umgekehrt, wenn das der Fall ist, enthält der konjektive Büschel OO' zwei sich selbst entsprechende Ebenen. Die Büschel um O und O' in jeder der beiden Ebenen sind perspektiv, R^2 in $\alpha \equiv \alpha'$ zerfällt in OO' und die Perspektivitätsaxe u, und ebenso der in $\alpha_1 \equiv \alpha_1'$ in OO' und u_1. Das Erzeugnis besteht also aus den beiden windschiefen Geraden u und u_1 und der sie treffenden Gerade OO'. Weil auf u sich entsprechende Strahlen von (O, α) und (O', α'), auf u_1 solche von (O, α_1) und (O', α_1') schneiden, so begegnet jede Schnittlinie $\xi\xi'$ den beiden Geraden u, u_1 in den Punkten $(\alpha\xi, \alpha'\xi')$, $(\alpha_1\xi, \alpha_1'\xi')$. Die ganze Doppelsekanten-Kongruenz besteht aus den beiden Feldern in $\alpha \equiv \alpha'$, $\alpha_1 \equiv \alpha_1'$, welche die Doppelsekanten zwischen u und OO', u_1 und OO' enthalten, und dem Strahlennetze $[u, u_1]$, 1. Ordnung, 1. Klasse, dem eigentlichen Orte der Schnittlinien $\xi\xi'$.

Umgekehrt, die Strahlen eines Netzes $[u, u_1]$ werden aus zwei Punkten O, O', die auf dem nämlichen Strahle des Netzes liegen, durch kollineare Bündel in dieser Spezialität projiziert. Denn eine Ebene durch O oder O' enthält einen Strahl des Netzes, und dieser bestimmt eindeutig die entsprechende Ebene im andern Bündel. Beschreibt ξ in O einen Büschel um l, so durchläuft der Netzstrahl die Regelschar $[uu_1 l]$, zu welcher OO' gehört; folglich geht durch O' eine Gerade l' der Leitschar; die Ebenen, welche aus O' die Geraden der Regelschar projizieren und jenen Ebenen durch l entsprechen, gehen durch l' und erzeugen einen Büschel. Es liegt demnach Kollineation vor. Die Ebene von O nach u oder u_1 enthält ∞^1 Strahlen des Netzes, darunter OO', also den Punkt O', und durch sie werden alle diese Strahlen aus O' projiziert. Folglich entspricht jede dieser beiden Ebenen sich selbst.

Die Hauptergebnisse der dualen Betrachtung sind: 376

Wenn zwei kollineare Felder in Ω, Ω' vorliegen, so gibt es ∞^2 Verbindungslinien entsprechender Punkte und ∞^1 Paare von sich schneidenden entsprechenden Geraden und zugehörige Verbindungsebenen ξ. Diese letzteren, zu denen auch die Trägerebenen gehören, sind die Schmiegungsebenen einer kubischen Raumkurve, und jene Verbindungslinien sind die Schmiegungsaxen derselben (Schnittlinien von Schmiegungsebenen). Ist $e \equiv f'$ die gemeinsame Gerade $\Omega\Omega'$, so sind f, e', die ihnen entsprechenden Geraden, die in Ω, Ω' gelegenen Tangenten der Kurve. Die projektiven Punktreihen auf f und f', e und e' führen zu zwei in diesen Ebenen gelegenen Kegelschnitten, denen $e \equiv f'$ gemeinsame Tangente ist. Die Ebenen ξ sind die gemeinsamen Berührungsebenen dieser beiden Kurven.

In jeden zwei der Schmiegungsebenen ξ entstehen kollineare Felder, in denen die Schnittpunkte mit einer Schmiegungsaxe und die Schnittlinien mit einer Schmiegungsebene homolog sind Usw.

Wir kommen (Nr. 371) hier zu einem Netze (einer linearen Kongruenz) projektiver Punktreihen auf den Schmiegungsaxen, in denen entsprechende Punkte je durch die nämliche Schmiegungsebene eingeschnitten werden, und zu einer Reihe kollinearer Felder in den Schmiegungsebenen, in denen entsprechende Punkte je die Spuren der nämlichen Schmiegungsaxe sind.

Entsprechende Punkte der ∞^2 Punktreihen bilden eins der Felder und entsprechende Punkte der ∞^1 Punktfelder eine der Punktreihen. Das Netz und die Reihe stützen sich.

§ 58. Fortsetzung. Die Fläche 3. Ordnung.

Drei kollineare Bündel O, O', O'' erzeugen durch die Schnittpunkte entsprechender Ebenen eine Fläche. Durch einen Punkt X einer Gerade l geht die Axe eines Ebenenbüschels aus O, von den Geraden der Regelschar, welche durch die beiden entsprechenden Büschel in O', O'' entsteht, treffen zwei die l in den Punkten X_1. 377

Durch jeden Punkt X_1 von l geht eine Schnittlinie entsprechender Ebenen aus O', O'', die Doppelsekante der durch diese Bündel erzeugten kubischen Raumkurve; die diesen Ebenen in O entsprechende Ebene trifft l in X. Die Korrespondenz zwischen X und X_1 ist daher eine [1, 2]; die drei Koinzidenzen beweisen, daß dreimal entsprechende Ebenen von O, O', O'' sich auf l schneiden.

Die Schnittpunkte entsprechender Ebenen dreier kollinearer Bündel erzeugen eine kubische Fläche (Graßmanns Erzeugung)[1].

In O schneiden sich zwei entsprechende Ebenen aus O', O''. Die drei Scheitel der erzeugenden Bündel liegen also auf der Fläche.

Ungeeignet zur Erzeugung der kubischen Fläche sind drei kollineare Bündel, wie sie bei der kubischen Raumkurve sich ergeben haben. Da gehen durch jeden Punkt des Raumes drei entsprechende Ebenen.

Je drei entsprechende Ebenenbüschel der Bündel erzeugen eine auf der kubischen Fläche verlaufende kubische Raumkurve r^3. Wir erhalten deren ∞^2, und durch zwei Punkte der Fläche, etwa die Schnittpunkte $\xi\xi'\xi''$, $\eta\eta'\eta''$, geht eine solche Kurve, erzeugt durch die Büschel mit den Axen $\xi\eta$, $\xi'\eta'$, $\xi''\eta''$.

Zwei von diesen Kurven haben einen Punkt gemeinsam, nämlich den Schnittpunkt der Ebenen xy, $x'y'$, $x''y''$, wenn sie durch die Büschel x, x', x'', bzw. y, y', y'' erzeugt werden.

Wir finden also bei den Kurven dieses Netzes die Fundamentaleigenschaften der Geraden der Ebene wieder; wir wollen deshalb auch den Inbegriff der r^3, welche durch den Punkt $\xi\xi'\xi''$ der Fläche gehen, also von den entsprechenden Strahlen der Bündel in den Ebenen ξ, ξ', ξ'' herrühren, einen Büschel nennen.

Weil eine von diesen kubischen Raumkurven r^3 einer Ebene dreimal begegnet, so gehen durch einen Strahl eines der Bündel drei Ebenen, welche mit ihren entsprechenden auf jener Ebene sich schneiden.

In jedem der drei Bündel umhüllen die Ebenen, welche mit ihren entsprechenden in den andern die Punkte eines ebenen Schnittes der Fläche erzeugen, einen Kegel 3. Klasse.

Sehen wir drei ineinander liegende kollineare Felder als Schnitte von drei kollinearen Bündeln an, so ergibt sich:

Bei drei ineinander liegenden kollinearen Feldern um-

---

1) Graßmann, Journal f. Math., Bd. 49, S 47; Gesammelte Werke, Bd. II, 1. Teil, S. 180; Schröter, Journ. f Math., Bd. 62, S. 265; Sturm, Flächen 3. Ordnung, S. 20; Cremona, Journ. f. Math., Bd. 68, S. 1, Nr. 118 und 160 oder Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen, Nr. 230, 272; Reye, Geometrie der Lage, seit der 1. Auflage, jetzt 3. Auflage, Bd. III, 7. Vortrag.

hüllen die Geraden eines jeden, die mit ihren entsprechenden in einen Punkt zusammenlaufen, eine Kurve 3. Klasse, und die Kurve der Konkurrenzpunkte ist 3. Ordnung. Jede von jenen drei Kurven 3. Klasse berührt die Seiten der beiden Koinzidenzdreiecke, an denen ihr Feld beteiligt ist; die Kurve 3. Ordnung geht durch die Ecken von allen drei Koinzidenzdreiecken.

Und dual:

Die Punkte eines jeden der drei Felder, welche mit ihren entsprechenden in einer Gerade liegen, ist 3. Ordnung, und diese geraden Linien umhüllen eine Kurve 3. Klasse. Usw.

Konstruieren wir, zu den Bündeln zurückkehrend, in einem von ihnen, etwa O, die beiden Kegel 3. Klasse, die zu den Ebenen ϵ, ϵ_1 gehören, so laufen von den 9 gemeinsamen Berührungsebenen drei je mit den entsprechenden in die Schnittpunkte der Gerade $\epsilon\epsilon_1$ mit der Fläche zusammen, die sechs andern aber haben je mit den entsprechenden einen Punkt in ϵ und einen von ihm verschiedenen in ϵ_1 gemein, also die Verbindungslinie beider. Demnach laufen sechsmal drei entsprechende Ebenen, statt in einen Punkt, in eine Gerade zusammen.

Diese sechs Geraden, welche ganz der erzeugten Fläche angehören, sind windschief zueinander. Wenn nämlich zwei von ihnen, in denen $\alpha_1, \alpha_1', \alpha_1''$, bzw. $\alpha_2, \alpha_2', \alpha_2''$ zusammenlaufen, sich schnitten, so würde dieser Schnittpunkt den drei entsprechenden Strahlen $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1'\alpha_2'$, $\alpha_1''\alpha_2''$ gemeinsam sein. Ein solcher Schnittpunkt entsprechender Strahlen ist aber im allgemeinen nicht vorhanden; denn in den Bündeln O, O' haben wir ∞^1 Paare sich schneidender entsprechenden Strahlen; es ist für jeden der ∞^1 entsprechenden Strahlen in O'' eine einfache Bedingung, den einen oder anderen der beiden homologen Strahlen zu treffen (es gibt je vier), hingegen eine doppelte, durch den Schnittpunkt zu geben; sie kann also im allgemeinen von Geraden einer einfach unendlichen Mannigfaltigkeit nicht erfüllt werden. Geschieht es in speziellen Fällen, so erhält, wie wir später sehen werden, die Fläche eine besondere Eigenschaft: einen Doppelpunkt im Konkurrenzpunkte.

Jene sechs Geraden

$$a_1, a_2, \ldots a_6$$

bilden also ein Sextupel von windschiefen Geraden auf der Fläche, welches das der unserer Betrachtung zu Grunde liegenden Erzeugung zugehörige heiße.

Die kubischen Raumkurven r^3 sind gegen diese Geraden windschief; denn die drei Ebenen, die in eine der a zusammenlaufen, befinden sich im allgemeinen nicht in den erzeugenden Büscheln. Ist das aber der Fall, so gehört die Gerade zur erzeugten Kurve r^3, welche in sie und einen sie treffenden Kegelschnitt zerfällt.

Drei homologe Kegel 2. Grades in den Bündeln erzeugen durch die Schnittpunkte entsprechender Berührungsebenen eine Kurve 6. Ordnung auf F^3, denn jeder von ihnen hat mit dem zum nämlichen Bündel gehörigen Kegel 3. Klasse, dessen Ebenen mit den entsprechenden einen ebenen Schnitt der Fläche liefern, sechs Tangentialebenen gemeinsam. Gegen die Geraden a ist sie windschief, jenen kubischen Raumkurven r^3 begegnet sie zweimal, weil von den erzeugenden Büscheln je zwei Tangentialebenen an jene Kegel kommen.

Nehmen wir nun einen Kegel 2. Grades in O, welcher fünf von den Geraden a, etwa $a_2, a_3, \ldots a_6$ tangiert, so tun es die entsprechenden ebenfalls; in diese fünf Geraden laufen fünf Tripel homologer Berührungsebenen der Kegel zusammen; sie gehören daher zur erzeugten Kurve; das eigentliche Erzeugnis ist eine Gerade b_1, welche, wie die kontinuierliche Erzeugung erfordert, von jeder der fünf sich ablösenden Geraden einen Punkt enthält, gegen a_1 aber windschief ist, wie die nicht zerfallende Kurve 6. Ordnung.

Wir erhalten auf diese Weise sechs Geraden der Fläche

$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6,$$

von denen jede die fünf Geraden a trifft, welche nicht denselben Zeiger haben, gegen die sechste windschief ist. Sie sind daher windschief gegeneinander; es gehören z. B. a_1, a_2, a_3; b_4, b_5, b_6 zu verbundenen Regelscharen. Es liegt eine sogenannte Doppelsechs vor:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6; \end{matrix}$$

jede Gerade aus diesen beiden Sextupeln, ist gegen die fünf in derselben Zeile stehenden und die einzige in derselben Kolonne stehende windschief, die fünf andern schneidet sie.

Auf diese Doppelsechsen hat zuerst Schläfli aufmerksam gemacht[1]).

An die entsprechenden Kegel 2. Grades der Büschel, die zu einer der Geraden b führen, kommen von den entsprechenden Büscheln je zwei Ebenen. Daher begegnen die Geraden b den Raumkurven r^3 je zweimal.

Wenn wieder $\alpha_1, \alpha_1', \alpha_1''$; $\alpha_2, \alpha_2', \alpha_2''$ die in a_1, a_2 zusammenlaufenden entsprechenden Ebenen sind, so lösen sich von der Kurve r^3, welche durch die Büschel $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1'\alpha_2'$, $\alpha_1''\alpha_2''$ entsteht, die Geraden

1) Quarterly, Journal of Mathematics, Bd. 2, S. 115; Briefwechsel zwischen Steiner und Schläfli (1896), S. 68.

a_1, a_2 ab; es bleibt als eigentliches Erzeugnis eine Gerade c_{12}, welche, wie oben, mit a_1 und a_2 je einen Punkt gemein hat. Das führt zu 15 Geraden $c_{12}, \ldots c_{56}$, die auf der kubischen Fläche liegen.

Der gemeinsame Punkt dieser zerfallenden kubischen Raumkurve (a_1, a_2, c_{12}) mit einer andern r^3 liegt, weil nicht auf a_1 oder a_2, auf c_{12}.

Demnach hat jede von den Kurven r^3 mit den Geraden a keinen, mit den b je zwei, mit den c je einen Punkt gemeinsam.

Die beiden Punkte, welche b_1 mit (a_1, a_2, c_{12}) gemeinsam hat, verteilen sich auf a_2 und c_{12}; ebenso wird c_{12} von b_2 getroffen, dagegen nicht von $b_3, \ldots b_6$ (weil z. B. b_3 die a_1, a_2 trifft), ebenso nicht von $a_3, \ldots a_6$, denn diese haben mit (a_1, a_2, c_{12}) keinen Punkt gemeinsam.

Daher trifft jede der 15 Geraden c_{ik} von den a, b die beiden Geraden a_i, a_k und die b_i, b_k und ist die dritte Gerade in den Ebenen $a_i b_k$, $a_k b_i$.

Der volle ebene Schnitt $a_1 b_2 c_{12}$ wird von jeder andern Gerade der Fläche einmal getroffen, von c_{13} auf a_1, von c_{23} auf b_2, von c_{34} auf c_{12}. Danach haben zwei Geraden c ohne gemeinsamen Zeiger einen Schnittpunkt, zwei andere sind windschief.

Wir haben die 27 Geraden der Fläche und ihr Verhalten in bezug auf Schneiden und Nichtschneiden. Jede wird von zehn Geraden geschnitten, von denen fünfmal je zwei sich schneiden; dies wird durch folgende drei Typen dargestellt:

$$\begin{array}{l|l} a_1 & b_2 c_{12},\ b_3 c_{13},\ b_4 c_{14},\ b_5 c_{15},\ b_6 c_{16}, \\ b_1 & a_2 c_{12},\ a_3 c_{13},\ a_4 c_{14},\ a_5 c_{15},\ a_6 c_{16}, \\ c_{12} & a_1 b_2,\ a_2 b_1,\ c_{34} c_{56},\ c_{35} c_{46},\ c_{36} c_{45}, \end{array}$$

und führt weiter zu 45 Ebenen mit je drei Geraden, 30 vom Typus $a_1 b_2 c_{12}$, 15 vom Typus $c_{12} c_{34} c_{56}$.

Die Erzeugung liefert ein zweites doppelt unendliches Sy- 378
stem (Netz) von kubischen Raumkurven auf der Fläche, die sich gegen die a und b umgekehrt verhalten, jene zweimal und diese nicht schneiden, woraus dann folgt, daß sie den c ebenfalls einmal begegnen.

Zu diesen Kurven gehören die drei kubischen Raumkurven R_{01}^3, R_{02}^3, R_{12}^3, welche durch je zwei der kollinearen Bündel O, O', O'' erzeugt werden. Ist X ein Punkt von R_{01}^3 und x'' der Strahl von O'', der den beiden nach X gehenden entsprechenden Strahlen x, x' von O, O' in O'' homolog ist, so geht eine seiner Ebenen durch X und trifft sich dort mit den entsprechenden Ebenen durch x und x', so daß X auf der Fläche liegt. Folglich gehören die drei Kurven der Fläche an, und von neuem sehen wir, daß die drei Scheitel auf ihr liegen. Tangenten in O an die Kurven R_{01}^3, R_{02}^3 sind die Strahlen von O, welche den Strahlen $O'O$, $O''O$ korrespondieren. Berührungsebene der Fläche in O ist also die Ebene, welche den beiden entsprechenden Ebenen von O', O'', die durch O gehen, in dessen Bündel korrespondiert.

Eine Schnittlinie entsprechender Ebenen aus O und O' ist Doppelsekante von R_{01}^3; von ihren drei Schnitten mit der F^3 liegen zwei auf R_{01}^3, der dritte ist der Schnittpunkt mit der homologen Ebene in O'', der erzeugende Punkt.

Die Geraden a sind, als Schnittlinien von drei entsprechenden Ebenen, Doppelsekanten von allen drei Kurven und allen ähnlichen, die im folgenden sich ergeben werden.

Zwei kubische Raumkurven R_1^3, R_2^3 seien gegeben, die einen Punkt O gemein haben. Wenn O' auf R_1^3, O'' auf R_2^3 liegt, so werden ihre Bündel durch die Kurven zu dem von O kollinear; die durch diese drei Bündel erzeugte Fläche F^3 enthält beide Kurven, und ihre sechs Geraden a sind gemeinsame Doppelsekanten derselben, und solche gemeinsamen Doppelsekanten, welche in vier getrennten Punkten treffen, müssen, wegen dieser vier Punkte, der F^3 angehören.

Zwei kubische Raumkurven mit einem gemeinsamen Punkt haben sechs gemeinsame Doppelsekanten, welche sie in verschiedenen Punkten treffen.

Eine kubische Raumkurve r^3 des früheren Systems sei durch die Büschel x, x', x'' erzeugt, die Trägerfläche der durch x und x'' erzeugten Regelschar trifft R_{01}^3, außer in O, noch fünfmal. Durch einen dieser Punkte X gehe die Gerade $\xi\xi''$ der Regelschar; da er einer der beiden weiteren Schnitte von ξ und R_{01}^3 ist, so geht die Doppelsekante $\xi\xi'$ durch ihn, er ist also allen drei homologen Ebenen ξ, ξ', ξ'' von x, x', x'' gemeinsam, Punkt von r^3.

Die Kurven R_{01}^3, R_{02}^3, R_{12}^3 werden von jeder der Kurven r^3 fünfmal getroffen.

Die Trägerfläche der Regelschar, die durch die Büschel x und x' erzeugt wird, geht durch R_{01}^3 und die Geraden der Regelschar sind Doppelsekanten der Kurve (Nr. 369); sie geht aber auch durch r^3, und die Geraden der Regelschar sind für diese Kurve einfache Sekanten (Nr. 201). Folglich haben die beiden Kurven, auf der Trägerfläche verbundener Regelscharen gelegen, verschiedenes Verhalten gegen dieselben und daher fünf Begegnungspunkte (Nr. 165).

Von den fünf Schnittpunkten der R_{01}^3 mit (a_1, a_2, c_{12}) liegen je zwei auf a_1, a_2 und einer auf c_{12}. Der ebene Schnitt $a_2 b_1 c_{12}$ beweist uns, daß kein Punkt von R_{01}^3 auf b_1 fällt. Die sechs Schnitte mit der Fläche $(a_1 a_2 a_3, b_4 b_5 b_6)$ fallen alle auf die a.

Es soll nun gezeigt werden, daß die ursprünglichen Scheitel 379
der erzeugenden Bündel durch beliebige Punkte der Fläche ersetzt werden können. Es genügt, dies an einem, O'', zu zeigen. Wir ersetzen ihn zunächst durch einen beliebigen Punkt $\bar{O}''$ der Kurve R^3_{12} und daher jede Ebene ξ'' von O'' durch diejenige $\bar{\xi}''$ von $\bar{O}''$, welche durch dieselben beiden weiteren Punkte der Kurve R^3_{12} und ihre verbindende Doppelsekante geht. Dadurch wird der Bündel $\bar{O}''$ zu den O', O'' kollinear mit diesen Ebenen ξ', ξ'', $\bar{\xi}''$ als entsprechenden, und also auch zu O. Jeder Punkt $\xi\xi'\xi''$ der Fläche ist auch Schnittpunkt $\xi\xi'\bar{\xi}''$ dreier entsprechenden Ebenen aus O, O', $\bar{O}''$, weil $\xi'\xi'' = \xi'\bar{\xi}''$ und daher $\xi\xi'\xi'' = \xi\xi'\bar{\xi}''$.

Wenn ξ'' durch $\bar{\xi}''$ ersetzt wird, so tritt niemals Unbestimmtheit ein, auch wenn die Doppelsekante in ξ'' durch $\bar{O}''$ geht; dem Strahle $O''\bar{O}''$ entspricht in der durch die Kurve R^3_{12} bewirkten Kollineation zwischen O'' und $\bar{O}''$ die Tangente in $\bar{O}''$, also ist $\bar{\xi}''$ durch jene Doppelsekante und diese Tangente bestimmt.

Nunmehr sei $\mathfrak{O}$ ein beliebiger Punkt von F^3, der Schnitt $\alpha\alpha'\alpha''$, durch den also die nach $\alpha'\alpha''$ gelegte entsprechende Ebene $\bar{\alpha}''$ von $\bar{O}''$ geht, wo dieser Punkt auch auf R^3_{12} liege; ferner sei a der Strahl aus O nach $\mathfrak{O}$ und a', a'' die ihm entsprechenden Strahlen; sie sind in α, α', α'' bzw. gelegen. Die Büschel a' und a'' erzeugen eine Regelschar ρ^2_{12} von Doppelsekanten der R^3_{12}, unter ihnen $\alpha'\alpha''$, welche durch $\mathfrak{O}$ geht; also gibt es in der verbundenen Schar, deren Geraden die Kurve R^3_{12} nur einmal treffen und zu der a', a'' gehören, eine durch $\mathfrak{O}$ gehende $\bar{a}''$; ihren Schnittpunkt mit R^3_{12} nehmen wir als $\bar{O}''$. Dieser Strahl $\bar{a}''$ entspricht im Bündel $\bar{O}''$ den Strahlen a' und a''; denn die Ebenen, welche aus O', O'', $\bar{O}''$ die Geraden von ρ^2_{12} projizieren, gehen durch a', a'', $\bar{a}''$; also sind auch a und $\bar{a}''$ entsprechend, und der Punkt $\mathfrak{O}$, in dem sie sich schneiden, liegt auf der durch O und $\bar{O}''$ gehenden kubischen Raumkurve, welche durch die Bündel O, $\bar{O}''$ erzeugt wird und auf der kubischen Fläche verläuft, wegen deren Erzeugung durch O, O', $\bar{O}''$. Wir können, auf dieser Kurve, $\bar{O}''$ wiederum durch $\mathfrak{O}$ ersetzen, und haben so O'', in zwei Schritten, durch $\mathfrak{O}$ ersetzt[1]).

So wird jeder Punkt der Fläche Scheitel eines Bündels, der zu den gegebenen Bündeln kollinear ist. Die entsprechenden Ebenen aller dieser ∞^2 Bündel laufen je in den Punkt der Fläche zusammen, den diejenigen aus O, O', O'' gemeinsam haben; und den sechs ausgezeichneten Ebenentripeln dieser Bündel, die nach den Geraden $a_1, \ldots a_6$ gehen, entsprechen in den übrigen Bündeln Ebenen, die es ebenfalls tun. Denn weil von den Ebenen α_1, α_1', α_1'', die in

1) Reye, Geometrie der Lage, 1. Auflage, Bd. II, S. 176, sowie in den späteren Auflagen.

α_1 sich schneiden, α_1', α_1'' es tun, so tut es auch $\bar{\alpha}_1''$, und weil es α_1 und $\bar{\alpha}_1''$ tun, so tut es auch die entsprechende Ebene in $\mathfrak{O}$.

Wir wollen, mit Schur und Reye[1]), den Inbegriff der obigen ∞^2 Bündel ein Netz von kollinearen Bündeln nennen; jede drei von ihnen erzeugen die Fläche; dies gibt ∞^6 aus der ursprünglichen Erzeugung abgeleitete Erzeugungen, von denen jede an Stelle derselben treten kann; zu allen gehört das Sextupel $a_1, a_2, \ldots a_6$, also auch dieselben b und c.

Von den kollinearen Bündeln, von denen je zwei eine kubische Raumkurve erzeugen und deren Scheitel sie erfüllen, haben wir gesagt, daß sie eine Reihe kollinearer Bündel bilden (Nr. 371); unser Netz ergab sich aus den drei ursprünglichen Bündeln O, O', O'' so, daß wir zunächst die beiden Bündel O', O'' durch eine Reihe verbanden, deren Scheitel die R_{12}^3 erfüllen, und dann die Bündel dieser Reihe wiederum mit O je durch eine Reihe; denn der Bündel um den beliebigen Punkt $\mathfrak{O}$ der Fläche wurde als einer dieser Reihen angehörig erkannt, derjenigen, die nach dem Bündel $\bar{O}''$ der Reihe $O'O''$ geht.

Das ist die Entstehungsweise, durch welche alle Netz genannten Gebilde sich ergeben. Wir haben sie die fächerförmige Entstehungsweise genannt (Nr. 218).

Beliebige zwei Punkte der Fläche führen (durch ihre Bündel) zu einer auf ihr verlaufenden und die Punkte verbindenden R^3; und jede von ihnen kann durch beliebige zwei ihrer Punkte hervorgerufen werden. Es existieren also ∞^{4-2} kubische Raumkurven R^3 auf F^3; sie bilden das zweite oben erwähnte System.

Alle treffen die a zweimal, die b garnicht, die c einmal, die Kurven r^3 des ersten Netzes fünfmal.

Die ∞^1 durch einen Punkt von F^3 gehenden R^3 bilden einen Büschel.

Wenn gesagt wurde, daß die Fläche durch beliebige drei der Bündel des Netzes erzeugt werden kann, so ist dies doch dahin zu präzisieren (Nr. 377), daß die Scheitel nicht drei Punkte einer Kurve R^3 sein oder die Bündel nicht derselben Reihe angehören dürfen. Die drei Bündel und ihre Scheitel müssen unabhängig sein.

Indem wir oben fanden, daß die Kurven R^3 durch O', O'' und durch O und $\mathfrak{O}$ sich in $\bar{O}''$ begegnen, und erwägen, daß O, O', O'' beliebige drei unabhängige Punkte der F^3 sind, erhalten wir:

Zwei Kurven R^3 haben stets einen Punkt gemein. Diese

1) Schur, Math. Annalen, Bd. 18, S. 13; Reye, Journ. f. Mathem., Bd. 104, S. 223.

Eigenschaften, die es mit dem Netz der r^3 teilt, charakterisieren auch dies Kurvensystem als Netz.

Zwei Reihen des Netzes kollinearer Bündel haben einen Bündel gemeinsam.

Die nach einem Punkte P der F^3 konkurrierenden homologen Ebenen aus den verschiedenen Bündeln O des Netzes gehen, so lange O auf einer R^3 bleibt, durch eine bestimmte Doppelsekante dieser Kurve, und P ist deren dritter Schnitt mit F^3. Geht R^3 durch P, so berührt die Doppelsekante in P; und der Büschel der durch P gehenden Kurven R^3 liefert den Tangentenbüschel in P. Auf jeder Kurve des Büschels gelangen wir mit O nach P; für diese Lage von O in P muß also die jenen Ebenen homologe Ebene durch alle diese Tangenten gehen, ist die Berührungsebene von P. Das stimmt mit dem oben für die ursprünglichen Bündel O, O', O'' erhaltenen Ergebnisse, daß den beiden in O sich schneidenden homologen Ebenen von O', O'' im Bündel O die Berührungsebene seines Scheitels korrespondiert.

Die zum Sextupel der a gehörigen ∞^2 kollinearen Bündel mit 380
den Scheiteln in den verschiedenen Punkten der Fläche können wir nun einfacher erhalten, wenn wir in ihnen immer die Ebenen nach vier der Geraden a, etwa a_1, a_2, a_3, a_4 entsprechend annehmen. Aus den obigen Sätzen über das Schneiden der 27 Geraden folgt, daß a_5, a_6 die einzigen gegen $a_1, \ldots a_4$ windschiefen Geraden der Fläche sind; also müssen sie jene vier zu dem zugehörigen Sextupel vervollständigen, und es ist gleichgültig, welche vier man nimmt. Diese Kollineationen sind mit den früheren identisch, weil sie ja in den nach vier (oder allen sechs) Geraden a gehenden Ebenen als entsprechenden übereinstimmen.

Benutzen wir ebenso das Sextupel der b, so erhalten wir ein zweites Netz von kollinearen Bündeln, welche die Fläche erzeugen, und die beiden Kurvennetze der r^3 und der R^3 tauschen ihre Rolle aus. Die Kurve, welche durch zwei der jetzigen Bündel erzeugt wird, geht durch die Scheitel und trifft alle sechs Geraden b zweimal (oder vier von ihnen, was schon genügt), ist also mit der r^3, welche dasselbe tut, identisch; denn dadurch ist eine kubische Raumkurve eindeutig bestimmt (Nr. 372). Und ebenso ist eine Kurve, die jetzt durch entsprechende Büschel von drei kollinearen Bündeln so hergestellt wird, daß sie durch zwei gegebene Punkte geht, weil sie den a zweimal begegnet, mit der durch dieselben zwei Punkte gehenden R^3 von vorhin identisch.

Wir wollen aber das neue Netz kollinearer Bündel direkt aus dem früheren ableiten.

In jedem Punkte P der F^3 konkurrieren aus den kollinearen Bündeln $O, O', O'', \ldots$ des ersten Netzes entsprechende Ebenen; dadurch entsteht der Bündel P und wird kollinear zum Bündel um einen zweiten Punkt P' der F^3, derartig, daß die je von dem nämlichen O kommenden Ebenen homolog sind. Wenn O' ein beliebiger zweiter Punkt auf F^3 und R^3 die durch O und O' gehende kubische Raumkurve des zweiten Netzes ist, also die durch die kollinearen Bündel O, O' erzeugte, so ist für irgend eine Ebene ξ von O der Punkt P, in den sie mit den entsprechenden konkurriert, der dritte Schnitt derjenigen Doppelsekante von R^3, welche die beiden andern Schnitte von ξ mit R^3 verbindet; so daß die beiden Doppelsekanten in ξ, von zwei durch O gehenden R^3 herrührend, in ihrem Schnitte den P liefern. Folglich muß, wenn wir nun ξ zum Bündel P rechnen, der Punkt O, von dem sie kommt, allen den R^3 gemeinsam sein, welche je durch die beiden weiteren Schnitte, mit F^3, der Strahlen p von (P, ξ) gehen. In der Tat gehen alle diese R^3 durch denselben Punkt der Schnittkurve C^3 von ξ; denn verbinden wir sie mit irgend einer r^3 durch Flächen 2. Grades (Nr. 378), so enthalten die Kegelschnitte, welche von diesen in ξ eingeschnitten werden, alle die drei Spuren von r^3 und gehen durch jene Punktepaare auf den p; also haben sie (Nr. 227) noch einen festen Punkt O gemeinsam, der dann allen jenen R^3 angehört, so daß sie einen Büschel bilden; was die erwähnten F^2 auch tun, da sie durch r^3 und ihre Doppelsekante aus O gehen.

Dieser Punkt O ist also derjenige, von welchem die Ebene ξ und die entsprechenden in $P', P'', \cdots$ kommen. So zeigt sich, daß die Ebenen dieser Bündel eindeutig zugeordnet werden. Ist nun wieder p ein Strahl von P, so bestimmt er durch seine ferneren Schnitte mit F^3 eine R^3 und, wenn p' die Doppelsekante aus P' an diese R^3 ist, so entsprechen den Ebenen ξ des Büschels p die Ebenen ξ' des Büschels p', und entsprechende haben je denselben dritten Schnitt mit R^3. So erweist sich die eindeutige Beziehung als Kollineation. Und wir sehen, daß die Kurven R^3 durch die Bündel $P, P', P'' \cdots$ so entstehen, wie früher die r^3 durch die Bündel $O, O', O'', \cdots$, nämlich als Erzeugnisse entsprechender Büschel derselben.

Umgekehrt, eine Kurve r^3, Ort gemeinsamer Punkte $P, P', P'' \cdots$ entsprechender Ebenen aus entsprechenden Büscheln von $O, O', O'', \cdots$, wird nun Ort der Scheitel $P, P', P'', \cdots$ derjenigen Bündel, deren entsprechende Ebenen nicht bloß in einen Punkt $O, O', \cdots$ zusammenlaufen, sondern in eine Gerade, eine der Axen jener Büschel oder der Doppelsekanten aus $O, O', \cdots$ an r^3. Diese r^3 ist also für die Erzeugung durch die $P, P' \cdots$ das, was eine R^3 für die Erzeugung durch die $O, O', \cdots$ ist.

Nach den Geraden $b_1, b_2, \cdots$, gemeinsamen Doppelsekanten aller r^3, laufen daher aus allen Bündeln $P, P', \cdots$ entsprechende Ebenen zusammen.

Wir können die beiden Netze kollinearer Bündel der O und der P wiederum als sich stützend[1]) bezeichnen. Denn entsprechende Ebenen aller Bündel des einen Netzes bilden einen Bündel des anderen (Nr. 95, 371).

Nimmt man aus den Bündeln des einen Netzes, etwa den $O, O', O'', \cdots$ entsprechende Büschel heraus, deren homologe Ebenen in die Punkte einer r^3 zusammenlaufen und deren Axen die Doppelsekanten dieser Kurve sind, so haben wir es mit einem Netze projektiver Ebenenbüschel zu tun, und die sich auf dasselbe stützende Reihe kollinearer Bündel: um die Punkte von r^3 ist in dem zweiten Netze kollinearer Bündel $P, P', P'', \cdots$ enthalten (Nr. 371).

Aus den 27 Geraden a, b, c der Fläche lassen sich 36 Doppelsechsen bilden, die wir durch drei Typen veranschaulichen können[2]): 381

$$
\begin{array}{lllllll}
1) & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6, \\
2) & a_1 & a_2 & a_3 & c_{56} & c_{64} & c_{45} \\
 & c_{23} & c_{31} & c_{12} & b_4 & b_5 & b_6, \\
3) & a_1 & b_1 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\
 & a_2 & b_2 & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16};
\end{array}
$$

ihnen gehören je 1, 20, 15 Doppelsechsen an. Jede Doppelsechs führt zu zwei Netzen von kubischen Raumkurven auf der Fläche, immer mit zwei Begegnungspunkten mit den Geraden des einen Sextupels und keinem mit denen des anderen, und zwei sich stützenden Netzen von kollinearen Bündeln, von denen je drei um unabhängige Scheitel die Fläche erzeugen.

Jedes Sextupel hat mit 20 Sextupeln 3, mit $2 \cdot 15$ eine und mit $1 + 20$ keine Gerade gemeinsam.

Die drei erzeugenden Bündel können in $\infty^{3 \cdot 3}$ Weisen im Raume gewählt werden; die Kollineationen zwischen dem ersten und dem zweiten, dem ersten und dritten Bündel sind je in ∞^8 Weisen möglich (Nr. 372). Andererseits ist jede gegebene kubische Fläche aus drei beliebigen Punkten auf ihr (in je 72 Weisen) auf $\infty^{2 \cdot 3}$ Weisen so erzeugbar; daraus folgt der Grad der Mannigfaltigkeit der kubischen Flächen:

$$3 \cdot 3 + 2 \cdot 8 - 2 \cdot 3 = 19.$$

Es gibt ∞^{19} kubische Flächen im Raume.

Es mag jedoch nicht unerwähnt bleiben, daß nicht jede ku-

1) Reye, Journal f. Mathem., Bd. 104, S. 223.

2) Schröter, Journal f. Math., Bd. 62, S. 276; Cremona, ebenda Bd. 68, S. 78.

bische Fläche in reeller Weise durch kollineare Bündel erzeugt werden kann. Nach der Realität der 27 Geraden bilden die kubischen Flächen fünf Gattungen[1]). Diejenige, bei der drei Geraden reell sind und die 24 übrigen sämtlich punktiert, ist nicht reell erzeugbar[2]).

Diese Erzeugung wird später zu einer eindeutigen Abbildung der kubischen Fläche auf eine Ebene führen, die sich aber auch aus der Erzeugung durch trilineare Büschel ableiten läßt (Nr. 211).

382 Wenn man von einer auf F^3 verlaufenden Raumkurve n^{ter} Ordnung R^n weiß, wie sie sich zu den Geraden eines bestimmten Sextupels, etwa des der b, hinsichtlich der Anzahl der Schnittpunkte verhält, so ist es leicht, die Anzahl ihrer Begegnungspunkte mit einer r^3, die alle sechs Geraden b zweimal schneidet, anzugeben. Diese Anzahl sei n'. Die Regelfläche 4. Grades der eine Gerade treffenden Doppelsekanten von r^3, auf welcher diese r^3 doppelt liegt (Nr. 203), trifft die R^n, außerhalb r^3, noch in $4n - 2n'$ Punkten; daher ist die Regelfläche der Doppelsekanten von r^3, welche sich auf die R^n stützen, vom Grade $4n - 2n'$. Auf ihr ist R^n einfach, da jeder Punkt von ihr nur eine Doppelsekante an r^3 sendet, hingegen r^3 $(2n - n')$-fach, weil der Kegel 2. Grades, der sie aus einem Punkte auf ihr projiziert, der R^n, außerhalb r^3, noch $(2n - n')$-mal begegnet. Eine der Geraden b_i ist, wenn sie die R^n in β_i Punkten schneidet, β_i-fache Erzeugende dieser Regelfläche. Da nun jede Erzeugende der F^3 schon dreimal begegnet: auf r^3 und auf R^n, so besteht der Schnitt der Regelfläche mit F^3 aus R^n, r^3 und denjenigen b_i, bei denen $\beta_i > 0$. Also:

$$3(4n - 2n') = 3(2n - n') + n + \Sigma\beta_i$$

oder:

$$1) \qquad 3n' = 5n - \Sigma\beta_i.$$

Wenn $n = 3$, so ist $3n' = 15 - \Sigma\beta_i$.

Betrachten wir daher die zu den verschiedenen Sextupeln (also $6\cdot 2$-mal getroffenen) gehörigen kubischen Raumkurven und ihre Schnitte mit der r^3.

Für das obere Sextupel im Typus 1) haben alle sechs β den Wert 0, für das untere den Wert 2, also ergibt sich $n' = 5$, bzw. $n' = 1$, wie wir schon wissen. Für die kubischen Raumkurven, welche den Geraden der Sextupel der beim Typus 2) hingeschriebenen

---

1) Schläfli, Quarterly Journal of Mathematics, Bd. 2, S. 55, 110; Philos. Transactions, Bd. 153, S. 193.

2) Cremona, Journal f. Math., Bd. 68, S. 117 und 118; Sturm, Flächen 3. Ordnung, S. 301 und 317.

Doppelsechs oder des einen in der Doppelsechs 3) zweimal begegnen, ist:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0,\ \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 1,\ \text{also } n' = 4,$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 2,\ \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 1,\ \text{also } n' = 2,$$

$$\beta_1 = 0,\quad \beta_2 = 2,\ \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 1,\ \text{also } n' = 3.$$

Für alle Doppelsechsen desselben Typus gilt das nämliche.

Es treten also alle fünf Anzahlen von 1 bis 5 auf; dagegen 0 nicht. Zwei auf derselben kubischen Fläche gelegene Raumkurven 3. Ordnung müssen sich mindestens einmal begegnen[1]).

Sind $\alpha_1, \cdots \alpha_6$ die Zahlen der Begegnungspunkte mit den Geraden a, so lehren die Schnitte mit den beiden Trägerflächen verbundener Regelscharen $(a_1\, a_2\, a_3,\ b_4\, b_5\, b_6)$, $(a_4\, a_5\, a_6,\ b_1\, b_2\, b_3)$, daß:

$$\Sigma \alpha_i + \Sigma \beta_i = 2 \cdot 2n;$$

daher folgt aus 1):

$$2) \qquad 3n' = n + \Sigma \alpha_i.$$

In vier kollinearen Bündeln O, O', O'', O''' gibt es ∞^1 Quadrupel entsprechender Ebenen, welche einen gemeinsamen Punkt haben. Die Bündel O, O', O'' und O, O', O''' erzeugen je eine kubische Fläche; auf beiden liegt die durch O, O' erzeugte kubische Raumkurve R^3_{01}. Wenn in einen gemeinsamen Punkt der beiden Flächen die Ebenen ξ, ξ', ξ'' bzw. η, η', η''' zusammenlaufen, so aber, daß ξ, ξ' von η, η' verschieden sind, so ist er Schnittpunkt der entsprechenden Strahlen $\xi\eta, \xi'\eta'$, also ein Punkt von R^3_{01}. Bei einem Punkte des weiteren Schnitts 6. Ordnung müssen ξ, ξ' mit η, η' identisch sein, d. h. die beiden Tripel sind ξ, ξ', ξ'' und ξ, ξ', ξ''', und der Punkt ist Schnittpunkt aller vier entsprechenden Ebenen. 383

Bei vier kollinearen Ebenenbündeln entsteht durch die ∞^1 Punkte, in welchen vier entsprechende Ebenen zusammenlaufen, diejenige Raumkurve 6. Ordnung, in welcher zwei Flächen 3. Ordnung, außer in einer kubischen Raumkurve, sich schneiden[2]).

Die beiden Kurven begegnen sich, wie a. a. O. bewiesen, in acht Punkten. Dazu gelangen wir auch durch eine auf der (unikursalen) R^3_{01} gelegene Korrespondenz. Jeder Punkt X von R^3_{01} ist, als Punkt der ersten kubischen Fläche, Schnittpunkt $\xi\xi'\xi''$; wir ordnen ihm die drei Schnitte X_1 der R^3_{01} mit ξ''' zu. Umgekehrt, jeder X_1 der R^3_{01} führt zu einem Büschel durchgehender Ebenen ξ''' (um $O'''X_1$); die drei entsprechenden Büschel erzeugen auf jener Fläche eine kubische

1) Math. Annalen, Bd. 21, S. 505.

2) Flächen 3. Ordnung, Nr. 64. Ihr Rang ist 16, ihr Geschlecht 3.

Raumkurve r^3, welche der R^3_{01} in fünf Punkten X begegnet. Die acht Koinzidenzen der so entstehenden Korrespondenz [5,3] sind die gemeinsamen Punkte.

Liegen daher fünf kollineare Bündel vor: $O, \ldots O^{IV}$, so geben O, O', O'' eine kubische Fläche, auf welcher R^3_{01} liegt, O, O', O''', O^{IV} eine Raumkurve 6. Ordnung, welche der R^3_{01} achtmal begegnet, also jene Fläche noch zehnmal trifft; in jedem der zehn Punkte müssen, weil er nicht auf R^3_{01} liegt, ξ, ξ', ξ'' und $\xi, \xi', \xi''', \xi^{IV}$ zusammenlaufen.

Bei fünf kollinearen Bündeln gibt es zehn Punkte, in welche entsprechende Ebenen aus allen fünf zusammenkommen.

Die dualen Ergebnisse sind:

Die Verbindungsebenen entsprechender Punkte von drei kollinearen Feldern umhüllen eine Fläche 3. Klasse, vier kollineare Felder führen zu einem Torsus 6. Klasse von Ebenen, in welche vier entsprechende Punkte fallen, und bei fünf kollinearen Feldern gibt es zehn Ebenen mit fünf entsprechenden Punkten.

Die Fläche 3. Klasse ist wesentlich verschieden von derjenigen 3. Ordnung. Sie haben beide 27 Geraden, aber diese verhalten sich dual. Auf der Fläche 3. Ordnung ist jede derselben mit einfachen Punkten erfüllt, während die durchgehenden Ebenen doppelte Berührungsebenen sind: Berührungspunkte sind die Schnittpunkte der Gerade mit dem den vollen Schnitt ergänzenden Kegelschnitte. Bei der Fläche 3. Klasse sind die durch eine Gerade der Fläche gehenden Ebenen einfache Berührungsebenen, die Punkte Doppelpunkte. Und an die Stelle der 45 dreifachen Berührungsebenen (Ebenen mit drei Geraden) treten 45 dreifache Punkte, in die je drei (doppelte) Geraden zusammenlaufen.

384 Wir haben erkannt, daß bei einem Netze von kollinearen Bündeln, welches eine Fläche 3. Ordnung erzeugt und zum Sextupel $a_1, \ldots a_6$ gehört, die durch zwei von ihnen entstehenden Kurven R^3 gegen die Geraden $b_1, \ldots b_6$ des verbundenen Sextupels windschief sind. Wie gelangen wir vermittelst solcher Kurven auf eine der Geraden b?

Wir legen den Punkt $\mathfrak{O} = \alpha\alpha'\alpha''$ (Nr. 379) auf die Gerade b_1; wenn wieder $O\mathfrak{O} = a$ ist und a', a'' die entsprechenden Strahlen sind, so geht die durch die drei Büschel a, a', a'' erzeugte kubische Raumkurve r^3 durch $\mathfrak{O}$ und trifft b_1 noch einmal: in $\beta\beta'\beta''$. Die Ebene β, welche durch a und diesen Punkt geht, enthält also b_1. Die Gerade $\beta'\beta''$ der Regelschar ρ^2_{12}, die durch a', a'' erzeugt wird, trifft b_1, sowie die Gerade $\bar{a}''$ aus der Leitschar, welche durch $\mathfrak{O}$ geht. Deren Schnitt mit R^3_{12} nehmen wir wieder als $\bar{O}''$. Wir wissen, $\bar{a}''$ entspricht in $\bar{O}''$ den a', a'', a, also muß die den β', β'' (und β) korrespondierende Ebene $\bar{\beta}''$ durch $\bar{a}''$ gehen, andererseits durch $\beta'\beta''$; folglich enthält sie die Gerade b_1. Die beiden entsprechenden Ebenen β und $\bar{\beta}''$ gehen demnach durch b_1. Der $\mathfrak{O}$ wird, als Schnitt $a\bar{a}''$, Punkt der durch $O, \bar{O}''$ erzeugten kubischen Raumkurve.

Durch jeden Punkt von b_1 gehen, weil sie auf der F^3 liegt, drei entsprechende Ebenen ξ, ξ', ξ''; da durch ihn die Schnittlinie $\xi'\xi''$ geht, so tut es auch die $\bar{\xi}''$, welche diese Gerade aus $\bar{O}''$ projiziert; folglich treffen sich in jedem Punkte von b_1 die entsprechenden Strahlen $\beta\xi$ und $\bar{\beta}''\bar{\xi}''$ von O und $\bar{O}''$, d. h. die Gerade b_1 gehört zu der kubischen Raumkurve, welche durch diese Bündel erzeugt wird. Wir haben noch den ergänzenden Kegelschnitt nachzuweisen. Es ist unmittelbar klar, daß seine Ebene durch a_1 geht; denn auf sie kommen die beiden Begegnungspunkte mit a_1, da b_1 zu dieser Gerade windschief ist. Er heiße deshalb $\mathfrak{A}_1^2$. Er enthält die Scheitel O und $\bar{O}''$, und die entsprechenden Ebenen α_1 und $\bar{\alpha}_1''$, die nach a_1 gehen, vereinigen sich in seiner Ebene. Die Büschel (O, α_1) und $(\bar{O}'', \alpha_1)$ erzeugen den $\mathfrak{A}_1^2$. Der Punkt $(\beta\alpha_1, \bar{\beta}''\alpha_1)$ ist den beiden Bestandteilen gemeinsam.

Wenn wir also vermittelst einer R^3 auf eine der Geraden b, etwa b_1, kommen wollen, so muß jene Kurve zerfallen in die b_1 und einen Kegelschnitt $\mathfrak{A}_1^2$, dessen Ebene durch a_1 geht. Auf diesem Kegelschnitt liegen dann die erzeugenden Scheitel.

Das Erzeugnis ist demnach ausgeartet, jedoch noch nicht die Kollineation; aber sie ist spezialisiert durch das Vorhandensein einer sich selbst entsprechenden Ebene: der des Kegelschnitts. Wollen wir nun auf dieser zerfallenen Kurve den Scheitel nach $\mathfrak{O}$, oder, da dieser Punkt sich nicht mehr auszeichnet, nach einem beliebigen Punkt O_1 von b_1 verlegen, so werden wir zu einer ausgearteten Kollineation gelangen und müssen daher die Betrachtung noch aufschieben.

Bei drei kollinearen Bündeln O, O', O'' sind im allge- 385
meinen nicht entsprechende Strahlen d, d', d'' vorhanden, welche in einen Punkt D zusammenlaufen (Nr. 377)[1]).

Wenn das aber im speziellen Falle eintritt, so wird der Punkt D Doppelpunkt der erzeugten Fläche F^3. Die Kurve r^3, welche von den drei Büscheln d, d', d'' herrührt, besteht aus drei Geraden, in welche entsprechende Ebenen dieser demselben Bündel angehörigen projektiven Büschel zusammenlaufen (Nr. 200). Somit gehen durch D drei nicht in einer Ebene gelegene Geraden der Fläche, was auf einen singulären Punkt schließen läßt. Ferner,

1) In bezug auf die Spezialisierung für die Fläche mit Doppelpunkt und die Regelfläche vgl. Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl., Abt. III, 10. Vortrag und Anhang, S. 182.

wenn l eine Gerade durch D ist, so modifiziert sich die in Nr. 377 besprochene Korrespondenz [1, 2] der Punkte X und X_1 in der Art, daß von den beiden einem Punkte X entsprechenden X_1 der eine immer in D fällt, weil die Regelschar wegen der durch d', d'' gehenden Ebenen der erzeugenden Büschel durch diesen Punkt geht. Wir haben also, von diesem festen Punkte absehend, eine Projektivität [1, 1]. So weit würde das auch gelten, wenn nur d', d'' durch D gehen, also D bloß Punkt von R^3_{12} ist. Aber in der Projektivität entspricht D in unserm Falle sich selbst; weil nämlich auch d durch D geht, d', d'' aber einen Kegel 2. Grades erzeugen, dessen Spitze D ist, so hat auch der zweite Schnittpunkt, d. i. der Punkt, der dem D in [1, 1] korrespondiert, sich nach D begeben. Und es bleibt nur eine von D verschiedene Koinzidenz. Auf jeder Gerade durch D vereinigen sich demnach zwei Schnitte mit F^3 in diesem Punkte.

Durch den Punkt D gehen sowohl alle r^3, denn in jeden drei entsprechenden Ebenenbüscheln x, x', x'' sind $xd, x'd', x''d''$ entsprechend, als auch die drei Kurven R^3_{01}, R^3_{02}, R^3_{12} und daher alle R^3.

Die drei oben gefundenen Geraden der F^3, welche durch D gehen, sind, als Schnittlinien entsprechender Ebenen, Geraden a, nehmen wir an: a_1, a_2, a_3. Die Ebenenbüschel um die drei entsprechenden Strahlen von O, O', O'', welche zugleich a_4, a_5 treffen, erzeugen (Nr. 377) die Kurve (a_4, a_5, c_{45}), von der also c_{45} den D enthält und ebenso tun es c_{46}, c_{56}. So haben wir sechs durch den Doppelpunkt D gehende Geraden der Fläche erhalten.

Die Gerade c_{45} ist damit Treffgerade von a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 geworden, also identisch mit b_6, und ebenso c_{46} mit b_5, c_{56} mit b_4. Ferner ist a_1 dritte Gerade in $b_4c_{14} \equiv c_{56}c_{14}$, mithin identisch mit c_{23}, ebenso a_2 mit c_{31}, a_3 mit c_{12}. Jede der sechs Geraden, die durch den Doppelpunkt D gehen, repräsentiert daher zwei Geraden des allgemeinen Falls, ist binär. Die 15 übrigen Geraden liegen als dritte in den 15 Verbindungsebenen und zwar z. B.: in der Ebene $a_1c_{31} \equiv c_{23}a_2$ die Gerade b_3, in $b_4c_{46} \equiv c_{56}b_5$ die Gerade a_6 und in $a_1b_4 \equiv c_{23}c_{56}$ die Gerade c_{14}. In den sechs binären Geraden haben sich zwei zu einer Doppelsechs:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & c_{56} & c_{64} & c_{45} \\ c_{23} & c_{31} & c_{12} & b_4 & b_5 & b_6 \end{matrix}$$

verbundene Sextupel vereinigt, und zwar immer zwei Geraden, die im allgemeinen Falle windschief sind, wie a_1 und $c_{23}, \ldots$

Das Hyperboloid $(a_1, a_2, a_3; b_4, b_5, b_6)$ ist in den Anschmiegungskegel übergegangen.

Man kann auf diese Weise bis zu vier Doppelpunkten kommen.

Eine andere Methode, einen Doppelpunkt zu erzielen, ist, daß zwei der erzeugenden Bündel denselben Scheitel erhalten: $O \equiv O'$; dieser wird Doppelpunkt. Durch jeden Strahl $x \equiv y'$ dieses Bündels gehen, wenn x', y die entsprechenden Strahlen sind, die beiden entsprechenden Ebenen xy, $x'y'$, und die entsprechende Ebene im dritten Bündel O'' schneidet in dem einzigen vom Scheitel verschiedenen Punkt der Fläche auf dem Strahl.

Der Verbindungsstrahl OO'' der Scheitel, als Strahl von O'', und die beiden ihm in den andern Bündeln korrespondierenden Strahlen führen, als Axen projektiver Ebenenbüschel in demselben Bündel, wiederum zu drei Geraden a_1, a_2, a_3 durch den Doppelpunkt, in denen entsprechende Ebenen sich schneiden. Dazu kommen, als die weiteren Geraden der Fläche durch den Doppelpunkt, die drei sich selbst entsprechenden Strahlen der konzentrischen Bündel, deren Punkte auf die Fläche durch die verschiedenen Ebenen des Büschels um die entsprechende Gerade in O'' gelangen. Die Verbindungsebene zweier dieser Geraden entspricht sich selbst in O und O', und ihre Schnittlinie mit der homologen Ebene in O'' ist daher eine a; wir haben so a_4, a_5, a_6 und erkennen jene sich selbst entsprechenden Geraden, ähnlich wie vorhin, zunächst als c_{56}, c_{64}, c_{45} und dann wiederum als b_4, b_5, b_6; usw.

Die drei sich selbst entsprechenden Geraden stellen die R_{01}^3 dar.

Weil von drei entsprechenden Ebenenbüscheln immer zwei einen Kegel erzeugen, so gehen alle r^3 durch dessen Spitze, den Doppelpunkt.

Wir können zwei Bündel so kollinear machen, daß zwei ent- 386
sprechende Büschel zu derselben Punktreihe perspektiv sind; man bestimmt sie durch vier Paare entsprechender Ebenen α, α'; β, β'; γ, γ'; δ, δ', welche so beschaffen sind, daß α und α', β und β', γ und γ' je durch den nämlichen Punkt von $\delta\delta' = d$ gehen.

Folglich können drei Bündel so kollinear gemacht werden, daß in allen Punkten von d entsprechende Strahlen sich schneiden. Damit wird jeder Punkt von d Doppelpunkt der Fläche und diese eine kubische Regelfläche.

Nunmehr sind beliebige drei entsprechenden Ebenenbüschel der Bündel so beschaffen, daß sie zu derselben Punktreihe d perspektiv sind; daher besteht das Erzeugnis r^3 aus dieser Gerade und den beiden Transversalen, welche sie und die drei Axen treffen (Nr. 201): in den Transversalen schneiden sich entsprechende Ebenen.

Diese Transversalen sind die Erzeugenden der Regelfläche. Durch jeden Punkt von d gehen zwei; denn die drei projektiven Ebenenbüschel, deren Axen er gemeinsam ist, haben, außer d, noch zwei Geraden, in welche entsprechende Ebenen zusammenlaufen.

Also sind alle Erzeugenden Geraden a.

Die Ebenen der Bündel, die nach den Erzeugenden gehen, umhüllen demnach Kegel 2. Grades, ersichtlich Tangentialkegel der Fläche. Diese Ebenen der Bündel allein erzeugen die Fläche, die übrigen nur die Punkte der Doppelgerade.

Die genannten Kegel sind auch diejenigen, deren entsprechende Ebenen in Punkte einer gegebenen Ebene konkurrieren (Nr. 377), und unabhängig von dieser Ebene; die Ergänzung zur 3. Klasse geschieht durch die Büschel, deren Axen sich im Spurpunkt von d schneiden.

Die durch den Scheitel O gehende Erzeugende ergibt sich folgendermaßen. Dem Strahle $O'O$, als Strahl von O', korrespondiert in O'' der Strahl $O''Q$, wo Q der Schnitt mit Od sei; sind dann g', g'' die dem Strahle $g = OQ$ entsprechenden Strahlen, die sich mit ihm auf d treffen, so sind $(g', O'O)$ und $(g'', O''Q)$ entsprechende Ebenen; beide enthalten g, durch den die ihnen in O korrespondierende Ebene auch geht; er ist die gesuchte Erzeugende.

Wenn $e \equiv f'$ die Verbindungslinie OO' ist und e', f die entsprechenden Strahlen in O', O sind, so sind die beiden durch OO' gehenden Ebenen $\theta = ef$, $\theta' = e'f'$ korrespondierend; sie haben noch den Punkt von d gemeinsam, in welchem sich ja entsprechende Strahlen ihrer Büschel treffen, also sind sie identisch. Der Schnitt dieser Ebene $\theta = \theta'$ mit der entsprechenden in O'' ist Erzeugende, und der durch O, O' gehende Kegelschnitt in ihr, der durch die entsprechenden Büschel um O, O' entsteht, setzt mit d die Kurve R^3_{01} zusammen, und so zerfallen alle R^3.

Für die einfache Leitgerade gibt es kein System von ∞^1 Tripeln entsprechender Ebenen, welche ihre Punkte und nur sie erzeugen; drei Ebenen vielmehr, welche einen Punkt dieser Gerade gemeinsam haben, ist die ganze durch ihn gehende Erzeugende gemeinsam.

Im Grunde läuft die Erzeugung auf eine einfachere hinaus: Die beiden Tangentialkegel 2. Klasse aus O, O' sind projektiv bezogen und haben eine sich selbst entsprechende Ebene; die Schnittlinien der übrigen homologen Ebenen sind die Erzeugenden.

Man kann wiederum noch auf eine zweite Weise zu einer kubischen Regelfläche gelangen, wenn nämlich die drei Scheitel, die hier, wegen einer späteren Betrachtung, P, P', P'' heißen mögen, in einer Gerade d liegen und diese sich selbst entspricht. Jeder Punkt auf ihr ist drei entsprechenden Strahlen gemeinsam, also doppelt. Diesmal ergibt sich die einfache Leitgerade als Schnittlinie entsprechender Ebenen. Zunächst ist d selbst eine solche Gerade und zwar für ∞^1 Tripel; jede Ebene durch d aus O trifft sich mit ihren entsprechenden Ebenen in d und liefert so in jede Ebene ϵ einen erzeugenden Punkt $d\epsilon$. Also gehört der Ebenenbüschel d in den drei Bündeln zu den

Kegeln 3. Klasse, deren entsprechende Ebenen den Schnitt der Ebene ϵ erzeugen; es bleiben daher nur noch Kegel 2. Klasse. Von den vier gemeinsamen Ebenen der zu ϵ und ϵ_1 gehörigen Kegel 2. Klasse in P gehen drei nach den Schnittpunkten von $\epsilon\epsilon_1$ mit der Fläche; die vierte η läuft mit ihren beiden entsprechenden Ebenen η', η'' in P', P'' in eine Gerade e zusammen, die einzige von d verschiedene Gerade a.

Jede der Kurven, erzeugt durch drei entsprechende Ebenenbüschel, zerfällt in d und einen Kegelschnitt. Nehmen wir aber entsprechende Strahlen aus (P, η), (P', η'), (P'', η'') als Axen, so zerfällt dieser noch weiter in e, die von η, η', η'' herrührt, und eine Gerade, welche d und e trifft und punktweise durch die Tripel der übrigen entsprechenden Ebenen jener Ebenenbüschel entsteht: eine Erzeugende; und e erkennen wir so als Leitgerade.

Es mag noch der spezielle Fall besprochen werden, daß drei 387
kollineare Bündel O, O', O'' gegeben sind, denen die Ebene Π der Scheitel entsprechend gemeinsam ist. Das Erzeugnis zerfällt dann in diese Ebene und eine Fläche 2. Grades F^2. Drei entsprechende Ebenenbüschel aus den Bündeln, zu welchen Π nicht gehört, erzeugen eine kubische Raumkurve r^3, welche auf F^2 liegt; drei solche aber, deren Axen in Π liegen, erzeugen, weil zu je zweien perspektiv, eine Gerade g, in der die drei Perspektivitätsebenen (von je zweien) zusammenlaufen. Und so erhalten wir die eine Regelschar auf F^2. In den drei projektiven Büscheln (O, Π), (O', Π), (O'', Π) haben wir (Nr. 200) dreimal entsprechende Strahlen, die einen Punkt gemeinsam haben: Q_1, Q_2, Q_3. Die bei den zugehörigen Ebenenbüscheln sich ergebenden Geraden g gehen bzw. durch diese Punkte, so daß dieselben auf der Schnittkurve ΠF^2 liegen. Durch sie gehen alle r^3.

Ferner die drei Kurven R^3_{01}, R^3_{02}, R^3_{12} zerfallen (Nr. 375) je in einen Kegelschnitt in Π, der ersichtlich durch Q_1, Q_2, Q_3 geht, und eine ihn treffende Gerade l; in den Punkten des Kegelschnittes treffen sich entsprechende Strahlen der beiden Bündel, die in Π liegen, in denen von l andere entsprechende Strahlen. So erhalten wir zunächst drei Geraden l_{01}, l_{02}, l_{12} der andern Regelschar von F^2. Wenn die Ebenenbüschel um die Strahlen x, x', x'' von $(O, \Pi), \ldots$ zu der Gerade g geführt haben, so sind in je zwei homologen Ebenen von x und x' zwei entsprechende Geraden enthalten, die sich auf l_{01} schneiden, die Schnittstrahlen mit den in l_{01} sich begegnenden homologen Ebenen; beide Ebenenbüschel sind also zur Punktreihe auf l_{01} perspektiv, und der dritte Büschel x'' ruft eine konjektive Punktreihe hervor; von den beiden Koinzidenzen liegt die eine in Π, die andere auf g. Damit ist erkannt, daß l_{01} und ebenso l_{02}, l_{12} von allen g getroffen werden.

Erweitern wir nun die drei Bündel O, O', O'' zum Netze von Bündeln, welche alle dann die Π entsprechend gemeinsam haben, so ergibt sich das Netz der zugehörigen Kurven R^3, die je aus einem Kegelschnitte in Π durch die drei Punkte Q_1, Q_2, Q_3 und einer Gerade aus der l-Schar bestehen; es ist immer diejenige, welche durch den vierten Schnitt des Kegelschnittes mit der Kurve ΠF^2 geht, so daß jede l ∞^2 Kegelschnitte ergänzt.

388 Betrachten wir endlich den Fall von drei konzentrischen kollinearen Bündeln O, O', O''. Wir wissen aus Nr. 200, daß es dann einen Kegel 3. Ordnung aus dem gemeinsamen Scheitel gibt, in dessen Kanten entsprechende Ebenen zusammenlaufen; er ist das Erzeugnis, welches eben so zustande kommt, daß im allgemeinen entsprechende Ebenen nur den Scheitel gemeinsam haben, ∞^1 Tripel aber eine ganze Gerade. In dieser Kantenreihe befinden sich ∞^2 Tripel, welche die Kurven r^3 vorstellen; in je drei entsprechenden Büscheln der Bündel gibt es drei Tripel von homologen Ebenen, denen eine Gerade gemeinsam ist. Und zwei Kanten des Kegels bestimmen eindeutig die dritte im Tripel; denn laufen in jene ξ, ξ', ξ'', bzw. η, η', η'' zusammen, so handelt es sich um die Büschel $\xi\eta$, $\xi'\eta'$, $\xi''\eta''$, das dritte Tripel, zu dem sie führen, und seine Konkurrenzkante.

Das Erzeugnis R^3_{01} der beiden Bündel O, O' ist das Tripel der drei Koinzidenz-Geraden; denn ihre Punkte allein sind Schnittpunkte entsprechender Strahlen, und die Kongruenz der Doppelsekanten der ausgearteten kubischen Raumkurve besteht aus den Strahlen des Bündels — denn in jedem schneiden sich zwei homologe Ebenen — und den Geraden in den Koinzidenzebenen. Jede Koinzidenzgerade von O, O' hat eine entsprechende Gerade in O'' und die Ebene, welche beide verbindet, als Ebene von O'' betrachtet, trifft sich in ihr mit den entsprechenden in O, O'. So kommen diese drei Tripel auf den Kegel, und ebenso die übrigen Tripel, wenn die drei Bündel zum Netze erweitert und in Reihen gegliedert werden, jede mit drei Koinzidenzgeraden[1]).

Der Kegel wird auf diese Weise mit zwei Systemen von ∞^2 Kantentripeln erfüllt. Jede zwei Kanten des Kegels bestimmen auch ein Tripel der zweiten Art; fassen wir die dritte Schnittkante ihrer Verbindungsebene als Konkurrenzgerade homologer Ebenen aus allen Bündeln des Netzes auf, so ist jede Ebene durch sie ∞^1 Bündeln des Netzes, die eine Reihe bilden, entsprechend gemein und die beiden

---

1) Schneidet man ein Netz kollinearer Bündel, die eine F^3 erzeugen, mit einer Ebene, so hat man ein Netz von kollinearen Feldern, welche ineinander liegen; perspektiv darüber können wir ein Netz von konzentrischem kollinearen Bündeln stellen. Wir kommen jedoch auf eine selbständige Konstruktion dieser Gebilde später zu sprechen.

andern Schnittkanten der Ebene sind die Koinzidenzgeraden der Reihe, so auch die gegebenen Kanten.

Zwei entsprechende Büschel aus zweien der Bündel des Netzes erzeugen einen Kegel 2. Grades, der durch das Tripel der Koinzidenzgeraden der Reihe der Büschel geht; die drei weiteren Schnittkanten sind Geraden, durch die auch die entsprechenden Ebenen aus einem dritten Bündel gehen. Folglich liegen zwei Tripel verschiedener Art stets auf einem Kegel 2. Grades, wie allgemein eine r^3 und eine R^3 auf einer Fläche zweiten Grades.

Zwei weitere Erzeugnisse dreier kollinearer Bündel, die Komplexe, welche durch die Regelscharen $[xx'x'']$ und $(xx'x'')$ entstehen, werden später besprochen werden.

Es seien ein Feld Σ und ein Bündel S', welche kollinear sind, 389
gegeben. Sie führen zu zwei Örtern von ∞^3 Strahlen, also Komplexen, die jedoch identisch sind. Jeder Punkt X des Feldes liefert ∞^1 von ihm ausgehende Strahlen, welche die entsprechende Gerade x' im Bündel treffen, also in der Ebene Xx' liegen und daher einen Büschel bilden; ebenso enthält jede Ebene ξ' des Bündels ∞^1 Strahlen, welche der entsprechenden Gerade x begegnen; sie bilden ebenfalls einen Büschel um den Punkt $\xi' x$. Jeder Büschel der einen Art ist aber ein Büschel der andern Art. Nennen wir die vorherige Ebene Xx' des Bündels η', so liegt, weil x' mit ihr inzidiert, der x' entsprechende Punkt X auf der entsprechenden Gerade y, und X ist $\eta' y$; der Strahlenbüschel um X in Xx' ist der Strahlenbüschel in η' um $\eta' y$; und ähnlich umgekehrt. Wir haben es also nur mit einem Komplexe zu tun; welches ist sein Grad oder wieviele von seinen Strahlen gehören zu einem gegebenen Strahlenbüschel (O, ω)? Der Strahlenbüschel (S', η'), welcher in der Kollineation der Punktreihe auf $y = \Sigma\omega$ entspricht, ist zu dieser projektiv und damit auch zu (O, ω). Von den Strahlen des Büschels (O, ω) treffen zwei die entsprechenden in (S', η'), nämlich in den Koinzidenzpunkten der konjektiven Punktreihen auf $\omega\eta'$, welche diese projektiven Büschel einschneiden. Diese Strahlen von (O, ω) gehen durch einen Punkt von Σ und treffen den ihm entsprechenden Strahl in S', gehören also zum Komplexe.

Liegt also ein Feld Σ und ein Bündel S' vor, die zueinander kollinear sind, so erzeugen die Strahlen, welche mit entsprechenden Elementen inzidieren und zwar zugleich mit zwei Paaren entsprechender Elemente: einem Punkte von Σ und seinem entsprechenden Strahle in S', einem Strahle von Σ und seiner entsprechenden Ebene in S', einen Komplex 2. Grades.

Dieser Komplex ist der tetraedrale, den wir in Nr. 237 besprochen haben. In der Tat, der Bündel bewirkt in der Ebene Σ ein zu ihm perspektives und daher zu dem gegebenen kollineares

Feld. Es seien U, V, W die sich selbst entsprechenden Punkte dieser ebenen Kollineation. Sind X, X' irgend zwei entsprechende Punkte derselben, so ist (Nr. 290) das Doppelverhältnis $X(X', U, V, W)$ konstant, folglich, wenn g ein Strahl des Komplexes ist, der vom Punkte X nach dem entsprechenden Strahl $x' = S'X'$ geht, auch das Doppelverhältnis $g(X', U, V, W)$. Die Ebene gX' ist aber gx' oder gS'; daher ist das Doppelverhältnis $g(S', U, V, W)$ für alle Strahlen des Komplexes konstant, dieser also ein tetraedraler[1]).

Das Tetraeder wird gebildet durch den Scheitel des Bündels und die drei Koinzidenzpunkte der Kollineation im Felde bzw. durch die Ebene des Feldes und die drei Koinzidenzebenen der Kollineation im Bündel. Man bestätigt leicht, daß alle Strahlen der vier Bündel und der vier Felder zum Komplexe gehören.

Wenn ein Feld Σ zu zwei Bündeln S', S'' kollinear ist, so geht von jedem Punkte X von Σ ein Strahl aus, welcher die beiden entsprechenden Strahlen x', x'' trifft. Alle diese Strahlen erzeugen die Kongruenz 4. Ordnung, 3. Klasse, welche den zu Σ und S' und zu Σ und S'' gehörigen tetraedralen Komplexen, außer dem Strahlenfelde in Σ, gemeinsam ist. Die drei weiteren Strahlen aus jedem Punkte von Σ fallen in diese Ebene und ergeben sich folgendermaßen. Werden die beiden Bündel S', S'' mit Σ geschnitten, so entstehen drei kollineare Felder in dieser Ebene, und es gibt ∞^1 Geraden, welche drei entsprechende Punkte enthalten: einen Punkt X des gegebenen Feldes und die Spuren von x', x''; also sind diese Geraden Strahlen der Kongruenz; sie umhüllen eine Kurve 3. Klasse (Nr. 377), weshalb die Ebene Σ für die Kongruenz singulär vom 3. Grade heißt. Die Bündelscheitel S', S'' sind singulär vom 2. Grade; d. h. von jedem geht ein Kegel 2. Ordnung an die Kongruenz, derjenige, der zum andern tetraedralen Komplexe gehört.

In dualer Weise hat man bei zwei Feldern und einem Bündel, welche kollinear sind, in jeder Ebene des Bündels einen Strahl, welcher die entsprechenden Geraden der Felder trifft. Alle diese ∞^2 Strahlen erzeugen eine Kongruenz 3. Ordnung, 4. Klasse.

§ 59. Erzeugnisse korrelativer Gebilde. Fläche 2. Grades und Hirstscher Komplex.

390 Wir wenden uns jetzt zum Erzeugnis zweier korrelativer Bündel O, O'. Schneiden wir zunächst jeden Strahl x von O mit der entsprechenden Ebene ξ' von O' in X, so fällt der Strahl x' von O', der nach X geht, in die Ebene ξ', und daher geht seine entsprechende

1) Liniengeometrie, Bd. I, Nr. 258.

Ebene ξ in O durch x und durch X; dieser Punkt ist sowohl $x\xi'$ als $\xi x'$. Wir erhalten dasselbe Erzeugnis, ob wir die Strahlen von O oder die von O' je mit den entsprechenden Ebenen in andern Bündel schneiden.

Auf einer beliebigen Gerade m ergeben sich zwei konjektive Punktreihen, die eine ist perspektiv zu dem sie aus dem einen Scheitel, etwa O, projizierenden Strahlenbüschel, die andere zu dem Ebenenbüschel von O', der ihm entspricht. Die beiden Koinzidenzen lehren, daß der Ort der Punkte X eine Fläche 2. Grades ist. Das Erzeugnis zweier korrelativer Bündel ist eine Fläche 2. Grades F^2 und und zwar dieselbe, mag man die Strahlen des einen oder anderen mit den entsprechenden Ebenen des jeweiligen zweiten schneiden[1]). Daß die Scheitel der Fläche angehören, ist unmittelbar klar.

Vier Paare entsprechender Elemente a, α'; b, β'; c, γ'; d, δ', durch welche die Korrelation festgelegt wird, führen unmittelbar zu 12 Punkten der erzeugten Fläche, nämlich: O, O'; $a\alpha'$, $b\beta'$, $c\gamma'$, $d\delta'$; ferner $(ab, \alpha'\beta')$, $(ac, \alpha'\gamma')$, $\ldots (cd, \gamma'\delta')$.

Drei Paare führen zu acht Punkten, die man leicht als assoziierte erkennt, weil drei Ebenenpaare durch sie gehen. Wir werden bald erkennen, daß dann ∞^2 Korrelationen möglich sind; sie führen zu den Flächen des Netzes durch diese acht Punkte.

Lassen wir die Gerade m in die Schnittlinie der beiden Ebenen ξ', ξ fallen, welche den Strahlen x und x' nach dem Punkte X der Fläche entsprechen, so wird die Konjektivität eine solche ausgeartete, daß X in beiden Reihen der singuläre Punkt ist. Denn m trifft in X die Axe des Ebenenbüschels x', der dem Strahlenbüschel (O, ξ) entspricht, also alle Ebenen desselben in dem nämlichen Punkte X, so daß allen Punkten der ersten Reihe X in der zweiten korrespondiert; und ebenso umgekehrt. Oder auch, dem Strahle x oder x' entspricht die Ebene ξ', bzw. ξ, deren Schnitt mit m unbestimmt ist. Daher ist X auch die einzige Koinzidenz. Die Schnittlinie $\xi\xi'$ der Ebenen, welche den nach einem Punkte X der Fläche gehenden Strahlen entsprechen, berührt in ihm die Fläche.

Der Schnitt $x\xi'$ eines Strahles x von O ist der zweite Schnittpunkt, außer O, mit F^2; auf jedem Strahle des Büschels von O, welcher dem gemeinsamen Ebenenbüschel um $o = OO'$ als Büschel von O' enspricht, vereinigt sich der zweite Schnitt mit O, so daß der Strahl die Fläche in O berührt.

Die beiden Ebenen τ, τ' der Bündel, welche dem gemeinsamen Strahle o entsprechen, berühren die Fläche in den Scheiteln.

1) Seydewitz, Archiv f. Math. u. Phys. (1. Reihe) Bd. 9, S. 158.

Es sei x ein Strahl des Büschels (O, τ); ihm entspricht die Ebene $\xi' \equiv \eta$ von o; die ihn enthaltende Ebene dieses Büschels um o, ist (in der Korrelation) jener Ebene konjugiert.

Der η entsprechende Strahl y' von (O', τ') liegt in einer dritten Ebene durch o, welche der Ebene $\xi' \equiv \eta$ im anderen Sinn konjugiert ist. Der Ebenenbüschel o wird in sich projektiv, mit konjugierten Ebenen als entsprechenden, aber im allgemeinen nicht involutorisch. Die beiden Koinzidenzen ω, ω_1 sind sich selbst konjugiert und ersichtlich die einzigen Ebenen der Bündel, für welche das gilt.

Weil sie sich selbst konjugiert sind, so geht jede von ihnen durch beide entsprechenden Strahlen. Es seien g_0, l_0 die zu ω, ω_1 polaren und in diesen Ebenen gelegenen Strahlen von (O, τ); die in (O', τ') seien l_0', g_0'; wir werden gleich erkennen, daß sie so benannt werden müssen.

In jeder Ebene ξ des Bündels O entsteht der Schnitt der F^2 durch zwei projektive Strahlenbüschel, von denen der zweite der Schnitt des dem (O, ξ) entsprechenden Ebenenbüschels x' ist.

Geht ξ etwa durch g_0, so werden diese Büschel perspektiv, indem g_0 sich selbst entspricht als Schnitt von ω, welche g_0 korrespondiert; das Erzeugnis zerfällt in g_0 und die Perspektivitätsaxe l. Die Axe x' des den zweiten Büschel einschneidenden Ebenenbüschels liegt in ω, weil ξ durch den polaren Strahl g_0 geht.

Wenn y ein Strahl von (O, ξ) ist, so geht die ihm entsprechende Ebene η' dieses Büschels durch den Strahl von (O', τ'), welcher zu der y enthaltenden Ebene von o polar ist und in der dieser Ebene konjugierten Ebene von o liegt. Also treffen y und η' und auch der Strahl $\mathfrak{y}'$, den η' in ξ einschneidet, die Schnittlinie $\xi\tau'$ in denselben Punkten, in denen sie von den genannten konjugierten Ebenen durch o geschnitten wird; oder die beiden perspektiven Büschel in ξ, welche (g_0, l) erzeugen, schneiden in die Gerade $\xi\tau'$ dieselben konjektiven Punktreihen ein, wie der Ebenenbüschel o durch seine konjugierten Ebenen. Die Koinzidenzen liegen auf g_0 und l; die auf l muß daher in ω_1 liegen.

Verbinden wir einen beliebigen Punkt der Fläche mit g_0 durch eine Ebene, so muß er auf der l dieser Ebene liegen. Ebenso gibt jede Ebene durch l_0 eine Gerade g, und durch jeden Punkt der Fläche geht eine l und eine g. Alle Geraden l treffen die g_0 und sind windschief gegeneinander, weil nicht drei Geraden der Fläche in derselben Ebene liegen können, und weil die durch einen Punkt von F^2 gehenden g und l den vollen Schnitt ihrer Ebene bilden, so folgt, daß jede g jeder l begegnet. Wir erhalten die beiden verbundenen Regelscharen auf F^2; sie sind reell oder imaginär, je nachdem ω und ω_1 es sind. Man sieht auch jetzt, daß die in ω liegende Gerade des Büschels

(O', τ'), weil sie g_0 trifft, l_0' und die in ω_1 liegende g_0' genannt werden muß.

Die vier Geraden g_0, l_0, g_0', l_0' fallen in die entsprechenden Ebenen und sind die einzigen mit dieser Eigenschaft.

Auf jeder der F^2 ganz angehörigen Geraden sind die konjektiven Punktreihen, die durch einen Strahlenbüschel des einen Bündels und den entsprechenden Ebenenbüschel im andern eingeschnitten werden, identisch.

Ist X ein beliebiger Punkt der Fläche, so berührt, wie wir oben fanden, in ihm die Schnittlinie der beiden Ebenen, welche den Strahlen OX, $O'X$ entsprechen; also geht die Berührungsebene von X durch sie.

Ein beliebiger Punkt Z des Raums bestimmt zwei Strahlen OZ, 391
$O'Z$ und die Schnittlinie z der beiden ihnen entsprechenden Ebenen aus O', O; ist Z_1 ein Punkt auf ihr, so geht die ihm zugehörige z_1 durch Z. Und auf der Verbindungslinie ZZ_1 entstehen zwei involutorische konjektive Punktreihen, eingeschnitten durch einen Strahlenbüschel des einen Bündels und den entsprechenden Ebenenbüschel des anderen; weil Z und Z_1 sich in beiderlei Sinne entsprechen. Doppelpunkte sind die Schnitte mit F^2. Jeder Punkt unserer Gerade als Z hat daher einen seiner Z_1 auch auf ihr, und die Gerade kann aus jedem ihrer Punkte heraus konstruiert werden. Folglich sind die durch einen Punkt Z gehenden Geraden dieser Art diejenigen, die ihn mit den sämtlichen ∞^1 ihm zugeordneten Z_1 verbinden, den Punkten von z. Sie bilden also einen Strahlenbüschel und alle ∞^{3+1-1} derartigen Strahlen einen Strahlenkomplex 1. Grades (Nr. 255) oder ein Gewinde, wie ich diesen Komplex kürzer zu benennen vorgeschlagen habe (vgl. Nr. 533). Den Strahlenbüschel desselben in einer beliebigen Ebene werden wir bald erkennen.

Jede Verbindungslinie zweier Punkte Z und Z_1, welche zugleich mit zwei entsprechenden Elementen (von O, O') der einen und zweien der andern Art inzidieren, trägt eine Involution von solchen Punktepaaren. Alle diese Geraden erzeugen ein Gewinde.

Die Punkte Z von F^2 liegen auf der zugehörigen Gerade z; für sie wird deshalb die eben besprochene Konstruktion des Komplex-Strahlenbüschels, weil dann die Ebene Zz unbestimmt wird, zunächst unsicher; wir werden später die Ebene genauer bestimmen.

In einer Ebene E rufen die beiden korrelativen Bündel 392
O, O' eine ebene Korrelation hervor. Die Punkt-Kernkurve K^2 derselben, der Ort der Punkte, welche mit der einen und dann auch mit der anderen Polare inzidieren (Nr. 306), ist ersichtlich die Schnittkurve mit der erzeugten Fläche F^2. Die Geraden-Kernkurve Γ_2 wird von den Spuren der Ebenen des einen oder anderen

Bündels eingehüllt, welche sich mit ihren entsprechenden Strahlen auf E schneiden.

Die Ebene E macht die beiden Bündel O, O' kollinear in perspektiver Lage; das führt zu einer zweiten Kollineation zwischen den Bündeln, in der solche Elemente sich entsprechen, denen durch die Korrelation Elemente zugeordnet sind, die in der perspektiven Lage einander korrespondieren. Die durch diese Kollineation erzeugte kubische Raumkurve liefert in ihren in E gelegenen Punkten und Doppelsekanten die ausgezeichneten Elemente U, V, W; u, v, w der obigen ebenen Korrelation. U, V, W sind solche Punkte von E, daß den Strahlen aus O, O' nach ihnen in der Korrelation der Bündel Ebenen entsprechen, welche sich auf E schneiden: in u, v, w. In U, V berühren sich K^2, Γ_2 und u, v sind die zugehörigen Tangenten; W und w sind Berührungspol und Berührungssehne dieser sich doppelt berührenden Kegelschnitte. In W laufen alle Strahlen zusammen, welche doppelt konjugierte Punkte der ebenen Korrelation verbinden (Nr. 307); der Büschel um W ist daher der zum obigen Gewinde gehörige Strahlenbüschel in E.

Ferner ist (Nr. 318) der vierte harmonische Strahl in bezug auf die beiden Polaren eines Punktes von E, zugeordnet dem Strahle nach ihm aus deren Schnittpunkte, die Polare des Punktes in bezug auf die Kernkurve K^2. Folglich ist die Ebene von einem Punkte Z von E nach der Schnittlinie z der beiden den Strahlen OZ, $O'Z$ korrespondierenden Ebenen, d. i. die Ebene des Strahlenbüschels aus Z an das Gewinde, harmonisch zugeordnet in bezug auf diese beiden Ebenen der Ebene aus z nach der Polare von Z nach K^2. Fällt Z auf K^2, so wird diese Polare die Tangente von Z und, weil z die F^2 in Z berührt, diese Ebene die Berührungsebene von F^2 in Z. Und so ergibt sich für einen Punkt Z von F^2 nun auch die Ebene des Strahlenbüschels des Gewindes als nicht mehr unbestimmt, sondern als die vierte harmonische Ebene, die der Berührungsebene der F^2 zugeordnet ist in bezug auf die beiden den Strahlen OZ, $O'Z$ entsprechenden Ebenen.

Verändert man die durch den beliebigen Punkt Z gehende Ebene E, so enthält die vierte harmonische Ebene immer die Polare von Z nach der jeweiligen Schnittkurve K^2.

Die Ebene, welche von einem beliebigen Punkte Z harmonisch getrennt ist durch die beiden den Strahlen OZ, $O'Z$ in der Korrelation der Bündel entsprechenden Ebenen, ist die Polarebene von Z in bezug auf die erzeugte Fläche F^2.

Sehen wir nun zu, wie in einer Ebene E, welche durch eine Gerade, etwa g, der Fläche F^2 gelegt ist, die zweite Gerade von K^2 sich ergibt und wie die Kernkurve Γ_2 sich gestaltet. Den Ebenen Og, $O'g$ mögen die Strahlen $O'A'$, OB entsprechen, wo A', B die

Schnitte mit E sind. Weil g der Fläche F^2 angehört, so begegnen sich in jedem Punkte $X \equiv Y'$ von ihr Strahlen der Büschel in jenen Ebenen mit den entsprechenden Ebenen ξ', η aus $O'A'$, OB. Die Spuren dieser Ebenen bilden also die Büschel A', B, und dies Punktepaar $A'B$ stellt uns die Kernkurve Γ_2 dar. Sie muß aber auch bei der zweiten Gerade l sich ergeben. Sei $D \equiv A'$, $C' \equiv B$, so werden wir es dabei mit den Büscheln OD, $O'C'$ zu tun haben. Die Ebene $ODX = \zeta$ geht durch OX, also liegt ihr entsprechender Strahl z' in ξ', welche E in $A'X \equiv DX$ schneidet; folglich liegt der Schnittpunkt $L' = \zeta z'$ auf DX, mithin auf E und infolgedessen auf l. Alle diese in E gelegenen Schnittpunkte müssen in der Ebene des Strahlenbüschels von O' liegen, der dem Ebenenbüschel OD entspricht, und ihr Schnitt mit E ist die zweite Gerade l.

Die Ebene ODB, die durch die Doppellinie $A'B \equiv DC'$ unseres Punktepaars geht, deren Schnitt, mit g, U sei, geht durch OB, also liegt ihr entsprechender Strahl in $O'g$; der Begegnungspunkt, der auf l liegen muß, kann also nur U sein. Der Doppelpunkt des Geradenpaars $K^2 = gl$ liegt auf der Doppellinie des Punktepaars Γ_2; dies repräsentiert die doppelte Berührung.

Aber der Büschel $O'C'$ muß auch zu dieser zweiten Gerade l führen. Der Punkt L', der sich bei dem beliebigen Punkte $X \equiv Y'$ von g ergab und daher ein beliebiger Punkt von l ist, der Schnittpunkt der Ebene $ODX \equiv \zeta$ und ihres entsprechenden Strahls $z' = O'L'$, sei auch mit M bezeichnet. Wir schneiden $C'L' \equiv BM$ mit g in $Z \equiv T'$, in welchem der Strahl $O'T'$ und die entsprechende Ebene OBZ sich begegnen. Die Ebene $O'C'T'$ geht durch $O'T'$ und durch $O'L'$, also liegt ihr entsprechender Strahl in OBZ und in ODX; folglich ist er der Strahl von O nach dem Schnittpunkte $M \equiv L'$ von BZ und DX.

Während also in den Punkten von g sich Strahlen aus O und O' mit den entsprechenden Ebenen aus den Büscheln $O'A'$, OB schneiden, begegnen sich in denjenigen von l Strahlen aus O, O' mit den entsprechenden Ebenen aus den Büscheln $O'C'$, OD; wobei $C' \equiv B$, $D \equiv A'$ ist.

Im Doppelpunkte von K^2 vereinigen sich U, V, in der Doppellinie von Γ_2 u, v. Damit W, w Pol und Polare in bezug auf beide ausgearteten Kurven sind, muß W der vierte harmonische Punkt zum Doppelpunkte des Geradenpaars in bezug auf die beiden Punkte des Punktepaars und w der vierte harmonische Strahl zur Doppellinie des Punktepaars in bezug auf die beiden Geraden des Geradenpaars sein[1]).

Die beiden korrelativen Bündel O, O' führen aber noch zu einem andern Erzeugnisse. Zwei konjugierte Elemente sind stets gegenseitig 393

1) Math. Annalen, Bd. 19, S. 467.

konjugiert; und da jede Ebene von O oder O' ∞^1 konjugierte Ebenen im andern Bündel hat, so erhalten wir ∞^3 Paare konjugierter Ebenen und daher ∞^3 Schnittlinien, welche einen Komplex erzeugen[1]). Ein Punkt P bestimmt zwei Strahlen in den Bündeln; die Büschel um sie sind projektiv mit konjugierten Ebenen als entsprechenden: jeder dieser Büschel ist perspektiv zu dem Strahlenbüschel, welcher in der Korrelation dem andern entspricht. Sie erzeugen den zum Komplexe gehörigen Kegel (P). Der Komplex ist also 2. Grades. Die Komplexkurve (Π) in einer Ebene Π ist die oben besprochene Geraden-Kernkurve Γ_2 der ebenen Korrelation, welche die Bündel in Π hervorrufen. Denn jede Ebene ξ von O, welche von einer zu ihr konjugierten aus O' in einer in Π befindlichen Gerade g getroffen wird, wird auch von dem entsprechenden Strahle x' auf dieser Gerade g getroffen; so daß g, als Spur der ξ in Π, den ihr in jener Korrelation entsprechenden Punkt, die Spur von x', enthält, also Tangente von Γ_2 ist.

Die beiden Strahlenbündel O, O' gehören ganz zum Komplexe; denn in jedem Strahl von O schneidet sich die Ebene aus dem gemeinsamen Büschel um OO', die ihn enthält, insofern sie zu O' gehört, mit einer von den konjugierten Ebenen. Folglich zerfällt in jeder Ebene von O oder O' die Komplexkurve in zwei Strahlenbüschel, von denen der eine den Bündelscheitel, der andere den Schnittpunkt mit dem entsprechenden Strahle in O' oder O zum Scheitel hat, durch den ja alle konjugierten Ebenen gehen. Eine Ebene, deren Komplexkurve (in einem Komplexe 2. Grades) in ein Punktepaar (Strahlenbüschel-Paar) ausartet, heißt eine singuläre Ebene des Komplexes. Außer den Bündelebenen sind auch die Tangentialebenen der durch die korrelativen Bündel O, O' erzeugten Fläche F^2 singulär; denn wir fanden, daß auch in diesen die beiden Kernkurven der ebenen Korrelation ausarten, insbesondere Γ_2, was uns jetzt mehr interessiert.

Ebenso haben wir singuläre Punkte, deren Komplexkegel in zwei Strahlenbüschel zerfällt. Jeder Punkt von F^2 ist ein solcher Punkt, weil in ihm sowohl eine Ebene von O, als eine von O' sich mit dem entsprechenden Strahle begegnet; was zu einem Büschel von Komplexstrahlen in der einen und der andern Ebene um den Punkt führt. Das Zerfallen kommt hier dadurch zustande, daß die beiden erzeugenden Ebenenbüschel um die im Punkte sich schneidenden Bündelstrahlen sich in ausgearteter Projektivität befinden, und zwar so, daß die beiden entsprechenden Ebenen die singulären Ebenen sind und jede vom andern Ebenenbüschel in einem Strahlenbüschel geschnitten wird.

---

1) Hirst in: Collectanea mathematica in memoriam Chelini, S. 51; Proceedings of the London Mathematical Society, Bd. 10, S. 131.

Es gibt im Büschel OO' zwei sich selbst konjugierte Ebenen ω und ω_1, die Berührungsebenen durch OO' an die Fläche F^2. Jede Gerade in einer solchen Ebene ist daher Schnittlinie zweier identischer konjugierter Ebenen, also Komplexstrahl; der Komplex enthält mithin auch zwei volle Strahlenfelder ω und ω_1, und jeder Punkt von ω und ω_1 ist singulär: der eine Strahlenbüschel fällt immer in ω, bzw. ω_1. Die beiden erzeugenden projektiven Ebenenbüschel sind diesmal perspektiv, und der zweite erzeugte Strahlenbüschel liegt in der Perspektivitätsebene.

Es sei (S, σ) ein Strahlenbüschel des Komplexes, der nicht zu einem der Bündel O, O' oder zu einem der Felder ω, ω_1 gehört; dann liegt sein Scheitel entweder auf ω oder ω_1, oder auf F^2 und seine Ebene geht durch O oder O', oder berührt F^2. In der Tat, der Komplexkegel (S) muß zerfallen in (S, σ) und einen zweiten Strahlenbüschel. Dieser ist das Erzeugnis der beiden projektiven Ebenenbüschel OS, $O'S$, in denen konjugierte Ebenen entsprechend sind. Entweder kommt das Zerfallen durch perspektive Lage zustande: dann wird die gemeinsame Ebene $OO'S$ sich selbst konjugiert; der Scheitel S liegt in einer der Ebenen ω, ω_1, und in diese fällt der zweite Strahlenbüschel. Oder das Zerfallen wird durch ausgeartete Projektivität bewirkt; es gibt in jedem der beiden Büschel eine singuläre Ebene, welcher alle Ebenen des andern Büschels konjugiert sind, so daß die Axe desselben der ihr entsprechende Strahl ist. Im Punkte S treffen also OS und $O'S$ ihre entsprechenden Ebenen, und er ist ein Punkt von F^2. Die beiden singulären Ebenen, welche die von S ausgehenden Strahlenbüschel enthalten, sind Ebenen der Bündel O, O'.

Umgekehrt, wenn die Ebene σ zu einem der beiden Bündel O, O', etwa zu O, gehört, so entsteht der nicht zu O gehörige Büschel (S, σ) des Komplexes dadurch, daß σ von allen ihr konjugierten Ebenen geschnitten wird; nach S geht der entsprechende Strahl. Und die Projektivität zwischen den Ebenenbüscheln OS, $O'S$ ist ausgeartet: mit den beiden diesen Strahlen entsprechenden Ebenen als singulären.

Im andern Falle aber trifft sich in jedem Strahle x von (S, σ) eine andere Ebene von OS je mit der konjugierten in $O'S$, die sich auch ändert: die Projektivität ist nicht ausgeartet; da aber ein Strahlenbüschel erzeugt wird, muß perspektive Lage stattfinden; die Ebene $OO'S$ ist sich selbst konjugiert; folglich liegt S in einer der Ebenen ω, ω_1. Wenn in x sich zwei konjugierte Ebenen schneiden, so wird diese Gerade auch von den beiden Strahlen getroffen, die den beiden Ebenen in der Korrelation entsprechen. Und die beiden Treffpunkte sind Punkte des Schnitts der Ebene σ mit F^2. Die beiden entsprechenden Strahlen bewegen sich aber in den Strahlenbüscheln von O' und O, welche den Ebenenbüscheln OS, $O'S$ entsprechen, die Treffpunkte also auf den Geraden, in denen σ von den Ebenen dieser

Büschel geschnitten wird. Die Ebene σ schneidet F^2 in einem Geradenpaare und ist Berührungsebene.

Also gilt für die Scheitel und Ebenen der Strahlenbüschel (S, σ) oder für die singulären Punkte und Ebenen des Komplexes folgendes:

Die singulären Punkte liegen entweder auf ω, ω_1 oder auf F^2. Im ersten Falle fällt der eine Strahlenbüschel in die Ebene ω, ω_1, die Ebene des andern berührt F^2. Im zweiten Falle sind die beiden Büschel in Ebenen der Bündel O, O' gelegen.

Die singulären Ebenen gehören entweder zu den Bündeln O, O' oder berühren F^2. Im ersteren Falle ist einer der Büschel auch im Bündel befindlich, der Scheitel des andern liegt auf F^2. Im andern Falle liegen die beiden Scheitel in ω und ω_1.

Die singuläre Fläche des Komplexes, der Ort ihrer singulären Punkte und Ebenen[1]), besteht aus der Fläche F^2 und dem Ebenen-Punkte-Paar $(\omega, \omega_1; O, O')$, ist also 4. Ordnung und 4. Klasse; wie dies für einen Komplex 2. Grades erforderlich ist.

394 Den gemeinsamen Strahl der beiden Komplex-Strahlenbüschel aus einem singulären Punkt oder in einer singulären Ebene nennt man den diesem Punkte, dieser Ebene zugehörigen singulären Strahl.

Für die einem der beiden Bündel O, O' angehörigen singulären Ebenen gehört der singuläre Strahl ebenfalls dem Bündel an; und jeder Strahl des Bündels ist singulärer Strahl; denn eine von seinen Ebenen wird auf ihm vom entsprechenden Strahle getroffen; dadurch wird er in ihr Doppellinie des Komplex-Punktepaars; der eine Punkt desselben ist der Bündelscheitel, der andere Punkt ist der zweite Schnitt mit F^2. In einer singulären Ebene, welche F^2 berührt, ist das Geradenpaar, in dem sie F^2 schneidet, die Punkt-Kernkurve K^2, das Komplex-Punktepaar die Geraden-Kernkurve Γ_2 der durch die Bündel hervorgerufenen Korrelation: wir wissen, die Doppellinie des letzteren geht durch den Doppelpunkt des ersteren; d. h. der singuläre Strahl einer die F^2 berührenden singulären Ebene geht durch den Berührungspunkt und tangiert in ihm die Fläche F^2.

Für einen singulären Punkt, der in einer der Ebenen ω, ω_1 sich befindet, liegt der singuläre Strahl ebenfalls in derselben, und jeder Strahl dieser Ebene ist singulärer Strahl;

1) Die Identität der beiden Örter allgemein nachzuweisen, ist Sache der Liniengeometrie; vgl. meine Liniengeometrie, Bd. 3, Nr. 522 ff.

denn es geht durch ihn eine zweite Berührungsebene an F^2, von deren beiden singulären Punkten der eine auf ihm liegt.

Die beiden Strahlenbüschel aus einem Punkte S von F^2 liegen in den Ebenen, welche den Strahlen OS, $O'S$ entsprechen; wir wissen (Nr. 390), daß ihre Schnittlinie, der zu S gehörige singuläre Strahl, die Fläche F^2 in S berührt.

Wenn S und σ als Punkt und Berührungsebene von F^2 zusammengehören, so bekommen wir beidemal als singulären Strahl die nämliche Tangente. Denn seien g, l die beiden in S sich schneidenden Geraden der Fläche, welche in σ die Kernkurve K^2 bilden, so gehen (Nr. 392) die Strahlen in O', O, welche den Ebenen Og, $O'g$ entsprechen, durch die beiden Punkte S_1, S_2 von Γ_2, dem singulären Paare in σ, und die Strahlen in O, O', welche den $O'l$, Ol entsprechen, ebenfalls durch diese Punkte; dem Schnittstrahl $OS = (Og, Ol)$ entspricht daher die Ebene $O'S_1S_2$ und dem $O'S$ die Ebene OS_1S_2; S_1S_2, der singuläre Strahl von σ, ist also auch der singuläre Strahl von S.

Wir haben dreierlei singuläre Strahlen: die Strahlen von O, O', jeder einer gewissen Ebene des Bündels zugehörig, die Strahlen in ω, ω_1, jeder einem gewissen Punkt dieser Ebene zugehörig, und singuläre Strahlen, welche F^2 berühren, jeder sowohl dem Berührungspunkte, als der Berührungsebene zugehörig.

Wir wollen uns jetzt überzeugen, daß der Komplex und die Fläche 395
F^2 auch in dualer Weise durch zwei korrelative Felder in ω, ω_1 (falls diese reell sind) erzeugt werden kann.

Einem Punkte X von ω ordnen wir in ω_1 die Schnittgerade x_1 mit der Ebene des zweiten von ihm ausgehenden (nicht in ω gelegenen) Strahlenbüschels zu; er entsteht durch perspektive Lage der beiden Büschel konjugierter Ebenen OX, $O'X$ und liegt in der Perspektivitätsebene; diese berührt F^2.

Umgekehrt, einer Gerade x_1 von ω_1 ist der in ω gelegene singuläre Punkt X in der zweiten Berührungsebene σ von F^2, welche von x_1 außer ω_1 an sie geht, zugeordnet. Jeder von einem Punkte von x_1 ausgehende und nicht in ω_1 gelegene Komplex-Strahlenbüschel hat einen seiner Strahlen in dem Komplex-Büschel um X in σ; weil durch jeden Punkt von x_1 ein Strahl von (X, σ) geht und der erwähnte von dem Punkte ausgehende Strahlenbüschel alle nicht in ω_1 fallenden dem Komplexe angehörigen Strahlen enthält. Infolgedessen gehen die Ebenen aller dieser von den verschiedenen Punkten von x_1 ausgehenden Strahlenbüschel des Komplexes durch den Punkt X. Und in gleicher Weise erkennt man, daß, wenn X in ω sich auf einer Gerade x bewegt, dann die je von ihm ausgehenden Komplex-

Strahlenbüschel, die nicht in ω liegen und welche in ω_1 die entsprechenden Geraden x_1 einschneiden, sich in Ebenen befinden, welche alle durch den auf ω_1 gelegenen singulären Punkt der zweiten Berührungsebene aus x an F^2 gehen.

Damit ist erkannt, daß die beiden Felder ω und ω_1 korrelativ sind und daß die Ebenen, welche entsprechende Elemente verbinden, die Fläche F^2 umhüllen, so daß diese in dualer Weise entsteht als oben durch korrelative Bündel.

Der Tangentialkegel aus einem Punkte ist der Ebenen-Kernkegel der beiden korrelativen Bündel, welche aus ihm die beiden Felder projizieren.

Pol einer beliebigen Ebene ζ, in bezug auf F^2, ist der Punkt, der von ihr durch die beiden Punkte harmonisch getrennt wird, die den Schnittlinien $\zeta\omega$, $\zeta\omega_1$ je in der andern Ebene entsprechen. Insbesondere liegt der Mittelpunkt der Fläche in der Mitte zwischen denen der beiden Felder.

Ein beliebiger Strahl des Komplexes gehört zu dem nicht in ω gelegenen Komplex-Strahlenbüschel aus seinem Schnittpunkte X mit ω und trifft deshalb die ihm in dieser Felder-Korrelation zugeordnete Gerade x_1 in ω_1, verbindet also zwei konjugierte Punkte der beiden Felder; und der Komplex entsteht in dualer Weise zur ursprünglichen Erzeugungsweise; der Komplexkegel aus einem Punkte ergibt sich jetzt auch als Kernkegel einer Bündelkorrelation.

396 Der Komplex hat fünf ausgezeichnete Strahlen, nämlich die vier Geraden auf F^2, welche durch O und O' gehen: g_0, l_0, g_0', l_0' und von denen g_0, l_0' in ω, l_0, g_0' in ω_1 liegen, und die Gerade $o \equiv OO' \equiv \omega\omega_1$.

In der Korrelation der Bündel sind g_0 und l_0' die der Ebene ω, l_0 und g_0' die der Ebene ω_1 entsprechenden Strahlen, in der Korrelation der Felder sind g_0 und l_0 die dem Punkte O und l_0' und g_0' die dem Punkte O' entsprechenden Geraden. In jener hat jede Ebene durch g_0 ihren entsprechenden Strahl in ω, der sie also auf g_0 trifft; so daß g_0 die Doppellinie des Komplex-Punktepaars in der Ebene ist, von dem der eine Punkt O, der andere dieser Treffpunkt ist. Ebenso ist g_0, wie die duale Betrachtung zeigt, Doppellinie des Komplex-Ebenenpaars eines jeden Punktes auf ihr.

In jeder Ebene durch o liegen zwei Komplexbüschel mit den Scheiteln O, O'; die Doppellinie ist o. Ebenso sendet jeder Punkt von o zwei in ω, ω_1 befindliche Büschel aus, welche ebenfalls o zur Doppellinie haben.

Indem so für jeden Punkt und jede Ebene, welche mit einem der fünf ausgezeichneten Strahlen inzidieren, der Komplexkegel und die Komplexkurve so zerfällt, daß der Strahl die Doppellinie oder der zugehörige singuläre Strahl ist, hat jeder durch ihn gelegte Strahlenbüschel in ihm zwei vereinigte Strahlen mit dem Komplexe gemein. Deshalb sind die fünf Strahlen als Doppelstrahlen des Komplexes zu bezeichnen[1]).

Diejenigen singulären Strahlen des Komplexes, welche 397
die Fläche F^2 tangieren und zugleich zum Berührungspunkte und zur Berührungsebene gehören, erzeugen eine Kongruenz, deren Ordnung und Klasse dieselbe ist, wegen der beiden dualen Erzeugungen des Komplexes und der Fläche. Wir erinnern, ein solcher singulärer Strahl, gehörig zum Punkte S der Fläche, ist die Schnittlinie der beiden Ebenen, welche den Strahlen OS, $O'S$ entsprechen. Den Ebenen der beiden Bündel, die durch einen Punkt P gehen und daher durch OP, $O'P$, entsprechen Strahlen zweier Büschel; die Schnittlinie der Ebenen derselben hat mit F^2 zwei Punkte gemeinsam. Die Strahlen aus O und O' nach einem von ihnen entsprechen Ebenen durch $O'P$, OP, also mit einer durch P gehenden Schnittlinie; folglich ist unsere Kongruenz 2. Ordnung und, wie oben gesagt, auch 2. Klasse. Ihre Strahlen in einer beliebigen Ebene sind die beiden Geraden u, v der ebenen Korrelation in ihr, zugehörig als singuläre Strahlen zu den Punkten U, V, die ja auf der Kernkurve K^2 und daher auf F^2 liegen.

Die vollständige Kongruenz der singulären Strahlen besteht aus dieser Kongruenz, den beiden Strahlenbündeln O, O' und den beiden Strahlenfeldern ω, ω_1, ist also 4. Ordnung 4. Klasse; wie das für einen Komplex 2. Grades notwendig ist[2]).

Wann entsteht durch zwei korrelative Bündel ein Kegel 398
2. Grades? Es müssen dann g_0 und l_0, l_0' und g_0', also ω und ω_1 sich vereinigen.

Spitze des Kegels ist der Schnittpunkt der Kanten g_0, g_0', längs deren die Ebenen τ und τ' berühren, also der Schnittpunkt $\tau\tau'\omega$. Ist wieder l die zweite Gerade der Fläche in einer Ebene ξ durch g_0, so treffen g_0 und l, im allgemeinen Falle, die Gerade $\xi\tau'$, wo sie von ω und ω_1 geschnitten wird, also jetzt beide im Punkte V, in dem g_0 jene Gerade oder τ' trifft. Mithin laufen, wie es beim Kegel notwendig ist, alle l in den Punkt V zusammen.

Die von einem Punkte X von ω ausgehende Ebene, welche in ω_1 die in der Korrelation der Felder korrespondierende Gerade x_1 schneidet, war Tangentialebene der F^2, geht also, da beim Kegel der Bündel

1) Liniengeometrie, Bd. 3, Nr. 766 und 814—816. — Dort wird gezeigt, daß der Komplex auch entsteht durch alle Strahlennetze, deren Leitgeraden entsprechende Geraden sind in einer Regelschar und einem Strahlenbüschel, die einen Strahl gemeinsam haben und so projektiv sind, daß dieser Strahl sich selbst entspricht.

2) Liniengeometrie, Bd. 3, Nr. 524.

durch den Scheitel (doppelt gerechnet) den Inbegriff der Tangentialebene darstellt, stets durch die Spitze, schneidet daher in die mit ω identisch gewordene ω_1 eine Gerade x_1 ein, die durch X und V geht. Die Korrelation ineinander liegender Felder ist ausgeartet, derartig daß jedem Punkte des einen (oder andern) Feldes eine durch ihn und einen festen Punkt gehende Gerade korrespondiert; wir werden mit dieser sehr speziellen Ausartung zu tun haben. Die duale Erzeugung des Kegels versagt.

Liegen zwei korrelative Felder ω, ω_1 mit der Spezialität vor, daß die projektiven Punktreihen konjugierter Punkte auf der Schnittlinie nur ein Koinzidenzelement $O \equiv O'$ haben, so ist Erzeugnis der Inbegriff der ∞^2 Tangentialebenen eines Kegelschnitts; die konzentrischen Bündel um $O \equiv O'$ befinden sich in analoger ausgearteter Korrelation.

399 Bei zwei konzentrischen Bündeln in allgemeiner Korrelation ist Erzeugnis der Strahlen-Kernkegel, dessen Kanten in die entsprechenden Ebenen fallen, und bei in derselben Ebene gelegenen korrelativen Feldern die Geraden-Kernkurve.

Verschieben wir den einen von zwei korrelativen Bündeln O, O' parallel, bis er — als Bündel O_1' — mit dem andern O konzentrisch wird, so geht der Strahlen-Kernkegel, der sich dann ergibt, nach dem unendlich fernen Schnitt der F^2, des Erzeugnisses der Bündel in der ursprünglichen Lage. Wir wollen den ihn repräsentierenden Polarbündel herstellen, um im Falle einer elliptischen Fläche — für den es allein notwendig ist — zu entscheiden, ob jener Schnitt reell oder reell-imaginär, die Fläche ein zweimanteliges Hyperboloid oder ein Ellipsoid ist.

Nach Nr. 318 (auf den Bündel übertragen) hat man die Polarebene ζ in diesem Polarbündel zu einem Strahle $z \equiv x \equiv y_1'$ von $O \equiv O_1'$ folgendermaßen zu konstruieren: wenn ξ_1', η die beiden Polarebenen des Strahls sind (y_1' und ξ_1' sind parallel zu y' und ξ' von O'), so ist die Polarebene die vierte harmonische Ebene durch $\xi_1'\eta$ in bezug auf diese Ebenen ξ_1' und η zu der Ebene nach z. Wir können also ein Polardreikant abc herstellen; dazu werde ein weiteres Paar p, π von Polarstrahl und Polarebene konstruiert. Wenn dann die Ebenen bc, ca, ab von π in a', b', c', von $p(a, b, c)$ bzw. in a'', b'', c'' geschnitten werden, so hat man festzustellen, ob von den Involutionen

$$bc,\ a'a''; \quad ca,\ b'b''; \quad ab,\ c'c''$$

nur eine elliptisch ist oder alle drei; danach ist der Basiskegel und die unendlich ferne Kurve von F^2 reell oder reell-imaginär.

In Nr. 342 wurde angegeben, wie — direkt oder mit Hilfe eines orthogonalen Polarbündels und einer konzentrischen Homologie, deren Axe und Ebene normal sind — ein Polarbündel Π hergestellt werden kann, dessen Basis ein Rotationskegel ist.

Verschiebt man nun den einen der beiden vereinigten Bündel parallel, so ergibt sich als Erzeugnis der beiden nicht mehr konzentrischen korrelativen Bündel eine Rotationsfläche 2. Grades.

Allgemeiner aber wird die Konstruktion, wenn man zu dem Polarbündel Π eine nicht involutorische Korrelation ineinanderliegender Bündel herstellt, zu deren Strahlen-Kernkegel Π als Polarbündel gehört, und dann die Bündel durch Parallelverschiebung trennt.

In der Ebene ist (Nr. 309) gezeigt worden, wie dies geschieht, wofern der Kegelschnitt K^2 und die Elemente U, V, u, v reell sind. In unserm Falle sind die den letzteren Elementen entsprechenden Strahlen und Ebenen imaginär und der Kegel kann es auch sein. Wir werden uns später (Nr. 425) von dieser Beschränkung frei machen.

Die Verallgemeinerung ist notwendig; denn nicht jede zwei korrelativen Bündel, welche eine Rotationsfläche 2. Grades erzeugen, führen, parallel ineinander geschoben, zu einem Polarbündel.

Sehen wir aber zu, was wir mit unserm speziellen Falle erreicht haben.

Wenn zwei korrelative Bündel O und O' so beschaffen sind, daß sie, parallel ineinander geschoben, einen Polarbündel ergeben, so sind die beiden Ebenen τ und τ', welche der Verbindungslinie der Scheitel entsprechen, parallel, weil sie sich durch die Verschiebung vereinigen; folglich sind O und O' auf der erzeugten Fläche Endpunkte eines Durchmessers.

Jedes Polardreikant des Polarbündels liefert zwei parallele entsprechende Dreikante der korrelativen Bündel O, O', deren Korrespondenz so ist, daß jeder Kante des einen oder andern am zweiten diejenige Ebene entspricht, welche der parallelen Kante gegenüberliegt. Diese beiden Dreikante bilden ein Parallelopiped, dessen acht Ecken auf der Fläche liegen, weil in jeder zwei korrespondierende Elemente sich schneiden. Der Mittelpunkt dieses Parallelopipeds, d. i. der Konkurrenz- und Mittelpunkt der vier Diagonalen zwischen den Gegenecken, zeigt sich als Pol der unendlich fernen Ebene in bezug auf die Fläche, mithin als ihr Mittelpunkt, und der unendlich ferne Punkt von je vier parallelen Kanten als Pol der Ebene, welche sie halbiert; es ist dadurch ein Polartetraeder der Fläche entstanden, und die Kanten und Seitenflächen des Parallelopipeds, also auch die Kanten und Ebenen des Polardreikants des Polarbündels, von dem wir ausgingen, sind zu drei konjugierten Durchmessern der Fläche und ihren Ebenen parallel.

Wir legen am einfachsten denjenigen Polarbündel zu Grunde, welcher der Fläche um ihren Mittelpunkt zugeordnet ist, und verschieben die beiden korrelativen Bündel parallel, so daß die Scheitel in die Endpunkte eines Durchmessers kommen.

Die acht Ecken des Parallelopipeds sind, als Schnittpunkte von drei Ebenenpaaren, acht assoziierte Punkte, sind also auf allen Flächen eines Netzes gelegen. Das stimmt auch damit, daß für die Korrelation der Bündel um die beiden Gegenecken O, O' das Parallelopiped erst drei Paare entsprechender Elemente liefert (aus denen drei andere folgen) (Nr. 390). Wir werden später (Nr. 424) finden, daß jede Fläche 2. Ordnung aus zwei Punkten auf ihr durch ∞^1 Korrelationen erzeugt wird; sind dies Endpunkte eines Durchmessers, so hat nur eine unter ihnen die Spezialität, mit der wir uns jetzt beschäftigen, daß nämlich die korrelativen Bündel, parallel ineinander geschoben, einen Polarbündel ergeben[1]).

---

1) Vgl. hierzu: G. Müth, Die projektive Erzeugung der Rotationsflächen 2. Grades. Dissertation von Breslau 1905.

Vierter Teil.

Ausartungen der Korrelation und Kollineation, Abzählungen, lineare Systeme.

§ 60. Ausartungen der Korrelation und Kollineation.

Die einfachste Bestimmung der Kollineation oder Korrelation 400
war die, daß für vier gegebene gleichartige Elemente des einen Gebildes die entsprechenden im andern ebenfalls gegeben sind. Nehmen wir an, was im allgemeinen nicht eintritt, daß von den vier Elementen des einen Gebildes drei linear liegen, d. h. demselben linearen Gebilde erster Stufe angehören. Es sei der Fall zweier korrelativer Felder Σ, Σ' betrachtet, und vier Punkten A, B, C, D von Σ seien die Geraden a', b', c', d' in Σ' zugeordnet; je nachdem die lineare Lage in Σ oder Σ' statt hat, werden zwei wesentlich verschiedene Ausartungen eintreten. Es mögen also erstens B, C, D in einer Gerade a liegen. Nach der Vorschrift von Nr. 264 (für den Fall der Korrelation modifiziert) haben wir zwei Projektivitäten herzustellen: $\mathfrak{A}$ zwischen dem Büschel A und der Punktreihe a', $\mathfrak{B}$ zwischen B und b'. Auf jene, in welcher den Strahlen $A(B, C, D)$ die Punkte $a'(b', c', d')$ entsprechen, hat die lineare Lage keinen Einfluß, sie bleibt allgemein. Wir heben sofort hervor, daß sie zu einer Projektivität $\mathfrak{A}_0$ zwischen der mit dem Büschel A perspektiven Punktreihe a und der Punktreihe a' führt, in der den Punkten B, C, D die Punkte $a'(b', c', d')$ homolog sind. Diese allgemeine Projektivität wird für die ausgeartete Korrelation, deren Korrespondenz gewissermaßen durch sie reguliert wird, wichtig, sie heiße deshalb die charakteristische Projektivität derselben.

In der Projektivität $\mathfrak{B}$ sollen den $B(A, C, D)$ die $b'(a', c', d')$ entsprechen; da aber BC und BD identisch, beide a, und $b'c'$, $b'd'$ verschieden sind, so ist (Nr. 66) diese Projektivität eine ausgeartete; a und $b'a'$ sind die singulären Elemente, denen je alle Elemente im andern Gebilde entsprechen.

In Σ sind primäre Elemente die Punkte, in Σ' die Geraden. Zu jedem Punkte X von Σ findet man die entsprechende Gerade x' als die Verbindungslinie der beiden Punkte auf a', b', welche in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ den Strahlen AX, BX entsprechen. Liegt X beliebig in Σ (außerhalb a), so entspricht dem AX in $\mathfrak{A}$ ein bestimmter Punkt X' auf a', der sich nicht ändert, wenn X auf demselben Strahle durch A bleibt, und der im allgemeinen von $a'b'$ verschieden ist; dem BX, der vom singulären Strahle a verschieden ist, entspricht der singuläre Punkt $b'a'$; die zu verbindenden Punkte liegen daher beide auf a', also ist diese die X entsprechende Gerade.

Liegt X aber auf a, so wird der dem AX in $\mathfrak{A}$ entsprechende Punkt X' auf a' der dem Punkte X von a in $\mathfrak{A}_0$ korrespondierende Punkt X'; dem nun mit a, dem singulären Strahle des Büschels B, identischen Strahle BX entspricht auf b' jeder beliebige Punkt; folglich ist die Verbindungslinie unbestimmt jeder Strahl durch jenen bestimmten Punkt X'.

Betrachten wir jetzt die sekundären Elemente, die Geraden in Σ und die Punkte in Σ'.

Eine Gerade x in Σ haben wir dabei als Punktreihen-Träger und den entsprechenden Punkt als Scheitel des entsprechenden Strahlenbüschels anzusehen; den vom Schnitte ax verschiedenen Punkten von x entspricht, infolge des obigen Ergebnisses, immer die Gerade a', dem ax allein der ganze Strahlenbüschel um den dem ax in der Projektivität $\mathfrak{A}_0$ entsprechenden Punkt X' auf a'; das ist also der entsprechende Punkt von x, und die Projektivität zwischen der Punktreihe x und dem Büschel X' ist so ausgeartet, daß ax und a' die singulären Elemente sind.

Fällt aber die Gerade in die a hinein, so korrespondiert jedem ihrer Punkte ein ganzer Strahlenbüschel, dessen Scheitel auf a' liegt. Jeder Punkt der Ebene ist Scheitel eines Strahlenbüschels, dessen Strahlen den einzelnen Punkten von a entsprechen und zwar in allgemeiner Projektivität, wobei der Strahl des Büschels je nach dem Punkte auf a' geht, welcher dem Punkte von a in $\mathfrak{A}_0$ homolog ist.

Wir fassen zusammen:

Wir haben zwei singuläre Geraden a, a' erhalten, in jedem Felde eine, sowie eine Projektivität $\mathfrak{A}_0$ zwischen ihnen, die charakteristische, und die Korrespondenz der Elemente in der ausgearteten Korrelation ist die folgende:

1. Einem beliebigen Punkte von Σ entspricht die singuläre Gerade a' in Σ';

2. einem auf der singulären Gerade a von Σ gelegenen Punkte X ein unbestimmter Strahl durch den Punkt X' auf der singulären Gerade a', der dem X in der charakteristischen Projektivität $\mathfrak{A}_0$ homolog ist;

3. einer beliebigen Gerade x in Σ der Punkt auf a', der dem Schnitt ax in $\mathfrak{A}_0$ korrespondiert;

4. der singulären Gerade a jeder beliebige Punkt in Σ'.

Es empfiehlt sich zur Bestätigung, die Betrachtung zu wiederholen, indem vom Felde Σ' ausgegangen und mit dessen primären Elementen, den Geraden, begonnen wird.

Da für die beiden Felder Gleichartiges sich ergeben hat, so können wir das Ergebnis kürzer fassen:

1. Es entsprechen sich ein beliebiger Punkt von Σ oder Σ' und die singuläre Gerade a' oder a;

2. eine beliebige Gerade x oder x' und der Punkt auf a' oder a, der dem Schnitte ax, bzw. $a'x'$ in der charakteristischen Projektivität $\mathfrak{A}_0$ homolog ist.

Im ersten Falle ist die Projektivität der Gebilde 1. Stufe, die von den entsprechenden Elementen getragen werden, allgemein, im zweiten ausgeartet.

Man überzeuge sich, daß dieselben Resultate sich ergeben, wenn die Projektivität $\mathfrak{A}$ durch diejenige zwischen den Gebilden ersetzt wird, die von entsprechenden Elementen der ersten Art, oder $\mathfrak{B}$ durch diejenige zwischen den Gebilden, die von entsprechenden Elementen der zweiten Art getragen werden.

Zur Bestimmung unserer ausgearteten Korrelation reichen hin: die beiden singulären Geraden und die Projektivität zwischen ihren Punktreihen.

Dualisieren wir beide Felder, so haben wir in Σ vier Geraden a, b, c, d, von denen b, c, d durch einen Punkt A gehen, und ihnen entsprechend in Σ' vier Punkte A', B', C', D'.

Wir erhalten dann zwei singuläre Punkte A, A' und eine Projektivität $\mathfrak{A}_0$ zwischen ihren Büscheln, und es entsprechen sich:

1. eine beliebige Gerade in Σ oder Σ' und der singuläre Punkt A' oder A;

2. ein beliebiger Punkt X oder X' und der Strahl durch A' oder A, welcher in der Projektivität $\mathfrak{A}_0$ dem Strahle AX, bzw. $A'X'$ homolog ist.

Nach Hirst[1]) wird die erste Ausartung axiale, die andere zentrale Korrelation genannt.

Zur zentralen gelangt man auch auf folgende Weise. Im ersten Felde seien A und D zusammengefallen, jedoch so, daß D auf bestimmter Gerade d in A gerückt ist, dann ist die Projektivität $\mathfrak{A}$:

$$A(B,\ C,\ d) \barwedge a'(b',\ c',\ d')$$

allgemein, hingegen $\mathfrak{B}$ artet aus, weil BA und BD sich vereinigt haben; dieser Strahl und $b'c'$ sind die singulären Elemente von $\mathfrak{B}$.

---

1) Proceed. of the London Mathem. Soc., Bd. 8, S. 262.

Daraus ergibt sich eine zentrale Korrelation mit den singulären Punkten A und $b'c'$ und der charakteristischen Projektivität $\mathfrak{A}_0$:

$$A(B, C, d) \barwedge b'c'(b', c', a'd').$$

Die Vereinigung von a', d' mit bestimmtem Schnittpunkte führt zu einer axialen Korrelation.

Bei einer zentralen Korrelation muß von zwei konjugierten Geraden die eine durch den singulären Punkt gehen, und bei einer axialen von zwei konjugierten Punkten der eine auf die singuläre Gerade fallen.

401 Dualisiert man bloß das eine Feld, etwa in beiden Fällen das zweite, so daß man vier Punkten in Σ, von denen drei in gerader Linie liegen, vier beliebige Punkte, oder vier Geraden in Σ, von denen drei durch einen Punkt gehen, vier beliebige Geraden entsprechen läßt, so erhält man zwei ausgeartete Kollineationen, die sich jedoch nicht wesentlich, sondern nur durch Vertauschung der Felder unterscheiden. Bei der ersten haben wir in Σ eine singuläre Gerade a, in Σ' einen singulären Punkt A', bei der andern in Σ den A und in Σ' die a', und zwischen der Punktreihe auf der singulären Gerade und dem Büschel um den singulären Punkt die charakteristische Projektivität $\mathfrak{A}_0$. Es genügt, den ersten Fall, wo die Punkte in beiden Feldern die primären Elemente sind, zu verfolgen.

Es entsprechen sich:

1. ein beliebiger Punkt in Σ und der singuläre Punkt in Σ',

2. ein Punkt X auf a und jeder Punkt des Strahls durch A', welcher in $\mathfrak{A}_0$ dem X homolog ist;

3. eine beliebige Gerade x in Σ und der Strahl durch A', welcher dem Schnitte ax in $\mathfrak{A}_0$ homolog ist;

4. die singuläre Gerade a und jede beliebige Gerade in Σ', oder, wenn 1. und 4., 2. und 3. zusammengefaßt werden:

1. ein singuläres Element und jedes beliebige (gleichartige) Element im andern Felde;

2. ein mit einem singulären Elemente inzidentes Element und jedes beliebige Element, das mit dem zu ihm in $\mathfrak{A}_0$ homologen Elemente inzident ist.

Ein anschauliches Beispiel ausgearteter Kollineation ergibt sich, wenn zwei Felder Σ, Σ' perspektiv sind mit einem Zentrum auf einem, etwa A' auf Σ'; dann wird dies Zentrum der singuläre Punkt in Σ' und die Schnittlinie der beiden Ebenen die singuläre Gerade a in Σ: die Projektivität $\mathfrak{A}_0$ ist die, welche durch die perspektive Lage der Punktreihe a und des Büschels A' bewirkt wird.

Werden die beiden Ebenen durch Drehung um die Schnittlinie vereinigt, so ergibt sich ausgeartete Homologie, von welcher a die Axe und A' das Zentrum ist.

Wir können die Ausartung noch weitergehen lassen, 402
indem wir die charakteristische Projektivität $\mathfrak{A}_0$ ausarten lassen. Artet, indem wir wieder Korrelation annehmen, die axiale Korrelation aus, so haben wir in den singulären Punktreihen a, a' zwei singuläre Punkte A, A', denen in $\mathfrak{A}_0$ jeder beliebige Punkt der andern entspricht. Es bleibt bestehen, daß ein beliebiger Punkt von Σ oder Σ' und a', bzw. a entsprechend sind. Nunmehr aber entspricht, wegen der Ausartung von $\mathfrak{A}_0$, einem beliebigen Punkte von a oder a' ein beliebiger Strahl durch A' oder A, einer beliebigen Gerade der singuläre Punkt A', bzw. A.

Geht man aber von der zentralen Korrelation aus, so treten zu den schon vorhandenen singulären Punkten A, A' durch sie gehende singuläre Geraden a, a'. Es bleibt bestehen, daß eine beliebige Gerade in Σ oder Σ' und A', bzw. A entsprechend sind; während durch die Ausartung von $\mathfrak{A}_0$ bewirkt wird, daß einem beliebigen Strahle durch A oder A' ein beliebiger Punkt auf a', bzw. a, einem beliebigen Punkte die singuläre Gerade a', bzw. a korrespondiert.

Das Ergebnis ist also in beiden Fällen das nämliche; wir haben nur eine ausgeartete Korrelation 2. Stufe, die wir, mit Hirst, zentral-axial nennen.

Jedes der beiden Felder hat einen singulären Punkt und eine singuläre Gerade, welche inzidieren: A, a; bzw. A', a'. Durch sie ist die Ausartung völlig bestimmt. Und es entsprechen sich:

1. ein beliebiger Punkt in einem der beiden Felder und die singuläre Gerade im andern;
2. eine beliebige Gerade in einem und der singuläre Punkt im andern;
3. ein beliebiger Punkt auf der singulären Gerade des einen Feldes, und ein beliebiger Strahl durch den singulären Punkt des andern.

Von zwei konjugierten Punkten liegt der eine auf der singulären Gerade seines Feldes, und von zwei konjugierten Geraden geht die eine durch den singulären Punkt.

Dualisieren wir wiederum das eine Feld, so erhalten wir die Ausartung 2. Stufe der Kollineation, ebenfalls in jedem Felde mit einer singulären Gerade und einem singulären Punkte, welche inzidieren. Es entsprechen sich:

1. ein beliebiger Punkt des einen Feldes und der singuläre Punkt im andern;

2. eine beliebige Gerade des einen und die singuläre Gerade des andern;

3. beliebige Punkte auf den singulären Geraden;

4. beliebige Strahlen durch die singulären Punkte.

Diese Ausartung der Kollineation ergibt sich bei perspektiver Lage, wenn das Perspektivitätszentrum auf die Schnittlinie der Felder gelegt wird; es sind dann die Schnittlinie und das Zentrum die singulären Elemente für beide Felder.

Die Ausartung 2. Stufe der Kollineation oder Korrelation tritt auch ein, wenn zu der früheren Voraussetzung, daß B, C, D in gerader Linie a liegen, die weitere hinzutritt, daß auch A', C', D' in gerader Linie b' liegen, bzw. a', c', d' durch denselben Punkt B' gehen. Zu den früheren singulären Elementen a und A' oder a' kommen die neuen B und b' oder B' hinzu.

403 Transformiert man einen allgemeinen Kegelschnitt K durch eine ausgeartete Kollineation (1. Stufe) mit den singulären Elementen s, S'[1]), so geht er, wenn in Σ gelegen, in ein Geradenpaar über, dessen Geraden die Strahlen durch S' sind, welche in der charakteristischen Projektivität $\mathfrak{S}_0$ den beiden Schnitten von K mit s entsprechen, den übrigen Punkten von K korrespondiert immer S'. Die Tangenten von K gehen über in die Strahlen des Büschels S', derartig, daß jeder dieser Strahlen zwei Tangenten von K entspricht, den beiden, welche von dem ihm durch $\mathfrak{S}_0$ auf s entsprechenden Punkte herkommen und auch, wenn sie imaginär sind, durch einen reellen Strahl abgebildet werden. Der doppelte Büschel um den Doppelpunkt eines Geradenpaares stellt ja den Tangentenbüschel des allgemeinen Kegelschnitts vor. Berührt K die Gerade s, so vereinigen sich die Geraden des Paars in eine Doppelgerade; der Gerade s als Tangente von K entspricht jede Gerade in Σ'; für eine doppelt zu zählende Gerade, als Ausartung eines Kegelschnitts, kann in der Tat jede Gerade der Ebene als Tangente angesehen werden.

Liegt der Kegelschnitt, nunmehr K', in Σ', so entspricht ihm in Σ ein Punktepaar, dessen Punkte den beiden den K' tangierenden Strahlen von S' in $\mathfrak{S}_0$ entsprechen: diesen beiden Tangenten entsprechen in der Kollineation die Büschel um die Punkte des Paares, den übrigen Tangenten immer die s, die Doppellinie des Punktepaars; die Punktreihe auf ihr entspricht der Punktreihe auf K' und zwar doppelt, weil auf jedem Strahle von S' zwei Punkte von K' liegen. Geht K' durch S', so vereinigen sich die beiden Punkte; von jedem Punkte der Ebene kommen zwei vereinigte Tangenten an diese in

1) Von nun an ziehen wir, als mehr geeignet, diese Bezeichnung der singulären Elemente und der charakteristischen Projektivität vor.

einen Doppelbüschel ausgeartete Kurve 2. Klasse, so daß hier für jeden Punkt der Ebene gilt, was sonst nur für die Punkte des Kegelschnittes gilt. Dem Punkt S' von K' entspricht jeder Punkt des Feldes Σ.

Die ausgeartete Korrelation mit zwei singulären Geraden s, s' oder zwei singulären Punkten S, S' verwandelt den Kegelschnitt, mag er in Σ oder Σ' liegen, in ein Büschelpaar, dessen Scheitel in $\mathfrak{S}_0$ den beiden auf der singulären Gerade gelegenen Punkten von K oder K', bzw. in ein Geradenpaar, dessen Geraden den vom singulären Punkte kommenden Tangenten von K oder K' korrespondieren.

Bei der Ausartung 2. Stufe der Kollineation oder Korrelation entsteht aus einem beliebigen Kegelschnitte ein Kegelschnitt, dessen Punktreihe die doppelte singuläre Punktreihe und dessen Tangentenbüschel der doppelte singuläre Strahlenbüschel ist.

Geht der gegebene Kegelschnitt durch den singulären Punkt und berührt in ihm die singuläre Gerade, so werden die Punkte und die Tangenten der anderen Kurve unbestimmt, so daß man einen beliebigen Kegelschnitt als entsprechende Kurve ansehen kann.

Wenn zwei in ausgearteter Kollineation befindliche 404
Felder ineinander liegen, so bewirkt die Projektivität $\mathfrak{S}_0$ zwischen s und S' auf s sowohl, wie in S' eine Konjektivität; die Koinzidenzen jener und S' sind die Koinzidenzpunkte, die Koinzidenzen dieser und s die Koinzidenzgeraden der Kollineation.

Sind s und S' perspektiv, so haben wir in ihnen lauter sich selbst entsprechende Elemente, also eine ausgeartete Homologie, welche mit (s, S') bezeichnet werden möge. Es entspricht einem beliebigen Punkt X das Zentrum S', einem X auf der Axe s jeder beliebige Punkt X' von $S'X$, so daß die Projektivität auf jedem Strahle durch S' ausgeartet und die Invariante $(S'\mathfrak{S}XX') = \infty$ ist. Der Axe s entspricht eine beliebige Gerade x', einer beliebigen Gerade der Strahl von xs nach S'; die Projektivität um jeden Punkt von s ist ebenfalls ausgeartet, die Invariante $(s\mathfrak{f}xx')$ ist 0.

Von den Kernkurven ineinander liegender Felder, die sich in ausgearteter Korrelation befinden, artet nur eine aus. Ist die Korrelation axial, so stellt der Kegelschnitt, welcher durch die projektiven Punktreihen auf den singulären Geraden entsteht, die Geraden-Kernkurve Γ_2 vor; denn die beiden Punkte, welche eine Tangente verbindet, entsprechen ihr je im andern Felde, jedem entspricht im andern Felde ein ganzer Büschel (um den in der Projektivität entsprechenden Punkt), darunter ein durch ihn gehender Strahl, die Tangente.

Die Punkt-Kernkurve K^2 ist aber ein Geradenpaar, offenbar das der beiden singulären Geraden. Daß jeder Punkt der singulären Gerade des ersten Feldes als Punkt dieses Feldes auf einer der entsprechenden Geraden liegt, haben wir eben erkannt, aber er liegt ja auch als Punkt des zweiten Feldes, in dem er ein beliebiger ist, auf seiner entsprechenden Gerade, der singulären im ersten Felde.

Dual ist im Falle der zentralen Korrelation die Punkt-Kernkurve K^2 ein nicht zerfallender Kegelschnitt: das Erzeugnis der beiden projektiven singulären Büschel, während Γ_2 aus diesen beiden Büscheln besteht.

Die doppelte Berührung ist in beiden Fällen leicht zu bestätigen. W ist bei der axialen Korrelation der Schnitt der beiden singulären Geraden, U und V sind die ihm in der Projektivität entsprechenden Punkte, in denen jene Geraden von Γ_2 berührt werden: die Punkte, die wir früher (Nr. 89) mit E', F bezeichnet haben, und ihre Verbindungslinie — jetzt $w = UV$ — ist die involutorische Axe der beiden projektiven Punktreihen. Bei der zentralen Korrelation ist w die Verbindungslinie der beiden singulären Punkte, u, v sind die ihr in der Projektivität entsprechenden Strahlen, usw.

Doppelt konjugiert sind im ersten Falle eine Gerade und diejenige, welche die ihren Schnitten X, Y' mit den singulären Geraden in der Projektivität entsprechenden Punkte X', Y verbindet. Wir wissen aus Nr. 307, daß der Schnitt stets auf w, also der involutorischen Axe liegen muß, und sehen so den Satz von Nr. 90 bestätigt. Um jeden Punkt von w haben wir eine Involution doppelt konjugierter Geraden (Nr. 307), was wiederum damit übereinstimmt, daß aus jedem Punkte der involutorischen Axe die beiden projektiven Punktreihen durch involutorische Büschel projiziert werden. Zwei solche Geraden XY', $X'Y$ sind, als Diagonalen eines dem Γ_2 umgeschriebenen vollständigen Vierseits, konjugiert in bezug auf Γ_2.

Einem beliebigen Punkt aber ist doppelt konjugiert der Schnittpunkt W der singulären Geraden; liegt jener auf einer der singulären Geraden, so ist jeder Punkt derselben zu ihm doppelt konjugiert; denn die eine Polare von ihm, insofern zum anderen Felde gehört, ist diese singuläre Gerade, die andere erweitert sich zum Büschel um den entsprechenden Punkt auf der andern singulären Gerade.

Betrachten wir etwa bei der zentralen ebenen Korrelation einen Kegelschnitt der Büschel-Schar der beiden Kernkurven K^2 und (S, S'), und zwar als dem ersten Felde angehörig, so entspricht einem beliebigen Punkt X desselben der Strahl x' von S', der sich mit SX auf K^2 trifft; es ergibt sich, während X den Kegelschnitt durchläuft, der Strahlenbüschel S' einfach; dem Punkt S aber korrespondiert das ganze Strahlenfeld, und damit auch der Büschel S.

Wird der Kegelschnitt aber zum zweiten Feld gerechnet, so ergibt sich, seinen Punkten entsprechend, der Büschel um S, und dem S' entsprechend aus dem Strahlenfelde der Büschel S'. In dieser Weise ist dem Kegelschnitt das Büschelpaar (S, S') involutorisch entsprechend, und so jedem Kegelschnitte der Büschel-Schar; wodurch die Involution in derselben eine parabolische wird, mit diesem Büschel-Paar (S, S') als dem zentralen Elemente, in welches also auch die Doppelelemente sich vereinigt haben: die beiden sich selbst entsprechenden Kegelschnitte.

Analog verhält sich bei der axialen ebenen Korrelation das Geradenpaar (s, s').

Involutorische axiale Korrelation, d. h. durchgängige Vereinigung der beiden Polaren oder Pole kann nur eintreten, wenn nicht bloß die beiden singulären Geraden s, s' zusammenfallen, sondern auch die projektiven Punktreihen auf ihnen involutorisch werden; Basis dieser Ausartung — axiales Polarfeld — ist das Punktepaar der Doppelpunkte der Involution auf $s \equiv s'$.

Polar sind ein beliebiger Punkt und die Gerade s, ein Punkt auf s und jede Gerade durch den in der Involution gepaarten Punkt.

Dual ist das zentrale Polarfeld mit einem Geradenpaare als Basis, bestehend aus den Doppelstrahlen einer Involution.

Umgekehrt, zwei korrelative Felder können so ineinander gelegt werden, daß sie ein Polarfeld bilden (Nr. 316). Also müssen wir aus den Ausartungen des Polarfeldes, durch Aufhebung der involutorischen Lage, die Ausartungen der allgemeinen Korrelation erhalten. Das Polarfeld artet aus, wenn die Basis es tut: in ein Geradenpaar oder ein Punktepaar.

Das Polarfeld in bezug auf ein Geradenpaar ist folgendermaßen beschaffen. Es sind polar: eine beliebige Gerade und der Doppelpunkt des Paars, ein Strahl durch diesen Punkt und jeder beliebige Punkt auf dem zu ihm in bezug auf das Geradenpaar harmonischen Strahl. Wir haben daher eine Involution; lösen wir diese in zwei getrennte projektive Strahlenbüschel, so haben wir die zentrale Korrelation; und analog ergibt sich aus dem Polarfelde des Punktepaars die axiale. Wir hätten daher auch dies als Ausgangspunkt nehmen können und werden bei der entsprechenden Betrachtung im Raume es tun.

Ebenso kann man zwei kollineare Felder durch Ineinanderlegen in Homologie bringen (Nr. 276, 300). Also kann man von der ausgearteten Homologie ausgehen.

Wir übertragen die vorangehenden durchweg projektiven Ergebnisse auf Bündel und wollen an diesen die Ausartung der Erzeugnisse untersuchen. Es seien zwei Bündel O, O' in ausgearteter Kollineation gegeben, und zwar enthalte O den singulären Strahlenbüschel (O, σ), O' den singulären Ebenenbüschel s'; 405
$\mathfrak{S}_0$ sei die charakteristische Projektivität zwischen ihnen. Indem der singulären Ebene σ jede Ebene in O' entspricht, ergibt sich das ganze Strahlenfeld in σ. Einer Ebene von s' entspricht der ganze Ebenenbüschel um den ihr in $\mathfrak{S}_0$ korrespondierenden Strahl von

(O, σ). Die Schnittlinien bilden also den Büschel in jener Ebene um ihren Schnittpunkt mit diesem Strahl. Alle diese Schnittpunkte erzeugen den in σ gelegenen Kegelschnitt K, der durch (O, σ) und den vom Ebenenbüschel s' eingeschnittenen Strahlenbüschel entsteht und durch O und $\sigma s'$ geht. Folglich ist der zweite Bestandteil des Orts der Schnittlinien entsprechender Ebenen, neben jenem Strahlenfelde, die Kongruenz 1. Ordnung, 2. Klasse der Strahlen, welche diesen Kegelschnitt und die ihm begegnende Gerade s' treffen. Es ergibt sich diejenige Ausartung der Kongruenz der Doppelsekanten der kubischen Raumkurve, welche sich schon in Nr. 375 ergab, als wir den kollinearen Bündeln eine sich selbst entsprechende gemeinsame Ebene gaben. Die kubische Raumkurve besteht aus dem Kegelschnitte K und der Gerade s'. Diese ist nämlich der Ort der Schnittpunkte von s' selbst, als Strahl von O', mit den sie schneidenden unter den Strahlen von O, die ja alle ihr entsprechen, der Kegelschnitt aber der Ort der Schnittpunkte der Strahlen von (O, σ) je mit dem schneidenden unter den ∞^1 in der Kollineation entsprechenden.

Wir erzeugten (Nr. 389) einen tetraedralen Komplex durch ein Feld Π und einen Bündel P', die zueinander kollinear sind; wie gestaltet sich das Erzeugnis, wenn diese Kollineation ausartet? Dies ist in zwei Weisen möglich; entweder haben beide einen singulären Strahlenbüschel (S, Π) und (P', σ'), oder das Feld hat eine singuläre Punktreihe s, der Bündel einen singulären Ebenenbüschel s'. Im ersten Falle entspricht einem beliebigen Punkt von Π der Strahl von (P', σ'), der in der Projektivität $\mathfrak{S}_0$ zwischen (S, Π) und (P', σ') dem den Punkt enthaltenden Strahle von (S, Π) homolog ist. Man gelangt zur Erzeugung des tetraedralen Komplexes durch die beiden projektiven Strahlenbüschel (S, Π), (P', σ') und subsumiert diese Erzeugung (Nr. 254) der allgemeineren durch Feld und Bündel, welche kollinear sind. Das erzeugte Gebilde ist nicht ausgeartet. Im anderen Falle aber entspricht einem beliebigen Punkte von Π der singuläre Strahl s', einem Punkte von s aber jeder beliebige Strahl von P' in der ihm durch die Projektivität $\mathfrak{S}_0$ zwischen s und s' entsprechenden Ebene; der tetraedrale Komplex artet aus in den Inbegriff der beiden Strahlengebüsche, welche s und s' zu Axen haben.

406 Bei der Betrachtung eines Netzes kollinearer Bündel, die eine gegebene kubische Fläche (zu je dreien) erzeugen und zu dem Sextupel $a_1 a_2, \ldots a_6$ gehören, sind wir (Nr. 384) so weit gelangt, daß wir, unter Beibehaltung der Scheitel O, O', den dritten Scheitel auf eine Gerade b_1 des verbundenen Sextupels $b_1, \ldots b_6$ verlegen wollten: in den Punkt O_1 von b_1. Der Punkt von $\overline{O}''$, den wir mit O_1 vertauschen wollen, lag in der Ebene $\alpha_1 = Oa_1$ auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{A}_1^2$, den

diese aus F^3 ausschneidet und der auch O enthält. Die Doppelsekanten der in b_1 und $\mathfrak{A}_1^2$ zerfallenden R^3 müssen uns über das Entsprechen der Ebenen der Bündel O und O_1 belehren; es gibt zweierlei Doppelsekanten: s zwischen b_1 und $\mathfrak{A}_1^2$ und s' in α_1.

Eine beliebige Ebene durch O, welche $\mathfrak{A}_1^2$ zum zweiten Male in V_1 schneide, enthält eine Doppelsekante s, die von V_1 ausgeht; ihr entspricht, aus O_1 diese s projizierend, die Ebene $b_1 V_1$, welche infolge dessen allen Ebenen des Büschels OV_1 in O korrespondiert; es entsteht in O der singuläre Strahlenbüschel (O, α_1), welcher auf den singulären Ebenenbüschel b_1 so projektiv bezogen ist, daß entsprechende Elemente durch denselben Punkt V_1 von $\mathfrak{A}_1^2$ gehen. Die singuläre Ebene α_1 von O enthält alle Doppelsekanten s'; daher entspricht ihr jede beliebige Ebene von O_1. Da nur in diesem Falle Ebenen von O_1 in Betracht kommen, die nicht zum Büschel b_1 gehören, so hat man es im Grunde nur mit diesem Ebenenbüschel b_1 zu tun und kann sagen: der Ebenenbündel O_1 ist in einen Ebenenbüschel b_1 ausgeartet.

Die Kollineation zwischen O und O' ist unverändert und allgemein geblieben. Dagegen stehen auch O' und O_1 in ausgearteter Kollineation; der singuläre Ebenenbüschel ist derselbe b_1; der singuläre Strahlenbüschel und seine projektive Beziehung zu b_1 ergibt sich aus der Kollineation von O' zu O; α_1' ist die Ebene $O'a_1$.

Diese Erzeugung einer allgemeinen Fläche 3. Ordnung durch drei kollineare Ebenenbündel, von denen einer in einen Büschel ausgeartet ist, kann auch so beschrieben werden. Zwei (allgemein) kollineare Bündel O, O' sind gegeben; ein Ebenenbüschel b_1 wird projektiv auf zwei entsprechende Strahlenbüschel derselben: in den Ebenen α_1, α_1' bezogen; man bringe jede Ebene von b_1 mit zwei entsprechenden Ebenen der Büschel um die ihr entsprechenden Strahlen von (O, α_1), (O', α_1') zum Schnitt, also mit den Geraden einer Regelschar, welche dann in sie einen Kegelschnitt einschneidet. Die Trägerflächen dieser Regelscharen haben die durch O und O' erzeugte kubische Raumkurve R_{01}^3 und die Gerade $\alpha_1 \alpha_1'$ gemein; also hat sich ein Spezialfall der zweiten Steinerschen Erzeugungsweise ergeben.[1])

Ein Spezialfall hiervon ist: Es sind drei Punkte O, O', Q, zwei Geraden b_1 und t und zwei Ebenen σ, σ' gegeben. Die Schnitte einer Ebene ξ durch Q mit σ, σ', t werden bzw. aus O, O', b_1 durch Ebenen projiziert; deren Schnitt erzeugt eine kubische Fläche.[2]) Die beiden Bündel O, O', beide perspektiv zu Q, sind in allgemeiner Kollineation. Dagegen sind, wenn O_1 ein beliebiger Punkt auf b_1 ist, die Bündel O

---

1) Flächen 3. Ordnung, S. 9.

2) Schröter, Journal f. Math., Bd. 96, S. 302.

und O_1 in ausgearteter Kollineation; der Ebenenbüschel b_1 ist der singuläre in O_1, der singuläre Strahlenbüschel in O ist derjenige, der durch die Kollineation zwischen O und Q dem Strahlenbüschel von Q nach der Punktreihe von t entspricht; in der charakteristischen Projektivität zwischen ihnen sind homolog ein Strahl jenes Büschels in O und die Ebene von b_1, welche sich mit dem ihm entsprechenden in Q auf t schneidet.

Wir gehen in der obigen Betrachtung weiter und ersetzen O' durch einen Punkt O_2 auf b_2; die ausgeartete Kollineation zwischen O und O_2 hat dann zum Erzeugnis diese Gerade b_2 und den Kegelschnitt $\mathfrak{A}_2^2$ in der Ebene Oa_2. An Stelle von $\mathfrak{A}_1'^2$ in α_1' ist das Geradenpaar $b_2 c_{12}$ getreten. Erzeugnis der Kollineation zwischen O_1, O_2 ist die aus b_1, b_2, c_{12} bestehende kubische Raumkurve. Diese Kollineation ist in zweiter Stufe ausgeartet, indem die charakteristische Projektivität zwischen den singulären Büscheln b_1 und (O_2, α_1') oder, wie wir diesen jetzt lieber nennen wollen, $(O_2, \mathfrak{d}_2)$ auch ausgeartet ist, jener die singuläre Ebene $\mathfrak{d}_1 = (b_1, c_{12})$ hat, und dieser den singulären Strahl b_2, welche zu den schon vorhandenen singulären Elementen hinzugetreten und zu ihnen bzw. inzident sind. Die Kurve (b_1, b_2, c_{12}) hat dreierlei Doppelsekanten, s zwischen b_1, b_2, s_1 in $\mathfrak{d}_1$, s_2 in $\mathfrak{d}_2$. Einer beliebigen Ebene von O_1, welche eine s_2 enthält, korrespondiert durchweg die $\mathfrak{d}_2$ in O_2, die bisherige singuläre Ebene; einer Ebene von b_1, welche immer einen Büschel von s um den Schnitt mit b_2 enthält, entsprechen alle Ebenen von O_2 nach diesem Schnitte, also um b_2, welche Gerade daher in der charakteristischen Projektivität allen Ebenen von b_1 im Büschel $(O_2, \mathfrak{d}_2)$ entspricht, also der singuläre Strahl wird; endlich der Ebene $\mathfrak{d}_1$, welche alle s_1 enthält, korrespondieren alle Ebenen von O_2, insbesondere alle von b_2, weshalb $\mathfrak{d}_1$ singulär im Büschel b_1 geworden ist.

Diese Korrespondenz der Ebenen muß sich auch aus den beiden Kollineationen zwischen O und O_1, O und O_2 ergeben, deren Erzeugnisse aus b_1 und dem Kegelschnitt $\mathfrak{A}_1^2$ in $\alpha_1 = Oa_1$, bzw. aus b_2 und $\mathfrak{A}_2^2$ in $\alpha_2 = Oa_2$ bestehen. O ist $\mathfrak{A}_1^2$ und $\mathfrak{A}_2^2$ gemeinsam. Weil a_1 nicht a_2 trifft, trifft sie $\mathfrak{A}_2^2$, und a_2 trifft $\mathfrak{A}_1^2$; in $\mathfrak{d}_1 = (b_1, c_{12})$ liegt noch a_2, in $\mathfrak{d}_2 = (b_2, c_{12})$ noch a_1.

Einer beliebigen Ebene von O_1, welche eine Doppelsekante von $\mathfrak{A}_1^2$ in α_1 enthält, entspricht α_1 in O; diese enthält a_1 als Doppelsekante zwischen b_2 und $\mathfrak{A}_2^2$, also entspricht ihr und damit jener Ebene von O_1 die Ebene $\mathfrak{d}_2$, die von O_2 nach a_1 geht. Einer Ebene durch b_1, deren zweiter Schnitt mit $\mathfrak{A}_1^2$ der Punkt V_1 sei, entspricht in O jede Ebene durch OV_1; diese Ebenen gehen nach Doppelsekanten zwischen b_2 und $\mathfrak{A}_2^2$, deren beide Schnitte beweglich sind, also sind projizierend aus O_2 alle Ebenen von b_2. Endlich die Ebene $\mathfrak{d}_1 = b_1 c_{12} a_2$ enthält a_2 als Doppelsekante zwischen b_1 und $\mathfrak{A}_1^2$, also entspricht ihr in O die Ebene $\alpha_2 = Oa_2$, welche alle Doppelsekanten des $\mathfrak{A}_2{}^2$ enthält; projizierend aus O_2 ist daher jede Ebene dieses Bündels.

Diese Erzeugung der F^3 durch drei kollineare Bündel, von denen zwei in Büschel ausgeartet sind, kann man kurz wiederum so beschreiben. Zwei Ebenenbüschel b_1, b_2 sind bzw. projektiv zu zwei konzentrischen Strahlenbüscheln (O, α_1), (O, α_2). Jede Ebene von O schneidet aus letzteren zwei Strahlen aus; man schneide sie mit den beiden Ebenen von b_1, b_2, denen diese entsprechen.

Ein Spezialfall ist wiederum von Schröter behandelt.[1]) Es sind gegeben vier Geraden b_1, b_2, t_1, t_2 und ein Punkt O; eine beliebige Ebene ξ durch O und die beiden Ebenen $(b_1, \xi t_1)$, $(b_2, \xi t_2)$ liefern den erzeugenden Punkt. Ist O_1 ein beliebiger Punkt auf b_1, so hat die ausgeartete Kollineation der Bündel O und O_1 die singulären Büschel (O, t_1) und b_1, und Elemente derselben, die sich auf t_1 schneiden, sind homolog in der charakteristischen Projektivität; usw.

Drehen wir jetzt α_2 um a_2, bis der Kegelschnitt $\mathfrak{A}_2{}^2$ in ein von $b_1 c_{12}$ verschiedenes Geradenpaar, etwa $b_3 c_{23}$ übergeht. Mit dem Bestandteil c_{23} trifft dieser $\mathfrak{A}_2{}^2$ sowohl b_2 als auch $\mathfrak{A}_1{}^2$, weil c_{23} nicht a_1 schneidet: dieser Punkt $c_{23}\mathfrak{A}_1{}^2$ ist der gemeinsame Punkt von $\mathfrak{A}_1{}^2$ und $\mathfrak{A}_2{}^2$. Bei der Kollineation zwischen O und O_2 ist nur die Modifikation eingetreten, daß der zweite Schnitt V_2, nach dem entsprechende Elemente der singulären Büschel b_2 und (O, α_2) gehen, auf dem Bestandteil b_3 von $\mathfrak{A}_2{}^2$ sich bewegt; weshalb wir ihn lieber U_3 nennen wollen.

Nun ersetzen wir den Punkt O des Erzeugnisses (b_2, b_3, c_{23}) der Bündel O und O_2 durch den Punkt O_3 auf b_3.

Eine beliebige Ebene durch O schneide b_1, b_2, b_3 in U_1, U_2, U_3, $\mathfrak{A}_1{}^2$ zum zweiten Male in V_1; also entspricht ihr in O_1 die Ebene $b_1 V_1$, in O_2 die Ebene $b_2 U_3 (= b_2 V_2)$, in O_3 die Ebene nach U_2, U_3 oder von b_3 nach U_2. Diese drei Ebenen der Bündel oder Büschel sind also einander zugeordnet. Die beiden letzten gehen durch die Doppelsekante $U_2 U_3$ zwischen b_2, b_3, durch welche auch die Ebene von O geht; deren Schnitt mit der Ebene von b_1 ist der erzeugende Punkt. Bleibt diese und damit der Punkt V_1 fest, so gleitet die Doppelsekante an OV_1, b_2, b_3, beschreibt eine Regelschar und schneidet in jene Ebene von b_1 die Punkte eines Kegelschnitts, welcher die F^3 erzeugt. Zu allen diesen Regelscharen gehört a_1, in der Ebene von $\mathfrak{A}_1{}^2$ gelegen und die jeweilige OV_1 treffend, und c_{23}, durch O gehend; beide treffen b_2, b_3; also sind den Trägerflächen die b_2, b_3, a_1, c_{23} gemeinsam, und es liegt wiederum ein Spezialfall der zweiten Steinerschen Erzeugungsweise mit noch speziellerem Flächenbüschel vor.

Zwei beliebige Ebenen von b_2, b_3 schneiden sich in einer Doppel-

---

1) A. a. O., S. 289.

sekante $U_2 U_3$; nach dem dritten Schnitte derselben mit F^3 geht die zugeordnete Ebene aus b_1.

Wenn also alle drei Bündel in Büschel ausgeartet sind, so liegt Trilinearität vor (Nr. 212).

Erwähnen wir noch kurz den Fall, wo wir in einem Bündel O_3 aus dem Büschel heraustreten. Der Ebene (b_2, c_{23}) von O, deren dritte Gerade a_3 ist, entsprechen in O_1, O_2, O_3 die Ebene $b_1 a_3$, die Ebene $b_2 a_3$, jede beliebige Ebene. Die beiden ersten schneiden sich in a_3, einer Gerade von F^3; also bilden sie in der Trilinearität ein neutrales Paar; um die Punkte dieser Gerade a_3 zu erhalten, genügt es, im Bündel O_3 innerhalb des Büschels b_3 zu bleiben; folglich ist die Trilinearität der Büschel hinreichend. Also:

Unter den ∞^6 Erzeugungen der gegebenen F^3 durch drei kollineare Bündel, für welche das Sextupel $a_1, a_2, \ldots a_6$ das ausgezeichnete ist, nach dessen Geraden immer entsprechende Ebenen gehen, gibt es 6 Systeme von ∞^4, 15 Systeme von ∞^2, eine endliche Zahl 20, bei denen ein, zwei, alle drei Bündel in Büschel ausgeartet sind. Die Axen dieser Büschel gehören zu dem Sextupel $b_1, \ldots b_6$, das mit jenem eine Doppelsechs bildet. Im letzten Falle ist die Kollineation in Trilinearität übergegangen.

Graßmanns Satz[1]): „Der Durchschnitt dreier aus einem Gebilde 2. Stufe durch Projektion ableitbarer Ebenenbüschel ist eine Oberfläche 3. Ordnung“ (in dem Ebenenbündel Ebenenbüschel 2. Stufe genannt werden), umfaßt alle Fälle; sie werden von Graßmann auch vorher aufgezählt.

407 Wenn die Bündel O, O', O'' so kollinear sind, daß O und O' in einer allgemeinen Kollineation stehen, O und O'' in einer ausgearteten, bei welcher der singuläre Strahlenbüschel in O, der singuläre Ebenenbüschel in O'' sich befindet, so artet die erzeugte Fläche nicht aus. Ja, man kann in der Ausartung der erzeugenden Kollineationen, wie die vorangehende Erörterung gezeigt hat, noch wesentlich weiter gehen.

Überzeugen wir uns, daß die Mannigfaltigkeit 19 (Nr. 381) erreicht wird.

Ein Bündel arte aus; man kann auf $\infty^{2\cdot 3+4}$ Weisen zwei Scheitel O, O' und eine Gerade b_1 wählen; die Kollineation zwischen den Bündeln O, O' ist auf ∞^8 Weisen möglich; in O können wir den singulären Strahlenbüschel auf ∞^2 Weisen wählen und je in ∞^3 Weisen projektiv auf den Ebenenbüschel b_1 beziehen. Eine gegebene kubische

1) Gesammelte Werke, Bd. II, 1. Hälfte, S. 197.

Fläche ist in ∞^4 Weisen so herstellbar; also ist die Mannifaltigkeit:

$$2 \cdot 3 + 4 + 8 + 2 + 3 - 4 = 19.$$

Bei zwei ausartenden Bündeln ergibt sich:

$$3 + 2 \cdot 4 + 2(2 + 3) - 2 = 19.$$

Und weil ∞^7 Trilinearitäten zwischen drei gegebenen Ebenenbüscheln möglich sind (Nr. 209), so liefert der letzte Fall:

$$3 \cdot 4 + 7 = 19.$$

Wenn jedoch bei der ausgearteten Kollineation zwischen den Bündeln O und O'' der erstere den singulären Ebenenbüschel s, der O'' den singulären Strahlenbüschel (O'', σ'') enthält, so ruft die Kollineation zwischen O und O' in O' den singulären Ebenenbüschel s' für die ausgeartete Kollineation zwischen O' und O'' hervor; und die erzeugte kubische Fläche zerfällt in die Ebene σ'' und die Trägerfläche der durch die projektiven Ebenenbüschel s und s' erzeugten Regelschar.

Liegt eine Korrelation zweier Bündel mit singulären Ebenenbüscheln vor, so entspricht jeder Ebene des einen Büschels jeder beliebige Strahl in der entsprechenden Ebene des andern Büschels: Ort der ∞^1 Schnittpunkte ist die Schnittlinie der beiden Ebenen. Die durch diese Korrelation erzeugte Fläche 2. Grades ist daher die Trägerfläche der Regelschar, welche durch die beiden singulären Ebenenbüschel entsteht; so daß diese Erzeugung einer Fläche 2. Grades durch projektive Ebenenbüschel sich als Spezialfall der Erzeugung durch korrelative Bündel ergibt.

Ist aber die Korrelation eine solche mit zwei singulären Strahlenbüscheln (O, σ), (O', σ'), so fällt jeder Schnittpunkt eines Strahls des einen Bündels mit der entsprechenden Ebene des andern in eine der beiden Ebenen σ, σ'; Erzeugnis ist das Ebenenpaar (σ, σ').

§ 61. Mannigfaltigkeit der verschiedenen Kollineationen und Korrelationen. Vielfachheit der Bedingungen.

Zwei gegebene Gebilde 2. Stufe kann man in ∞^8 Weisen kollinear machen (Nr. 372) und ebenso korrelativ. 408

Sind ein Paar entsprechender Elemente gegeben, so kann man drei weitern festen Elementen des eines Gebildes in $\infty^{2 \cdot 3}$ Weisen die entsprechenden zuordnen. Folglich ist es für eine Kollineation oder eine Korrelation eine zweifache Bedingung, ein gegebenes Paar entsprechender Elemente zu besitzen; denn eine Bedingung ist i-fach, wenn sie den Mannigfaltigkeitsgrad um i verringert. Nennen wir jene Bedingung eine Elementarbedingung, so haben wir nun nach einfachen Elementarbedingungen zu suchen. Diese bestehen darin, daß in dem einen Gebilde ein Element A gegeben ist und im andern nicht das entsprechende A', sondern nur ein Element B', mit welchem A' inzidieren soll; woraus dann folgt, daß auch das dem B' entsprechende mit A inzidiert. Handelt es sich z. B. um die Kollineation zweier Felder, so sei in dem einen Felde Σ ein Punkt A gegeben, im andern Σ' eine Gerade b', auf der der entsprechende Punkt A' liegen soll, was dann bedingt, daß die der b' entsprechende Gerade durch A geht.

Für den A' sind dann nur noch ∞^1 Lagen möglich, während etwa zu drei weiteren Punkten B, C, D die korrespondierenden noch in je ∞^2 Lagen gewählt werden können. Unsere Bedingung läßt also ∞^7 Kollineationen zu und ist daher einfach. Es sind hinsichtlich dieser Bedingung zwei, jedoch nicht wesentlich verschiedene Fälle möglich: der Punkt liegt in Σ, die Gerade in Σ', oder diese in Σ, jener in Σ'.

Bei der Korrelation heißen solche Elemente konjugiert (Nr. 267), und da haben wir die zwei wesentlich verschiedenen Fälle, daß zwei konjugierte Punkte oder zwei konjugierte Geraden gegeben sind.

Wird die feste Lage der Trägerebenen aufgegeben, so wächst die Mannigfaltigkeit von ∞^8 auf ∞^{14}, da jene in $\infty^{2 \cdot 3}$ Weisen gewählt werden können.

409 Für die Affinität sind die unendlich fernen Geraden als entsprechend gegeben, also ist die Affinität eine zweifache Bedingung. Daher sind zwischen zwei Feldern ∞^6 Affinitäten möglich.

Für die Ähnlichkeit kann man zu zwei festen Punkten des einen Feldes die beiden entsprechenden (Nr. 287) geben; also gibt es ∞^4 Ähnlichkeiten zwischen zwei gegebenen Feldern. Wir können auch sagen: man gibt das Ähnlichkeitsverhältnis k, was auf ∞^1 Weisen möglich ist, und kann das einem festen Dreiecke des einen Feldes entsprechende, das seiner Gestalt und Größe nach völlig bestimmt ist, in ∞^3 Lagen (in zwei Arten, die sich durch den Umlaufungssinn unterscheiden) wählen. Kongruenzen sind ∞^3 möglich. Die Ähnlichkeit ist also eine vierfache, die Kongruenz eine fünffache Bedingung.

Liegen die Felder in derselben Ebene, so ist die Bedingung, ein gegebenes Koinzidenzelement zu haben, eine doppelte, und es gibt ∞^2 Kollineationen mit demselben gegebenen Koinzidenzdreiecke.

Unter ihnen gibt es ∞^1 Hermitesche Kollineationen; denn für eine solche hat man für einen gegebenen Punkt des einen Feldes den entsprechenden so zu wählen, daß er auf einem der drei Kegelschnitte liegt, welche in zwei Koinzidenzpunkten die nach dem dritten gehenden Koinzidenzgeraden berühren und durch den gegebenen Punkt gehen. Also sind $\infty^{2\cdot3+1}$ Hermitesche Kollineationen möglich, und die Bedingung, eine Hermitesche Kollineation zu sein, ist eine einfache; wie das auch daraus folgt, daß zwei der Invarianten gleich sein müssen.

Eine Homologie ist durch Axe, Zentrum, die je in ∞^2 Lagen gewählt werden können, und den Wert der Invariante gegeben. Folglich sind ∞^5 Homologien in fester Ebene möglich, darunter ∞^4 mit gegebener Invariante, insbesondere ∞^4 involutorische, ferner ∞^4 homologische Affinitäten, ∞^3 Symmetrien in bezug auf Axen, ∞^3 Ähnlichkeiten in ähnlicher Lage (Zentrum in ∞^2 Lagen, ∞^1 Werte des Ähnlichkeits-Verhältnisses), usw.

Wenn für eine Homologie das Zentrum (die Axe) gegeben ist, so ist die Bedingung, daß ein Paar entsprechender Punkte (Geraden) gegeben ist, nur einfach; weil der zweite Punkt (die zweite Gerade) nur in ∞^1 Lagen gewählt werden kann.

Die dreifache Bedingung für eine ebene Kollineation, daß sie Homologie sei, läßt sich nicht, wie es im nächsten Beispiel der Fall sein wird, in drei einfache zerlegen.

Daß es in gegebener Ebene ∞^5 Polarfelder gibt, folgt aus der fünffach unendlichen Mannigfaltigkeit der Kegelschnitte. Demnach ist es eine dreifache Bedingung, daß eine ebene Korrelation durchweg involutorisch ist. Zur Bestimmung einer allgemeinen Korrelation kann man acht Paare konjugierter Elemente geben. Gibt man für eine ebene Korrelation zunächst fünf Paare, fügt aber als die drei weiteren hinzu, daß die Elemente von drei von diesen fünf Paaren auch noch im andern Sinne konjugiert, also doppelt konjugiert sind, so wird (Nr. 311) eine Korrelation, die dadurch bestimmt ist, involutorisch, wenn nur jene drei Paare in der allgemeinen Lage gegeben sind, daß ihre Verbindungslinien nicht durch denselben Punkt gehen, bzw. ihre Schnittpunkte nicht auf derselben Gerade liegen. Wir erkennen hier noch deutlicher, daß Schröters Kennzeichen (Nr. 311) zu weit geht.

Läßt man drei Punkten A, B, C eines Kegelschnitts k^2 drei 410
Punkte A', B', C' eines andern Kegelschnitts k'^2, bzw. ihre Tangenten a', b', c' entsprechen, so wird (Nr 268) dadurch eine Kollineation oder Korrelation festgelegt, in welcher die beiden Kurven entsprechend sind. Hält man A, B, C fest, während A', B', C' (und a', b', c') sich verändern, was auf ∞^3 Weisen möglich ist, so ergeben sich ∞^3 Kollineationen und Korrelationen, in denen die beiden Kegelschnitte einander zugeordnet sind; und es ist daher für eine Kollineation oder Korrelation eine fünffache Bedingung, gegebene Kegelschnitte zu entsprechenden zu haben.

Das gilt auch für eine ebene Kollineation oder Korrelation, welche einen Kegelschnitt k^2 in sich selbst überführt. Wir können die dreifache Unendlichkeit auch folgendermaßen abzählen. Es gibt, in fester Ebene, ∞^7 Hermitesche Kollineationen, jede führt ∞^1 Kegelschnitte in sich selbst über; weil nun ∞^5 Kegelschnitte in der Ebene vorhanden sind, so sehen wir, daß jeder von ihnen durch ∞^{7+1-5} Kollineationen in sich übergeführt wird. Hingegen führt jede von den ∞^8 Korrelationen der Ebene zwei Kegelschnitte in sich selbst über (Nr. 308); also ist jeder Kegelschnitt in ∞^{8-5} Korrelationen sich selbst entsprechend.

Unter den ∞^3 k^2-Kollineationen — so möge eine Kollineation genannt werden, welche k^2 in sich selbst überführt — befinden sich ∞^2 involutorische Homologien; denn jedes Paar Pol und Polare von k^2 führt zu einer (Nr. 295, 305). Und unter den ∞^3 k^2-Korrelationen befinden sich, wie wir in Nr. 330 erkannten, ∞^2 Polarfelder, so daß die Mannigfaltigkeit nur um 1 sinkt; obwohl diese Spezialitäten dreifache Bedingungen sind, wobei wir die involutorische Homologie schon als Spezialfall der Hermiteschen Kollineation betrachten. Andererseits wissen wir, jede involutorische Homologie transformiert ∞^3, jedes Polarfeld ∞^2 Kegelschnitte in sich selbst.

Wir brauchen den korrespondierenden Punkten A, B, C; A', B', C' auf k^2, durch die wir eine k^2-Kollineation festlegen, nur die einfache Bedingung aufzuerlegen, daß AA', BB', CC' durch denselben Punkt S gehen, um eine involutorische Homologie zu erzielen. Die projektiven Punktreihen auf k^2 werden dadurch involutorisch; und daß die involutorische Homologie mit dem Punkte S als Zentrum und seiner Polare s nach k^2 als Axe die fragliche Kollineation ist, bedarf kaum eines Beweises.

Wenn auf k^2 eine beliebige Projektivität gelegt wird, in welcher A und A' entsprechend sind, so sind dann in der zugehörigen k^2-Korrelation dem Punkte A und seiner Tangente a, zum ersten Felde gehörig, die Tangente a' von A' und dieser Punkt entsprechend. Ist jene Projektivität involutorisch, so gilt das Entsprechen in beiderlei Sinne bei allen Paaren der Involution und den zugehörigen Tangenten. In den Punkten A, B, C von k^2 und irgend welchen Punkten auf den Tangenten a', b', c' der gepaarten Punkte haben wir drei Paare doppelt konjugierter Punkte, deren Verbindungslinien nicht konkurrent sind; also handelt es sich um ein Polarfeld. In diesem sind dann auch AA' und $aa', \ldots$, S und s polar.

Entsteht bei einer Kollineation oder Korrelation, die einen Kegelschnitt k^2 in sich überführt, auf demselben durch die entsprechenden, bzw. konjugierten Punkte eine Involution, so ist die ganze Beziehung involutorisch: involutorische Homologie, Polarfeld.

Sobald zu X, Y in derselben Ebene X', Y' als entsprechende 411
Punkte gegeben sind: je in ∞^2 Lagen, und dann zu $Z = (XY', YX')$ der entsprechende Punkt Z' auf XY, also in ∞^1 Lagen, ist Kollineation in eingeschriebener Dreieckslage erreicht (Nr. 365); zu einem vierten Punkte kann der entsprechende wiederum ganz beliebig gewählt werden. Folglich gibt es, in gegebener Ebene, ∞^7 Kollineationen in eingeschriebener Dreieckslage, und diese Spezialität ist eine einfache Bedingung.

Nehmen wir als viertes Paar entsprechender Punkte $Z_1' = Z$ im zweiten Felde und Z_1, auf XY gelegen, im ersten Felde, also letzteren in ∞^1 Lagen wählbar, so ergeben sich in der Ebene ∞^6 Kollineationen, welche zugleich in ein- und in umgeschriebener Dreieckslage sind, also zyklische Kollineationen 3. Grades, so daß diese Spezialität eine doppelte Bedingung ist.

Wenn $A_1 A_2 A_3$ ein Zyklus ist, so ist die Kollineation:

$$\left| \begin{array}{l} A_1 A_2 A_3 X \\ A_2 A_3 A_1 X' \end{array} \right|$$

zyklisch, vom 3. Grade, weil sie schon durch einen Zyklus als solche charakterisiert ist. Da jeder Punkt einen Zyklus anfangen kann, so können wir A_1 festhalten, sowie auch X, und für A_2, A_3, X' haben wir $\infty^{3 \cdot 2}$ Lagen, so daß sich auch so die sechsfache Unendlichkeit ergibt. Ebenso erhalten wir bei der zyklischen Projektivität 4. Grades, die ja durch einen Zyklus gerade bestimmt ist, eine sechsfache Unendlichkeit. Dies gilt bei jedem Grade.

In der Tat, wir haben in Nr. 359 erkannt, daß jede zyklische Projektivität n^{ten} Grades als Projektion des einfachen speziellen Falles erhalten werden kann, bei welchem das eine Feld aus dem andern durch Drehung um einen Punkt um den Winkel $\frac{2\nu\pi}{n}$ entsteht. Diese Kollineation ist in ihrer Ebene vollständig bestimmt, wenn der Drehpunkt und die Zahl ν gegeben ist; letztere hat nur eine endliche Anzahl — $\varphi(n)$ — von Werten; also ist die Mannigfaltigkeit der Kollineation in den verschiedenen Ebenen des Raumes ∞^{3+2}. Dazu kommt die Mannigfaltigkeit ∞^3 des Projektionszentrums. Andererseits kann eine gegebene zyklische Kollineation n^{ten} Grades in ∞^2 Weisen aus der speziellen Form durch Projektion erhalten werden, weil das Zentrum in sämtlichen Punkten eines Kreises liegen kann und, nachdem es gewählt, für die Ebene, in der die spezielle Form liegt, jede beliebige eines bestimmten Parallelebenen-Büschels zur Verfügung steht. So gelangen wir zur Mannigfaltigkeit $\infty^{3+2+3-2}$, also ∞^6 der zyklischen Kollineation n^{ten} Grades in gegebener Ebene; so daß sie eine zweifache Bedingung ist.

412 Ausgeartete Kollineationen und Korrelationen 1. Stufe zwischen zwei gegebenen Gebilden gibt es ∞^7; denn die singulären Elemente können je ∞^2 Lagen haben, und, nachdem sie bestimmt sind, sind ∞^3 charakteristische Projektivitäten möglich. Die Ausartung 1. Stufe ist daher eine einfache Bedingung. Und ein einfach unendliches System von Kollineationen oder Korrelationen wird eine endliche Anzahl von Ausartungen enthalten.

Die Ausartungen 2. Stufe sind vollständig bestimmt durch die beiden Paare inzidenter singulärer Elemente, welche je in ∞^3 Lagen möglich sind. Zwischen zwei gegebenen Gebilden lassen sich demnach ∞^6 solche Ausartungen herstellen, und die Ausartung 2. Stufe ist eine zweifache Bedingung.

§ 62. Anzahl der Korrelationen, welche acht gegebenen Elementarbedingungen genügen. Konstruktion aus acht Paaren konjugierter Punkte.

413 Wir bevorzugen die Korrelation zweier Felder Σ, Σ'. Es seien also folgende Elementarbedingungen gegeben.

1. Einem Pole P in Σ ist seine Polare p' in Σ', 2. einer Polare p in Σ der Pol P' in Σ' zugeordnet; 3. zwei Punkte A und A' sollen konjugiert sein, 4. zwei Geraden a und a' sollen konjugiert sein.

Von ihnen sind 1. und 2. doppelt, 3. und 4. einfach.

Die Signatur $(\alpha\beta\gamma\delta)$ bedeute, daß α Bedingungen 1., β Bedingungen 2., γ Bedingungen 3. und δ Bedingungen 4. gegeben sind, wobei:

$$2\alpha + 2\beta + \gamma + \delta = 8,$$

was kurz mit $(\alpha\beta\gamma\delta)_8$ bezeichnet wird. Zugleich möge damit auch die Anzahl der Korrelationen, welche bei dieser Signatur möglich sind, bezeichnet werden. Es ist immer:

$$(\alpha\beta\gamma\delta)_8 = (\beta\alpha\gamma\delta)_8,$$

weil da nur eine Vertauschung der beiden Felder vorliegt; ebenso ist:

$$(\alpha\beta\gamma\delta)_8 = (\beta\alpha\delta\gamma)_8,$$

da der eine Fall aus dem andern durch Dualisieren sich ergibt; daher:

$$(\alpha\beta\gamma\delta)_8 = (\beta\alpha\gamma\delta)_8 = (\beta\alpha\delta\gamma)_8 = (\alpha\beta\delta\gamma)_8.$$

Es bleiben demnach von den 55 Signaturen nur noch folgende 22 wesentlich verschiedenen Signaturen zu behandeln, sie sind angeordnet nach dem Werte von $\alpha + \beta$:

$$(4000),\ (3100),\ (2200);\ (3020),\ (3011);\ (2120),\ (2111);$$
$$(2040),\ (2031),\ (2022);\ (1140),\ (1131),\ (1122);$$
$$(1060),\ (1051),\ (1042),\ (1033);$$
$$(0080),\ (0071),\ (0062),\ (0053),\ (0044).$$

Wir wissen schon (Nr. 264, 266):

$$(4000) = 1, \quad (3100) = 1, \quad (2200) = 0;$$

(3100) haben wir dort auf (0400) zurückgeführt, was mit (4000) gleich ist. Wir geben noch ein Beispiel der Zurückführung einer Signatur auf eine andere, nämlich der Signatur:

$$(2120) \qquad \left| \begin{matrix} P & Q & r & A & B \\ p' & q' & R' & A' & B' \end{matrix} \right|;$$

d. h. P, Q, r sollen den p', q', R' polar und A, B zu A', B' konjugiert sein. Wir suchen den Pol S von $s' = A'R'$; er muß auf r liegen und die Polaren von $s'p'$, $s'q'$, A' müssen von S nach P, Q, A gehen, daher muß sein:

$$S(P, Q, r, A) \barwedge s'(p', q', R', A');$$

es gibt auf r nur einen Punkt, der dieser Projektivität genügt (Nr. 224). Der Pol von SB ist sodann derjenige Punkt $\mathfrak{B}'$ auf s', der in dieser Projektivität dem SB entspricht; folglich ist $\mathfrak{B}'B'$ die Polare b' von B. Damit ist unsere Korrelation umgewandelt in:

$$(3100) \qquad \left| \begin{matrix} P & Q & r & B \\ p' & q' & R' & b' \end{matrix} \right|$$

Also ist $(2120) = (3100) = 1$.

Und wir können diese Korrelation, als (3100) oder (0400), vervollständigen; d. h. es können beliebige weitere entsprechenden Elemente konstruiert werden.

Um die Anzahlen der übrigen Signaturen zu ermitteln, gehen 414
wir vor wie in Nr. 245[1]). Durch Fallenlassen einer einfachen Elementarbedingung bilden wir einfach unendliche Systeme von Korrelationen, die nur sieben Bedingungen erfüllen, also mit Signaturen $(\alpha\beta\gamma\delta)_7$. In jedem solchen System $\mathfrak{S}$ gibt es je eine endliche Anzahl π, bzw. λ von zentralen, axialen Korrelationen, eine endliche Anzahl μ von Korrelationen, in denen noch die achte Bedingung erfüllt wird, daß zwei gegebene Punkte konjugiert sind, und eine endliche Anzahl ν, für welche noch zwei gegebene Geraden konjugiert sind. Diese beiden Zahlen μ, ν mögen wiederum die Charakteristiken des Systems

---

1) Hirst, Proc. London Math. Soc., Bd. 5, S. 40 (auch Annali di Matematica, Ser. II, Bd. 6, S, 260) und Bd. 8, S. 262.

heißen, π, λ die Ausartungszahlen; wir schreiben kurz: $\pi(\alpha\beta\gamma\delta)_7$, usw. Zwischen diesen vier Zahlen bestehen zwei Beziehungen, welche gestatten, μ, ν zu berechnen, wenn π, λ ermittelt sind, was im allgemeinen leichter ist.

Es gibt also μ Korrelationen in $\mathfrak{S}$, für welche A und A' konjugiert sind; d. h. wenn zu A oder A' in allen Korrelationen von $\mathfrak{S}$ die Polaren konstruiert werden, so gehen μ von ihnen durch A' oder A; also ist μ die Klasse der Kurve der Polaren, welche einem Punkte des einen Feldes in den verschiedenen Korrelationen von $\mathfrak{S}$ im andern zugehören. Und ebenso ist ν die Ordnung des Orts der Pole einer Gerade.

Es seien nun in Σ zwei Geraden a, b gegeben, in Σ' ein Punkt C'. Ein Strahl x_a' des Büschels C' und die Gerade a sind in ν Korrelationen von $\mathfrak{S}$ konjugiert; in diesen seien die Pole von b konstruiert und aus C' durch die Strahlen x'_b projiziert, welche dann dem b konjugiert sind. So werden einem x_a' ν Strahlen x_b' und ebenso einem x_b' ν Strahlen x_a' zugeordnet. Es entsteht also im Büschel C' eine (nicht involutorische) Korrespondenz $[\nu, \nu]$, in welcher zwei Strahlen x_a', x_b' entsprechend sind, welche in der nämlichen Korrelation von $\mathfrak{S}$ zu a, bzw. b konjugiert sind.

Die 2ν Koinzidenzen kommen auf zweierlei Weise zustande. In jeder der μ Korrelationen von $\mathfrak{S}$, in denen die Punkte ab und C' konjugiert sind, geht die Polare von ab durch C' und ist zu a und b konjugiert. Und umgekehrt, wenn in einer nicht ausgearteten Korrelation von $\mathfrak{S}$ ein Strahl durch C' sowohl zu a, als zu b konjugiert ist, so muß ab sein Pol und daher zu C' konjugiert sein.

Ferner in jeder der zentralen Korrelationen vereinigen sich, weil im allgemeinen weder a, noch b durch den singulären Punkt in Σ geht — die Zahl dieser Punkte ist endlich —, die Pole von a und b in dem singulären Punkte von Σ', und die Gerade aus C' nach ihm ist wieder konjugiert zu a und b. Dagegen führen die axialen Korrelationen zu keiner Koinzidenz; denn ab liegt auf keiner der singulären Geraden von Σ', folglich sind in jeder der λ Korrelationen die beiden Pole von a, b zwei verschiedene Punkte auf der singulären Gerade in Σ', und da diese nicht durch C' geht, sind die beiden sie aus C' projizierenden Strahlen x_a', x_b' nicht koinzidierend.

Dies führt zu der einen der beiden Beziehungen:

$$2\nu = \mu + \pi;$$

die andere ergibt sich durch die duale Betrachtung und ist:

$$2\mu = \nu + \lambda;$$

woraus folgt:

$$1) \qquad 3\mu = \pi + 2\lambda, \quad 3\nu = 2\pi + \lambda.$$

Es ist:

$$\mu(\alpha\beta\gamma\delta)_7 = (\alpha, \beta, \gamma + 1, \delta)_8,$$
$$\nu(\alpha\beta\gamma\delta)_7 = (\alpha, \beta, \gamma, \delta + 1)_8;$$

also ist:

$$\mu(\alpha, \beta, \gamma - 1, \delta)_7 = \nu(\alpha, \beta, \gamma, \delta - 1)_7 = (\alpha\beta\gamma\delta)_8.$$

Wir erhalten so eine Anzahl von Kontrollen.

Die 13 Systeme, mit denen allein wir uns zu beschäftigen haben, sind:

(3010), (2110);
(2030), (2021); (1130), (1121);
(1050), (1041), (1032);
(0070), (0061), (0052), (0043).

Betrachten wir z. B. die vorletzte Gruppe von drei Systemen, so führen die μ, ν zu den Anzahlen für folgende Signaturen $(\alpha\beta\gamma\delta)_8$.

	μ	ν
(1050):	(1060)	(1051),
(1041):	(1051)	(1042),
(1032):	(1042)	(1033),

so daß die Zahlen (1051) und (1042) doppelt erhalten werden.

Man kann die Ausartungszahlen π, λ direkt berechnen, wie es 415
Hirst in seinem ersten Aufsatze getan hat. Aber es ist einfacher, den Prozeß fortzusetzen, wobei es dann nur auf die Berechnung von einigen λ oder π und auf die der Zahlen der Ausartungen 2. Stufe ankommt, welche sechs Bedingungen erfüllen. Man läßt also noch eine einfache Bedingung fallen, so daß man zu Signaturen $(\alpha\beta\gamma\delta)_6$ gelangt. Da gibt es nun je ein einfach unendliches System $\mathfrak{S}_c$ von zentralen Korrelationen und ein eben solches $\mathfrak{S}_a$ von axialen[1]); sind θ Ausartungen 2. Stufe vorhanden, so befinden sich diese, als Ausartungen sowohl der einen, wie der andern Ausartung 1. Stufe, in beiden Systemen. Ferner enthält das erste System $\mathfrak{S}_c$ eine endliche Anzahl $\dot{\pi}$ von Korrelationen, für welche noch zwei gegebene Punkte konjugiert sind, und eine Anzahl $\bar{\pi}$ von solchen, bei denen noch zwei gegebene Geraden konjugiert sind. Für $\mathfrak{S}_a$ seien $\dot{\lambda}$, $\bar{\lambda}$ diese Charakteristiken.

Ersichtlich ist durch Dualität:

$$\dot{\pi}(\alpha\beta\gamma\delta)_6 = \bar{\lambda}(\beta\alpha\delta\gamma)_6 = \bar{\lambda}(\alpha\beta\delta\gamma)_6,$$
$$\bar{\pi}(\alpha\beta\gamma\delta)_6 = \dot{\lambda}(\alpha\beta\delta\gamma)_6,$$
$$\pi(\alpha\beta\gamma\delta)_7 = \lambda(\alpha\beta\delta\gamma)_7.$$

1) Bisweilen ist das eine nicht vorhanden, z. B. bei (1040) das System $\mathfrak{S}_a$.

In $\mathfrak{S}_c$ haben wir zwei Kurven (S), (S'), erzeugt durch die singulären Punkte, in $\mathfrak{S}_a$ zwei Kurven (s), (s'), umhüllt von den singulären Geraden. Da von zwei konjugierten Geraden a, a' einer zentralen Korrelation eine mit dem singulären Punkte ihres Feldes inzidieren muß und umgekehrt zwei Geraden konjugiert sind, wenn diese Inzidenz stattfindet, so folgt, daß $\bar{\pi}$ die Summe der Ordnungen von (S) und (S') ist, und ebenso ist $\dot{\lambda}$ die Summe der Klassen von (s) und (s'). Wie früher, ist $\dot{\pi}$ die Klasse der Kurve, in jedem der beiden Felder, die von den Polaren, in bezug auf die Korrelationen von $\mathfrak{S}_c$, eines Punktes des andern Feldes umhüllt wird, und $\bar{\lambda}$ die Ordnung der Pole, die einer Gerade desselben in den Korrelationen von $\mathfrak{S}_a$ entsprechen.

Es ist möglich, daß eine von den genannten Kurven nicht zustande kommt, indem das singuläre Element in bestimmten Punkten oder Geraden festbleibt. Z. B. bei

$$(2100) \quad \begin{vmatrix} P & Q & r \\ p' & q' & R' \end{vmatrix}$$

ist (S) die Gerade r, (S') kommt nicht zustande: S' liegt immer in $p'q'$; also ist $\bar{\pi} = 1 + 0 = 1$; ebenso bleibt s fest in PQ, s' aber beschreibt den Büschel um R'; so daß $\dot{\lambda} = 0 + 1 = 1$.

Bei (3000) kommt keine der vier Kurven zu stande; die singulären Elemente liegen in einzelnen Punkten oder Geraden fest, und die einfache Unendlichkeit der Korrelationen ergibt sich dadurch, daß die charakteristischen Projektivitäten unbestimmt sind; z. B. wenn S in P, S' in $q'r'$ liegt, haben wir nur:

$$S(Q, R) \barwedge S'(q', r').$$

Oft artet auch, wenn in beiden Feldern Kurven zu stande kommen, das Entsprechen zusammengehöriger singulärer Elemente aus. Z. B. bei

$$(2020) \quad \begin{vmatrix} P & Q & A & B \\ p' & q' & A' & B' \end{vmatrix}$$

besteht (S') aus dem Geradenpaare $p'q'$, (S) hingegen ist der Kegelschnitt der Punkte S, für welche

$$S(P, Q, A, B) \barwedge p'q'(p', q', A', B')$$

ist, und das Entsprechen ist so, daß zu einem beliebigen Punkte S dieses Kegelschnitts immer $p'q'$ als S' gehört, zu P oder Q jeder beliebige Punkt von q' oder p'. Jedenfalls ist $\bar{\pi} = 2 + 2 = 4$. Hingegen s und s' können nur PQ und $A'B'$ sein, so daß $\dot{\lambda} = 0 + 0 = 0$.

Jedes der beiden Systeme $\mathfrak{S}_c$, $\mathfrak{S}_a$ liefert eine Relation, aber nur eine. Wir legen wieder in Σ die Geraden a, b, in Σ' den Punkt C' und versuchen zwei Strahlen x_a', x_b' durch C' entsprechen zu lassen, welche je in der nämlichen Korrelation von $\mathfrak{S}_c$ zu a, bzw. b konjugiert sind. Handelt es sich um eine Korrelation, die ihren S weder auf a, noch auf b hat, so fallen beide Strahlen x_a', x_b' in den Strahl aus C' nach S' zusammen. Hat die Korrelation aber ihren S auf a oder b, so wird x_a', bzw. x_b' unbestimmt. Wir erhalten also keine Korrespondenz.

In bezug aber auf das System $\mathfrak{S}_a$ ergibt sich eine und zwar $[\bar{\lambda}, \bar{\lambda}]$. Wenn dann x_a', x_b' sich vereinigen und zwar für eine Korrelation, die nur Ausartung 1. Stufe ist, so ist der Schnitt der zu diesem Strahle konjugierten Strahlen a, b der Pol desselben; C' und ab sind konjugiert, und umgekehrt, wenn sie es sind, geht die Polare von ab durch C' und ist sowohl zu a, als zu b konjugiert. Das geschieht bei $\dot{\lambda}$ Korrelationen von $\mathfrak{S}_a$ (allen, bei welchen s durch ab oder s' durch C' geht). Ferner ergeben sich Koinzidenzen bei den Ausartungen 2. Stufe mit singulärer Gerade und singulärem Punkte s, S; s', S' in jedem Felde, weil die Pole für die beliebig gegebenen Geraden a, b in den S' fallen, also x_a', x_b' sich vereinigen.

Folglich haben wir, indem noch die duale Betrachtung gemacht wird, die Relationen:

$$2) \qquad 2\bar{\lambda} = \dot{\lambda} + \theta, \quad 2\dot{\pi} = \bar{\pi} + \theta.$$

Was die θ anlangt, so brauchen wir dieselben nur für folgende Signaturen zu berechnen:

(3000); (2100); (2020), (2011); (1120), (1111);
(1040), (1031), (1022); (0060), (0051), (0042), (0033).

Denn, weil die Ausartung 2. Stufe in sich dual ist, ist:

$$\theta(\alpha\beta\gamma\delta)_6 = \theta(\beta\alpha\gamma\delta)_6 = \theta(\beta\alpha\delta\gamma)_6 = \theta(\alpha\beta\delta\gamma)_6.$$

Wiederum ist:

$$\dot{\lambda}(\alpha, \beta, \gamma - 1, \delta)_6 = \bar{\lambda}(\alpha, \beta, \gamma, \delta - 1)_6 = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, \delta)_7$$

oder:

$$\dot{\lambda}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)_6 = \lambda(\alpha, \beta, \gamma + 1, \delta)_7,$$
$$\bar{\lambda}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)_6 = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, \delta + 1)_7.$$

Sind also die θ ermittelt und hat man z. B. $\dot{\lambda}$ für (0060) ermittelt, so gibt die obige Formel $\bar{\lambda}$ für (0060), das ist $\dot{\lambda}$ für (0051); damit wird $\bar{\lambda}$ für (0051) berechnet, usw. bis (0006).

Wir brauchen daher nur $\dot{\lambda}$ für (3000), (2100), (2020), (1120), (1040) und (0060) direkt zu ermitteln oder, was dasselbe ist, λ für (3010), (2110), (2030), (1130), (1050), (0070).

Haben wir nun alle Zahlen λ ermittelt, so ergeben sich die π vermittelst:

$$\pi(\alpha\beta\gamma\delta)_7 = \lambda(\alpha\beta\delta\gamma)_7.$$

Demnach sind die θ für 13 Signaturen $(\alpha\beta\gamma\delta)_6$ und die λ (oder π) für 6 Signaturen $(\alpha\beta\gamma\delta)_7$ zu ermitteln.

Die Ermittelung der θ hat den Vorzug, daß bei der Ausartung 2. Stufe es sich nur um reine Lageneigenschaften handelt, während bei denen der 1. Stufe auch Projektivitäten zu berücksichtigen sind.

416 Aus der Beschreibung der Korrespondenz bei der Ausartung 2. Stufe der Korrelation (zentral-axiale Korrelation) in Nr. 402 folgt, daß:

1. wenn zwei polare Elemente gegeben sind, entweder ein singulärer Punkt in den Pol, oder eine singuläre Gerade in die Polare fällt, oder die eine singuläre Gerade durch den Pol geht und der eine singuläre Punkt auf der Polare liegt,

2. wenn zwei konjugierte Punkte gegeben sind, eine der beiden singulären Geraden durch den einen dieser Punkte geht, und

3. wenn zwei konjugierte Geraden gegeben sind, einer von den beiden singulären Punkten auf der einen von ihnen liegt.

Ferner sind S und s, sowie S' und s' inzident.

Darnach haben wir in den 13 oben aufgezählten Signaturen, wenn die gegebenen Bedingungen durch das neben die Signatur geschriebene Schema gekennzeichnet sind, folgende Lage der singulären Elemente, wobei, wenn verschiedene Kombinationen möglich sind, immer ein typisches Beispiel vorgeführt wird:

$$(3000) \quad \left| \begin{matrix} P & Q & R \\ p' & q' & r' \end{matrix} \right| .$$

Die singulären Elemente fallen in die darunter stehenden Punkte oder Geraden:

$$\begin{matrix} S & s & S' & s' \\ P & PQ & q'r' & r'. \end{matrix}$$

Es sind durch Vertauschung von P, Q, R und die entsprechende von p', q', r' sechs Kombinationen möglich, also: $\theta = 6$. —

$$(2100) \quad \left| \begin{matrix} P & Q & r \\ p' & q' & R' \end{matrix} \right| .$$

$$\begin{matrix} S & s & S' & s' \\ (PQ, r) & PQ & p'q' & (p'q', R'); \end{matrix}$$

nur eine Kombination: $\theta = 1$. —

$$(2020) \quad \left| \begin{matrix} P & Q & A & B \\ p' & q' & A' & B' \end{matrix} \right| .$$

$$\begin{matrix} S & s & S' & s' \\ P & PQ & (q', A'B') & A'B' \end{matrix}$$

mit zwei Kombinationen: $\theta = 2$. —

$$(2011) \qquad \begin{vmatrix} P & Q & A & b \\ p' & q' & A' & b' \end{vmatrix}.$$

Wir haben vier verschiedene Typen:

S	s	S'	s'
P	PQ	$b'q'$	$(A', b'q')$
P	PA	$b'q'$	q'
(PQ, b)	PQ	$p'q'$	$(A', p'q')$
(PA, b)	PA	$p'q'$	q';

der erste, zweite, vierte Typus haben zwei Kombinationen, daher $\theta = 7$. —

$$(1120) \qquad \begin{vmatrix} P & q & A & B \\ p' & Q' & A' & B' \end{vmatrix};$$

wir haben zwei Typen mit je zwei Kombinationen:

S	s	S'	s'
P	PA	Q'	$Q'B'$
(PA, q)	PA	$(Q'B', p')$	$Q'B'$;

also $\theta = 4$. —

$$(1111) \qquad \begin{vmatrix} P & q & A & b \\ p' & Q' & A' & b' \end{vmatrix};$$

es gibt zwei Typen mit je einer Kombination:

S	s	S'	s'
(PA, q)	PA	$p'b'$	$(Q', p'b')$
bq	(P, bq)	$(Q'A', p')$	$Q'A'$;

also $\theta = 2$. —

Bei der nächsten Signatur

$$(1040) \qquad \begin{vmatrix} P & A & B & C & D \\ p' & A' & B' & C' & D' \end{vmatrix}$$

ist keine Ausartung 2. Stufe möglich; denn jede der beiden singulären Geraden müßte mindestens durch zwei der Punkte A, B, C, D, bzw. A', B', C', D' gehen, und dann entweder s noch durch P gehen oder s' mit p' zusammenfallen, was nicht möglich ist; also $\theta = 0$. —

$$(1031) \qquad \begin{vmatrix} P & A & B & C & d \\ p' & A' & B' & C' & d' \end{vmatrix};$$

es gibt zwei Typen mit je drei Kombinationen:

S	s	S'	s'
P	PA	$(B'C', d')$	$B'C'$
(PA, d)	PA	$(B'C', p')$	$B'C'$;

mithin $\theta = 6$. —

$$(1022) \quad \left| \begin{matrix} P & A & B & c & d \\ p' & A' & B' & c' & d' \end{matrix} \right|;$$

hier haben wir vier Typen mit zwei, zwei, einer, vier Kombinationen:

S	s	S'	s'
P	PA	$c'd'$	$(B', c'd')$
(AB, c)	AB	$p'd'$	p'
cd	(cd, P)	$(A'B', p')$	$A'B'$
(PA, c)	PA	$p'd'$	$(p'd', B')$;

also $\theta = 9$. —

Ähnlich wie oben bei (1040), sind bei (0060) und (0051) keine zentral-axialen Korrelationen möglich; $\theta = 0$. —

$$(0042) \quad \left| \begin{matrix} A & B & C & D & e & f \\ A' & B' & C' & D' & e' & f' \end{matrix} \right|;$$

wir haben einen Typus mit $2 \cdot 6$ Kombinationen:

S	s	S'	s'
(AB, e)	AB	$(C'D', f')$	$C'D'$;

also $\theta = 12$. —

Endlich

$$(0033) \quad \left| \begin{matrix} A & B & C & d & e & f \\ A' & B' & C' & d' & e' & f' \end{matrix} \right|;$$

es gibt zwei Typen mit je neun Kombinationen:

S	s	S'	s'
(AB, d)	AB	$e'f'$	$(e'f', C')$
de	(de, C)	$(A'B', f')$	$A'B'$;

also $\theta = 18$.

417 Was nun die $\lambda(\alpha\beta\gamma\delta)_7$ anlangt, von denen nur die für die Signaturen (3010), (2110), (2030), (1130), (1050), (0070) berechnet zu werden brauchen, so wissen wir, daß, wenn ein Pol und seine Polare gegeben sind, etwa P und p', entweder s durch P geht oder s' mit p' identisch ist; im ersteren Falle müssen P und $s'p'$ in der Projektivität zwischen den Punktreihen s, s' entsprechend sein. Und wenn konjugierte Punkte A, A' gegeben sind, so muß s durch A oder s' durch A' gehen. Konjugierte Geraden kommen in jenen sechs Sig-

naturen nicht vor. Es kann diesen Bedingungen nur bei (2110) genügt werden, bei allen fünf andern ist also $\lambda = 0$. Denn z. B. bei:

$$(3010) \qquad \left| \begin{array}{cccc} P & Q & R & A \\ p' & q' & r' & A' \end{array} \right|$$

kann s' doch nur mit einer der drei Geraden p', q', r', zusammenfallen, etwa mit p', dann ist s die QR und weder s geht durch A, noch s' durch A'.

Oder fällt bei:

$$(1130) \qquad \left| \begin{array}{ccccc} P & q & A & B & C \\ p' & Q' & A' & B' & C' \end{array} \right|$$

s mit q zusammen, so geht sie nicht durch P; s' ist also p'; jene wie diese geht durch keinen der Punkte A, B, C, bzw. A', B', C'. Geht s durch P, so muß Q' auf s' liegen; geht etwa s noch durch A, so müßte s' durch B', C' gehen, was nicht möglich ist.

Bei

$$(2110) \qquad \left| \begin{array}{cccc} P & Q & r & A \\ p' & q' & R' & A' \end{array} \right|$$

ist $s = PQ$ und $s' = R'A'$ und die Projektivität ist:

$$s(P,\, Q,\, r) \barwedge s'(p',\, q',\, R');$$

also $\lambda = 1$.

Mithin ist $\dot{\lambda} = 0$ bei (3000), (2020), (1120), (1040), (0060),
$\dot{\lambda} = 1$ bei (2100).

Die erste Formel 2) und $\dot{\lambda}(\alpha\beta\gamma\delta)_6 = \bar{\lambda}(\alpha,\, \beta,\, \gamma+1,\, \delta-1)_6$ führen nunmehr zu folgender Tabelle:

	θ	$\dot{\lambda}$	$\bar{\lambda}$		θ	$\dot{\lambda}$	$\bar{\lambda}$
(3000)	6	0	3	(1022)	9	3	6
(2100)	1	1	1	(1013)	6	6	6
(2020)	2	0	1	(1004)	0	6	3
(2011)	7	1	4	(0060)	0	0	0
(2002)	2	4	3	(0051)	0	0	0
(1120)	4	0	2	(0042)	12	0	6
(1111)	2	2	2	(0033)	18	6	12
(1102)	4	2	3	(0024)	12	12	12
(1040)	0	0	0	(0015)	0	12	6
(1031)	6	0	3	(0006)	0	6	3.

Vermittelst: 418

$$\lambda_7(\alpha\beta\gamma\delta)_7 = \dot{\lambda}(\alpha,\, \beta,\, \gamma-1,\, \delta)_6 = \bar{\lambda}(\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta-1)_6$$

und

$$\pi(\alpha\beta\gamma\delta)_7 = \lambda(\alpha\beta\delta\gamma)_7$$

erhalten wir für die λ und π der Signaturen $(\alpha\beta\gamma\delta)_7$ folgende Werte, zu denen gleich die vermittelst der Formeln 1) berechneten Werte μ, ν hinzugefügt sind:

		λ	π	μ	ν
I.	(3010)	0	3	1	2
	(3001)	3	0	2	1
II.	(2110)	1	1	1	1
	(2101)	1	1	1	1
III.	(2030)	0	3	1	2
	(2021)	1	4	2	3
	(2012)	4	1	3	2
	(2003)	3	0	2	1
IV.	(1130)	0	3	1	2
	(1121)	2	2	2	2
	(1112)	2	2	2	2
	(1103)	3	0	2	1

		λ	π	μ	ν
V.	(1050)	0	3	1	2
	(1041)	0	6	2	4
	(1032)	3	6	4	5
	(1023)	6	3	5	4
	(1014)	6	0	4	2
	(1005)	3	0	2	1
VI.	(0070)	0	3	1	2
	(0061)	0	6	2	4
	(0052)	0	12	4	8
	(0043)	6	12	8	10
	(0034)	12	6	10	8
	(0025)	12	0	8	4
	(0016)	6	0	4	2
	(0007)	3	0	2	1.

(λ, π)

Endlich vermittelst

$$(\alpha\beta\gamma\delta)_8 = \mu(\alpha, \beta, \gamma-1, \delta)_7 = \nu(\alpha, \beta, \gamma, \delta-1)_7$$

ergibt sich folgende Tabelle für die Anzahlen ζ_8 der Korrelationen bei allen 55 Signaturen $(\alpha\beta\gamma\delta)_8$:

(4000) = (0400) = 1;
(3100) = (1300) = 1;
(2200) = 0;
(3020) = (0320) =
(3002) = (0302) = 1,
(3011) = (0311) = 2;
(2120) = (1220) =
(2102) = (1202) = 1,
(2111) = (1211) = 1;
(2040) = (0240) =
(2004) = (0204) = 1,
(2031) = (0231) =
(2013) = (0213) = 2,
(2022) = (0222) = 3;
(1140) = (1104) = 1,
(1131) = (1113) = 2,
(1122) = 2;

(1060) = (0160) =
(1006) = (0106) = 1,
(1051) = (0151) =
(1015) = (0115) = 2,
(1042) = (0142) =
(1024) = (0124) = 4,
(1033) = (0133) = 5;
(0080) = (0008) = 1
(0071) = (0017) = 2
(0062) = (0026) = 4
(0053) = (0035) = 8
(0044) = 10.

(ζ)

Die Zahl der Lösungen ist 1, jedesmal, wenn eine der Zahlen γ, δ null ist, d. h. wenn mindestens eine Art der konjugierten Elemente unter den gegebenen Bedingungen fehlt. Ausgenommen ist (2200).

Ferner gilt durchweg, wenn $\gamma \gtrless \delta$ ist und ρ die kleinere dieser Zahlen ist, daß die Anzahl der Lösungen 2^ρ ist; hingegen bleibt in den Fällen $\gamma = \delta = \rho$ die Anzahl der Lösungen hinter der Potenz 2^ρ zurück.

In den einfach unendlichen Systemen $(\alpha\beta\gamma\delta)_7$ von Korre- 419
lationen, bei denen μ oder ν den Wert 1 hat, folgt daraus, wegen der geometrischen Bedeutung der Charakteristiken, daß die Polaren eines Punktes des einen Feldes in allen Korrelationen des Systems einen Büschel bilden, dessen Scheitel jenem Punkte in allen gemeinsam konjugiert ist, bzw. daß die Pole einer Gerade eine Punktreihe erfüllen, deren Träger der Gerade gemeinsam konjugiert ist. Für diese Systeme von Korrelationen bieten sich von selber die Namen: Büschel und Scharen dar. Ein Büschel ($\mu = 1$) führt also zu einer eindeutigen Zuordnung gemeinsam konjugierter Punkte, eine Schar ($\nu = 1$) zu einer eindeutigen Zuordnung gemeinsam konjugierter Geraden.

Die Fälle, wo $\mu = 1$ ist, sind (abgesehen von der Vertauschung von α, β):

(3010), (2110) (und (2101)), (2030), (1130), (1050), (0070).

Von ihnen nimmt (2110), mit dem wir uns noch beschäftigen werden, eine besondere Stellung ein; in den übrigen sind durchweg: $\nu = 2$, $\lambda = 0$, $\pi = 3$. Und zerlegen wir polare Elemente P, p' in zwei Paare konjugierter Elemente P, A'; P, B', wo A', B' auf p' liegen, oder a, p'; b, p', wo a, b durch P gehen, so können wir sie alle unter (0070) als den allgemeinsten Fall subsumieren.

Jeder Punkt X hat einen gemeinsam konjugierten Punkt X', in den die Polaren des X in allen Korrelationen des Büschels zusammenlaufen (und ebenso die von X' in X); jeder Strahl durch X' ist Polare in einer Korrelation des Büschels; wir brauchen ja nur einen beliebigen Punkt auf ihm dem X als konjugiert zuordnen, dann haben wir (0080) mit 1 Lösung. X' selbst dürften wir nicht dem X als konjugiert zuordnen, um aus dem Büschel eine Korrelation auszuscheiden.

Ist Y' dem Y gemeinsam konjugiert, so werden die Büschel X', Y' projektiv und entsprechende Strahlen, Polaren von X, Y in derselben Korrelation des Büschels, schneiden sich im Pole von $XY = l$. Die Pole einer Gerade l in den Korrelationen eines Büschels erzeugen einen Kegelschnitt; das ist schon durch $\nu = 2$ ausgesprochen. Jeder Punkt auf ihm ist ein Pol. Der Kegelschnitt wird aber noch ein zweiter Ort: auf ihm liegen die beiden gemeinsam konjugierten Punkte X', Y' der Punkte X, Y von l; ersetzt man nun diese Punkte durch andere Punkte von l, so wird der Kegelschnitt, als Ort der Pole von l, nicht geändert. Er ist also auch Ort der den verschiedenen Punkten von l gemeinsam konjugierten Punkte, und auch als dieser Ort ergibt er sich durch projektive Büschel, nämlich um die Pole der Gerade l in zwei Korrelationen des Büschels; entsprechend in ihnen sind die Polaren je desselben Punktes von l, und der Schnitt ist der diesem Punkte in beiden und daher in allen Korrelationen des Büschels konjugierte Punkt. Jeder Punkt des Kegelschnitts ist beides: Pol der Gerade l in einer Korrelation des Büschels, gemeinsam konjugiert einem Punkt von l in allen. Die Verbindungslinie zweier Punkte des Kegelschnitts, von denen der eine X' als dem X auf l gemeinsam konjugiert, der andere als Pol von l in der Korrelation Γ des Büschels aufgefaßt wird, ist die Polare des X in Γ.

Der Kegelschnitt, als Ort der gemeinsam konjugierten Punkte der Punkte von l, ist der Kegelschnitt, welcher in der eindeutigen Verwandtschaft der gemeinsam konjugierten Punkte X und X' der Gerade l entspricht; also ist diese Verwandtschaft eine quadratische (Nr. 307).

Alle diese Kegelschnitte gehen durch drei feste Punkte, die wir bei der späteren genaueren Betrachtung der quadratischen Verwandtschaft Hauptpunkte nennen werden. Im Büschel haben wir drei zentrale Korrelationen. Ihre singulären Punkte in Σ' sind die Pole der beliebigen Gerade l in ihnen, also auf allen diesen Kegelschnitten gelegen. Wir haben auf jeder Gerade l einen Punkt, dessen Polare in irgend einer Korrelation des Büschels durch einen dieser Punkte S' geht; sie trifft sich in ihm mit der Polare des nämlichen Punktes auf l in der zentralen Korrelation, für welche S' singulärer Punkt ist; so daß dieser zu jenem gemeinsam konjugiert wird.

Um zwei zusammengehörige singuläre Punkte S, S' haben wir projektive Büschel: die charakteristische Projektivität, und nach konjugierten Punkten müssen entsprechende Strahlen gehen. So liefert uns der Korrelationenbüschel (0070) einen neuen Beweis für das Ergebnis des Problems der ebenen Projektivität (Nr. 233), daß es drei Paare von Punkten gibt, von denen nach zwei siebenpunktigen Gruppen mit entsprechend zugeordneten Punkten projektive Büschel gehen.

Wir fanden: $\mu = 1$ ordnet einem Punkt X einen Punkt X' zu, den gemeinsamen Punkt der Polaren von X, und einer Gerade l von Punkten X wird ein Kegelschnitt von Punkten X' zugeordnet.

$\nu = 2$ ordnet einer Gerade l einen Kegelschnitt zu, den Ort ihrer

Pole. Denn $\nu = 2$ sagt aus, daß von diesen Polen zwei auf eine Gerade in Σ' fallen, die dadurch konjugiert wird zu l. Das ist derselbe Kegelschnitt, den wir eben der Gerade zugeordnet erhielten. Der einer zweiten Gerade m zugeordnete Kegelschnitt hat mit jenem, außer den drei festen Punkten S', einen vierten gemein, denjenigen der dem Punkte lm gemeinsam konjugiert ist, und dreht sich l um lm, so gehen alle diese Kegelschnitte durch ihn und bilden einen Büschel.

Bei der Signatur (2110) $\begin{vmatrix} P & Q & r & A \\ p' & q' & R' & A' \end{vmatrix}$, welche oben aus- 420
genommen wurde, ist $\pi = \lambda = \mu = \nu = 1$.

Sie hat also beide Charakteristiken gleich 1 und je eine Ausartung von beiden Arten.

Die zentrale Korrelation $\mathfrak{C}$ hat S' in $p'q'$ und S so auf r gelegen, daß:

$$\Pi(S, S') \qquad S(P, Q, r, A) \barwedge S'(p', q', R', A');$$

wodurch S eindeutig bestimmt ist (Nr. 224).

Die axiale Korrelation $\mathfrak{A}$ hat $s = PQ$, $s' = R'A'$ und die charakteristische Projektivität ist:

$$\Pi(s, s') \qquad s(P, Q, r) \barwedge s'(p', q', R').$$

Folglich sind jene Strahlenbüschel zu diesen Punktreihen perspektiv; also haben wir auch die Projektivitäten:

$$\Pi(S, s') \qquad S(P, Q, r) \barwedge s'(p', q', R'),$$
$$\Pi(s, S') \qquad s(P, Q, r) \barwedge S'(p', q', R'),$$

Aus ihnen folgt, daß für alle Korrelationen des Systems (2110) die Punkte auf s, bzw. auf s' je den ihnen in der einen oder andern dieser Projektivitäten entsprechenden Strahl durch S' bzw. S zur gemeinsamen Polare haben. Für die Punkte auf s ist es unmittelbar klar. Der Pol aber von s' (in irgend einer der Korrelationen des Systems) muß so beschaffen sein, daß er auf r liegt und derselben Projektivität $\Pi(S, S')$ genügt wie S, also identisch mit S ist; dann haben vier Punkte auf s' in allen Korrelationen dieselbe Polare, folglich alle.

Wegen $\mu = 1$ laufen die Polaren eines Punktes X in Σ in einen Punkt X' in Σ' zusammen; dieser liegt auf s', weil das die Polare in der axialen Korrelation $\mathfrak{A}$ ist, und ist der dem SX in $\Pi(S, s')$ entsprechende Punkt; er ist für alle Punkte von SX der nämliche Punkt auf s', ist ja SX seine gemeinsame Polare. Und ebenso ergibt sich für einen beliebigen Punkt X' von Σ' als gemeinsam konjugierter Punkt X derjenige auf s, welcher in $\Pi(s, S')$ dem Strahle $S'X'$ korrespondiert und für alle Punkte von $S'X'$ derselbe ist.

Nehmen wir also diejenige Korrelation aus dem System, für welche auch noch B und B' konjugiert sind:

$$(2120)\qquad \left|\begin{matrix} P & Q & r & A & B \\ p' & q' & R' & A' & B' \end{matrix}\right|,$$

so ist leicht nach dem eben Gesagten für B im Büschel (2110) der gemeinsam konjugierte Punkt auf s' gefunden; verbinden wir ihn mit B', so haben wir die Polare b' von B in (2120), und diese Bestimmung der Korrelation ist umgewandelt in die einfachere:

$$(3100)\qquad \left|\begin{matrix} P & Q & r & B \\ p' & q' & R' & b' \end{matrix}\right|.$$

Diese Umwandlung haben wir schon in Nr. 413, ohne Heranziehung eines Korrelationenbüschels, kennen gelernt.

Kehren wir zum Büschel (2110) zurück. In der oben besprochenen Beziehung zwischen den gemeinsam konjugierten Punkten X und X' haben wir es mit den beiden ausgearteten Kollineationen zu tun, von denen zur einen die singulären Elemente S, s' und die charakteristische Projektivität $\Pi(S, s')$, zur andern s, S' und $\Pi(s, S')$ gehören.

Gemeinsam konjugiert ist zu einem beliebigen Punkt X in Σ, (der weder in S, noch auf s liegt) der ihm in der ersteren dieser Kollineationen entsprechende X', zu einem beliebigen X' der ihm in der zweiten entsprechende X. Und ebenso ist gemeinsam konjugiert zu einer beliebigen Gerade x die ihr in der zweiten Kollineation entsprechende x' und zu einer beliebigen x' die ihr in der ersten entsprechende x.

Die beiden Geraden, welche in diesen ausgearteten Kollineationen einer Gerade l korrespondieren, nämlich s' und eine durch S' gehende l' setzen den Kegelschnitt des allgemeinen Falls zusammen, der von den gemeinsam konjugierten Punkten der Punkte der l erfüllt wird; und zwar so, daß im allgemeinen s' erfüllt wird und nur, wenn der Punkt auf l nach ls kommt, die l' auf einmal Ort der Pole von l in den Korrelationen des Systems ist l' $(\nu = 1)$.

Bei

$$(2200)\qquad \left|\begin{matrix} P & Q & r & t \\ p' & q' & R' & T' \end{matrix}\right|$$

fanden wir keine Korrelation, weil die Würfe $PQ(P, Q, r, t)$ und $p'q'(p', q', R', T')$ im allgemeinen nicht projektiv sind, wie es die Korrelation erfordert. Sind sie es aber, so ist durch diese Signatur ein ganzer Korrelationenbüschel bestimmt und zwar der eben besprochene (2110); denn man kann dann t durch einen Punkt T auf ihr ersetzen und diesen dem T' als konjugiert zuordnen, weil die Polare von T' durch den in der Projektivität der Würfe dem Strahle

$(p'q', T')$ entsprechenden Punkt auf PQ, also durch (PQ, t) gehen muß, sowie durch T, also mit t zusammenfällt.

Schröter hat, vor Hirst, direkt nachgewiesen[1]), daß in den Fällen (3020), (2040), (1060), (0080) die Korrelation eindeutig bestimmt ist. Wir wollen seine Betrachtungen etwas modifiziert und vereinfacht wiedergeben. 421

Bei der Korrelation:

$$(4000) \quad \left| \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 \\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4 \end{matrix} \right|\ ^{2)}$$

wird die Polare b_5 von A_5 folgendermaßen konstruiert (Nr. 264). Man bestimmt auf b_1, b_2 die Punkte $\mathfrak{B}_5^1$, $\mathfrak{B}_5^2$ so, daß:

$$b_1(b_2, b_3, b_4, \mathfrak{B}_5^1) \barwedge A_1(A_2, A_3, A_4, A_5),$$
$$b_2(b_1, b_3, b_4, \mathfrak{B}_5^2) \barwedge A_2(A_1, A_3, A_4, A_5);$$

es ist dann $b_5 = \mathfrak{B}_5^1 \mathfrak{B}_5^2$.

Wir drehen nun b_4 um B_4, so daß B_4 zu A_4 konjugiert wird und das Korrelationensystem (3010) vorliegt. $\mathfrak{B}_5^1$, $\mathfrak{B}_5^2$ bewegen sich projektiv auf b_1, b_2 und vereinigen sich, wenn b_4 durch $B_{12} = b_1 b_2$ geht, in diesem Punkte; denn die beiden obigen Projektivitäten werden dann ausgeartet, und er ist in beiden singulärer Punkt. Daher dreht sich b_5 um einen Punkt $\mathfrak{B}_5$; und wenn dem A_5 ein konjugierter Punkt B_5 zugeordnet wird, so daß es sich dann um die Korrelation:

$$(3020) \quad \left| \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \\ b_1\ b_2\ b_3\ B_4\ B_5 \end{matrix} \right|$$

handelt, so ist b_5 eindeutig durch $\mathfrak{B}_5$ und B_5 festgelegt und daher auch die Korrelation (3020); sie ist in (4000) übergeführt.

Wir schieben hier eine Anwendung ein, die Konstruktion des sechsten linear abhängigen oder verbundenen Paars (Nr. 228) zu fünf Paaren. Sie seien:

$$G^5 \quad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 \end{matrix};$$

dann legen wir die Korrelation:

$$(3020) \quad \left| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ B_2 B_3 & B_3 B_1 & B_1 B_2 & B_5 & B_4 \end{matrix} \right|$$

fest; sind A_0 und B_0 die Pole von $B_4 B_5$ und $A_4 A_5$, so ergeben sich zwei Paare polarer Dreiecke

$$\begin{matrix} A_1 A_2 A_3 \\ B_1 B_2 B_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} A_4 A_5 A_0 \\ B_4 B_5 B_0 \end{matrix}$$

---

1) Journal für Mathematik, Bd. 62, S. 215.

2) Wir wählen eine etwas geänderte Bezeichnung, teils im Anschluß an Schröter, teils auch weil sie für das Folgende bequemer ist.

dieser Korrelation, und nach Nr. 272 bilden A_0, B_0 das gesuchte Paar[1]).

Aus dieser Betrachtung folgt, daß ein System von sechs linear abhängigen Punktepaaren auf zehn Weisen in zwei Paare polarer Dreiecke zerlegt werden kann, die zu zehn Korrelationen gehören.

$\mathfrak{B}_5$ kann man ebenso konstruieren, wie es im folgenden mit $\mathfrak{B}_6$ geschieht, der zu A_6 gehört und der uns weiterhin wichtiger ist. Wir konstruieren in den Büscheln um $B_{23} = b_2 b_3$, $B_{13} = b_1 b_3$ die Strahlen x_6', y_6' so, daß den Projektivitäten:

$$1) \qquad B_{23}(b_2, b_3, B_4, x_6') \barwedge A_1(A_2, A_3, A_4, A_6),$$

$$2) \qquad B_{13}(b_1, b_3, B_4, y_6') \barwedge A_2(A_1, A_3, A_4, A_6)$$

genügt wird. Wenn b_4 durch B_{23} geht, fällt $\mathfrak{B}_6^2$ (für A_6 so konstruiert, wie vorhin $\mathfrak{B}_5^2$ für A_5) in diesen Punkt B_{23}, $\mathfrak{B}_6^1$ aber in den Schnitt von x_6' mit b_1; daher ist x_6' die $\mathfrak{B}_6^1\mathfrak{B}_6^2$ oder b_6, und wenn b_4 durch B_{13} geht, ist sie y_6'; also ist $x_6'y_6'$ der Punkt $\mathfrak{B}_6$, den wir aber mit $\mathfrak{B}_6'$ bezeichnen wollen.

A_1 und B_{23}, A_2 und B_{13} sind singuläre Punkte für zwei zentrale Korrelationen im Systeme (3010), genauer (3010)′, die der dritten sind A_3, B_{12}.

Wir ersetzen nun A_4, B_4 durch A_5, B_5, wodurch sich (3010)′ in (3010)″ ändert, konstruieren x_6'', y_6'' so, daß:

$$3) \qquad B_{23}(b_2, b_3, B_5, x_6'') \barwedge A_1(A_2, A_3, A_5, A_6),$$

$$4) \qquad B_{13}(b_1, b_3, B_5, y_6'') \barwedge A_2(A_1, A_3, A_5, A_6),$$

und erhalten als Drehpunkt $\mathfrak{B}_6''$ der Polare von A_6 in (3010)″ den $x_6''y_6''$[2]). Daher ist die Polare b_6 von A_6 in (3020), welche den beiden Systemen (3010)′ und (3010)″ gemeinsam ist, die $\mathfrak{B}_6'\mathfrak{B}_6''$.

Für einen andern Punkt A_7 konstruieren wir ebenso x_7', y_7', $\mathfrak{B}_7'$, x_7'', y_7'', $\mathfrak{B}_7''$, b_7; nur A_6 durch A_7 ersetzend.

Jetzt drehen wir b_3 um B_3, so daß das System (2030) sich ergibt; wie bewegt sich b_6 oder, was uns bequemer ist, b_7?

Die Strahlen x_7', y_7' drehen sich um feste Punkte auf B_3B_4, x_7' z. B. um denjenigen X_7', für welchen:

$$B_3B_4(b_2, B_3, B_4, X_7') \barwedge A_1(A_2, A_3, A_4, A_7);$$

sie bewegen sich projektiv zu b_3, und zwar entsteht perspektive Lage, weil in B_3B_4 sich entsprechende Strahlen vereinigen. Also bewegt sich $\mathfrak{B}_7'$ auf einer Gerade; diese geht durch B_{12}, denn in diesen Punkt fällt $\mathfrak{B}_7'$, wenn b_3 durch ihn geht. Ebenso bewegt sich $\mathfrak{B}_7''$ auf einer

1) Rosanes, Journ. f. Math., Bd. 90, S. 309.

2) Statt dieses zweiten Punktes benutzt Schröter hier und weiterhin einen andern, der weniger geeignet scheint.

Gerade und kommt auch nach B_{12}, wenn b_3 durch diesen Punkt geht. Daher sind die beiden von $\mathfrak{B}_7'$, $\mathfrak{B}_7''$ beschriebenen Punktreihen perspektiv, und $b_7 = \mathfrak{B}_7'\mathfrak{B}_7''$ dreht sich um einen Punkt $\mathfrak{B}_7^5$.

Das tut auch die Polare b_6 von A_6; und wird dem A_6 der konjugierte Punkt B_6 zugeordnet, so ist b_6 eindeutig bestimmt und damit auch die Korrelation:

$$(2040) \qquad \left| \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \\ b_1 \; b_2 \; B_3 B_4 B_5 B_6 \end{matrix} \right| .$$

Den $\mathfrak{B}_7^5$ erhalten wir folgendermaßen: Wir konstruieren zunächst die Punkte $S_1{}^5$ auf b_2, $S_2{}^5$ auf b_1 und dann durch sie die Strahlen $x_7{}^5$, $x_7{}^5$, so daß die Projektivitäten:

$$5) \qquad S_1{}^5(b_2,\, B_3,\, B_4,\, B_5,\, x_7{}^5) \barwedge A_1(A_2,\, A_3,\, A_4,\, A_5,\, A_7),$$

$$6) \qquad S_2{}^5(b_1,\, B_3,\, B_4,\, B_5,\, y_7{}^5) \barwedge A_2(A_1,\, A_3,\, A_4,\, A_5,\, A_7)$$

erfüllt werden; um z. B. $S_1{}^5$ zu erhalten, konstruiert man auf B_3B_4 den Punkt $\mathfrak{C}_5$, für welchen:

$$B_3B_4(b_2,\, B_3,\, B_4,\, \mathfrak{C}_5) \barwedge A_1(A_2,\, A_3,\, A_4,\, A_5);$$

der Schnitt $(B_5\mathfrak{C}_5,\, b_2)$ ist $S_1{}^5$.

Geht b_3 durch $S_1{}^5$, der dann B_{23} ist, so fallen die beiden Projektivitäten 1) und 3) in 5) zusammen und $x_7{}^5$ ist sowohl x_7' als x_7''; folglich liegen $\mathfrak{B}_7'$ und $\mathfrak{B}_7''$ auf $x_7{}^5$, und dieser Strahl ist b_7 für jene Lage von b_3. Und geht b_3 durch $S_2{}^5$, dann fällt b_7 in $y_7{}^5$. Daher ist $\mathfrak{B}_7^5$ der Punkt $x_7{}^5y_7{}^5$.

A_1, $S_1{}^5$; A_2, $S_2{}^5$ sind singuläre Punkte zentraler Korrelationen in

$$(2030)^5 \qquad \left| \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \\ b_1 \; b_2 \; B_3 B_4 B_5 \end{matrix} \right| ;$$

das dritte Paar singulärer Punkte besteht, wenn $\mathfrak{A}$ derjenige Punkt ist, für den:

$$\mathfrak{A}(A_1,\, A_2,\, A_3,\, A_4,\, A_5) \barwedge B_{12}(b_1,\, b_2,\, B_3,\, B_4,\, B_5),$$

aus $\mathfrak{A}$ und B_{12}.

Vertauschen wir wiederum A_5B_5 mit A_6B_6 und konstruieren also $S_1{}^6$, $S_2{}^6$, $x_7{}^6$, $y_7{}^6$ so, daß:

$$7) \qquad S_1{}^6(b_2,\, B_3,\, B_4,\, B_6,\, x_7{}^6) \barwedge A_1(A_2,\, A_3,\, A_4,\, A_6,\, A_7),$$

$$8) \qquad S_2{}^6(b_1,\, B_3,\, B_4,\, B_6,\, y_7{}^6) \barwedge A_2(A_1,\, A_3,\, A_4,\, A_6,\, A_7);$$

so ist $\mathfrak{B}_7{}^6 = x_7{}^6y_7{}^6$ der Scheitel des Büschels der Polaren von A_7 im Systeme $(2030)^6$, in dem $\frac{A_5}{B_5}$ durch $\frac{A_6}{B_6}$ ersetzt ist.

Die Verbindungslinie $\mathfrak{B}_7^5\mathfrak{B}_7^6$ ist daher die Polare b_7 von A_7 in (2040).

Wie bewegt sie sich, wenn b_2 sich um B_2 dreht, so daß das System

$$(1050)^6 \quad \left| \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \\ b_1\ B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 \end{matrix} \right|$$

vorliegt?

S_2^5, y_7^5, S_2^6, y_7^6 bleiben fest; S_1^5 hingegen beschreibt einen Kegelschnitt K_1^5, welcher durch B_2, B_3, B_4, B_5 geht und dessen Punkte nach diesen Punkten Würfe senden, die zu $A_1(A_2, A_3, A_4, A_5)$ projektiv sind, und x_7^5 dreht sich um einen festen Punkt Q_7^5 dieses Kegelschnitts und zwar projektiv zu $b_2 = B_2 S_1^5$; folglich bewegt sich $\mathfrak{B}_7^5$ projektiv zu b_2 auf y_7^5.

Ebenso bewegt sich S_1^6 auf einem Kegelschnitte K_1^6 durch B_2, B_3, B_4, B_6, und x_7^6 dreht sich um Q_7^6 auf ihm, so daß $\mathfrak{B}_7^6$ sich projektiv zu b_2 auf y_7^6 bewegt. Die projektiven Punktreihen der $\mathfrak{B}_7^5$ und $\mathfrak{B}_7^6$ sind perspektiv. Denn K_1^5, K_1^6 haben als vierten gemeinsamen Punkt den Punkt O_1^6, für welchen (Nr. 226):

$$O_1^6(B_2, B_3, B_4, B_5, B_6) \barwedge A_1(A_2, A_3, A_4, A_5, A_6).$$

Die Punkte S_1^5, S_1^6 liegen immer in gerader Linie mit B_2 und kommen gleichzeitig nach O_1^6, B_3, B_4. Kommen sie nach O_1^6, so werden die Projektivitäten 5), 7) mit der eben geschriebenen und untereinander identisch; also vereinigen sich x_7^5, x_7^6, so daß Q_7^5, Q_7^6 mit O_1^6 in gerader Linie liegen. Aus dieser Vereinigung folgt, daß x_7^5, x_7^6 perspektive Büschel beschreiben; entsprechende Strahlen gehen nach B_3, wenn S_1^5, S_1^6 in diesen Punkt fallen, und ebenso nach B_4; also ist $B_3 B_4$ die Perspektivitätsaxe. Die Projektivitäten 6), 8) lehren, daß die Büschel S_2^5, S_2^6 ebenfalls perspektiv sind, auch mit $B_3 B_4$ als Axe; so daß y_7^5 und y_7^6 sich auf ihr treffen. Folglich haben wir auch zwei entsprechende Strahlen x_7^5, x_7^6, die gerade in diesem Punkte $y_7^5 y_7^6$ der Axe sich treffen, mithin vereinigen sich in ihm zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{B}_7^5 = x_7^5 y_7^5$ und $\mathfrak{B}_7^6 = x_7^6 y_7^6$.

Daher dreht sich die Polare b_7 von A_7 im Systeme $(1050)^6$ um einen Punkt; wird also B_7, dem A_7 konjugiert, hinzugefügt, dann ist sie und die Korrelation:

$$(1060) \quad \left| \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 \\ b_1\ B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 \end{matrix} \right|$$

eindeutig bestimmt.

Wir wollen aber diesen Drehpunkt genauer für A_8, statt für A_7, ermitteln. Es treten an Stelle von x_7^5, x_7^6 die Strahlen x_8^5, x_8^6 und die Punkte Q_8^5 auf K_1^5 und Q_8^6 auf K_1^6, um die sie sich drehen, und an Stelle von y_7^5, y_7^6 treten y_8^5, y_8^6 bzw. durch S_2^5, S_2^6. Um den Drehpunkt zu erhalten, benutzen wir wiederum zwei spezielle Lagen von b_2.

Erstens gehe sie nach O_1^6, in welchem Punkte dann sich S_1^5 und S_1^6 vereinigen; beide Strahlen x_8^5, x_8^6 fallen in $O_1^6 Q_8^5 Q_8^6$, also beide Punkte $\mathfrak{B}_8^5$, $\mathfrak{B}_8^6$ fallen auf diese Gerade; sie ist die Polare von A_8 für diese Lage von b_2.

Zweitens lassen wir b_2 nach B_3 gehen, in den dann auch S_1^5, S_1^6 fallen, und wollen die diesem Falle entsprechenden Punkte $\mathfrak{B}$ durch einen zweiten oberen Zeiger 3 kennzeichnen. Wir haben dann:

$$(B_3 Q_8^5, y_8^5) = \mathfrak{B}_8^{5,3}, \ (B_3 Q_8^6, y_8^6) = \mathfrak{B}_8^{6,3};$$

die Polare von A_8 ist daher $\mathfrak{B}_8^{5,3}\mathfrak{B}_8^{6,3}$ und der Drehpunkt ist:

$$\mathfrak{B}_8^{5,6} = (Q_8^5 Q_8^6, \ \mathfrak{B}_8^{5,3}\mathfrak{B}_8^{6,3}).$$

Jetzt vertauschen wir $A_6 B_6$ mit $A_7 B_7$, so daß an Stelle des bisherigen Systems $(1050)^6$ tritt: $(1050)^7$; es bleiben unverändert der Kegelschnitt K_1^5, die Punkte Q_8^5, S_2^5 und der Strahl y_8^5. An Stelle von K_1^6 tritt ein durch B_2, B_3, B_4, B_7 gehender Kegelschnitt K_1^7 mit einem neuen Punkt Q_8^7, der mit Q_8^5 und einem an Stelle von O_1^6 tretenden Punkte O_1^7 in gerader Linie liegt; an Stelle von S_2^6, y_8^6 treten S_2^7, y_8^7.

Ist dann $(B_3 Q_8^7, y_8^7) = \mathfrak{B}_8^{7,3}$, so ist

$$\mathfrak{B}_8^{5,7} = (Q_8^5 Q_8^7, \ \mathfrak{B}_8^{5,3}\mathfrak{B}_8^{7,3})$$

der Punkt, um den sich die Polare von A_8 in dem Systeme $(1050)^7$ dreht. Die Verbindungslinie $\mathfrak{B}_8^{5,6}\mathfrak{B}_8^{5,7}$ ist die Polare b_8 von A_8 in der beiden Systemen gemeinsamen Korrelation (1060).

Endlich drehen wir noch b_1 um B_1 und sehen zu, wie b_8 sich bewegt. Die Punkte S_2^5, S_2^6, S_2^7, welche alle je auf b_1 liegen, beschreiben drei Kegelschnitte K_2^5, K_2^6, K_2^7, welche sämtlich durch B_1, B_3, B_4 und bzw. durch B_5, B_6, B_7 gehen. Die Strahlen y_8^5, y_8^6, y_8^7 drehen sich um Punkte R_8^5, R_8^6, R_8^7, welche bzw. auf diesen Kegelschnitten liegen, und zwar projektiv zu b_1. Kommt S_2^5 nach B_3 und damit auch S_2^6, S_2^7, so gehen alle drei Strahlen y durch diesen Punkt, und die drei Strahlenbüschel schneiden daher in $B_3(Q_8^5, Q_8^6, Q_8^7)$ drei perspektive Punktreihen der $\mathfrak{B}_8^{5,3}$, $\mathfrak{B}_8^{6,3}$, $\mathfrak{B}_8^{7,3}$ ein. Demnach beschreibt $\mathfrak{B}_8^{5,3}\mathfrak{B}_8^{6,3}$ einen Strahlenbüschel und ebenso $\mathfrak{B}_8^{5,3}\mathfrak{B}_8^{7,3}$, welche beide zu dem der b_1 projektiv sind; und durch diese Strahlenbüschel entstehen wiederum auf den Geraden $Q_8^5 Q_8^6$ und $Q_8^5 Q_8^7$ projektive Punktreihen der $\mathfrak{B}_8^{5,6}$, $\mathfrak{B}_8^{5,7}$. Wenn aber y_8^5, um R_8^5 sich drehend, durch Q_8^5 geht, fällt $\mathfrak{B}_8^{5,3}$, ihr Schnittpunkt mit $B_3 Q_8^5$, in Q_8^5, also auch der Schnittpunkt von $\mathfrak{B}_8^{5,3}\mathfrak{B}_8^{6,3}$ mit $Q_8^5 Q_8^6$ und von $\mathfrak{B}_8^{5,3}\mathfrak{B}_8^{7,3}$ mit $Q_8^5 Q_8^7$; d. h. zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{B}_8^{5,6}$, $\mathfrak{B}_8^{5,7}$ fallen in den Q_8^5. Die Reihen dieser Punkte sind perspektiv, und die Verbindungslinie $b_8 = \mathfrak{B}_8^{5,6}\mathfrak{B}_8^{5,7}$, die Polare von A_8 im System (0070), dreht sich um einen Punkt, den zwei beliebige Lagen von b_1 durch B_1 liefern, und ist eindeutig bestimmt, wenn B_8 dem A_8 konjugiert wird. Das gilt also auch für die Korrelation:

$$(0080) \qquad \left| \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 \end{matrix} \right| .$$

Die Polare irgend eines Punktes A_9 in dieser Korrelation erhält man dann als Verbindungslinie der Drehpunkte der Polaren von A_9 in zwei Systemen (0070), wie:

$$(0070)^7 \quad \left| \begin{matrix} A_1 \ldots A_7 \\ B_1 \ldots B_7 \end{matrix} \right|, \qquad (0070)^8 \quad \left| \begin{matrix} A_1 \ldots A_6 A_8 \\ B_1 \ldots B_6 B_8 \end{matrix} \right| .$$

Wir stellen die zur Herstellung dieser Polare notwendigen Konstruktionen zusammen:

Wir konstruieren auf irgend einer Gerade b_2 durch B_2 die drei Punkte $S_1{}^5$, $S_1{}^6$, $S_1{}^7$, für welche:

$$S_1{}^5(B_2, B_3, B_4, B_5) \barwedge A_1(A_2, A_3, A_4, A_5),$$
$$S_1{}^6(B_2, B_3, B_4, B_6) \barwedge A_1(A_2, A_3, A_4, A_6),$$
$$S_1{}^7(B_2, B_3, B_4, B_7) \barwedge A_1(A_2, A_3, A_4, A_7);$$

dadurch sind die Kegelschnitte:

$$K_1{}^5 = (B_2 B_3 B_4 B_5 S_1{}^5), \quad K_1{}^6 = (B_2 B_3 B_4 B_6 S_1{}^6), \quad K_1{}^7 = (B_2 B_3 B_4 B_7 S_1{}^7)$$

bestimmt. Diese schneiden wir zum zweiten Male mit den bzw. durch $S_1{}^5$, $S_1{}^6$, $S_1{}^7$ gehenden Strahlen, welche in den Projektivitäten dem Strahle $A_1 A_9$ entsprechen, in $Q_9{}^5$, $Q_9{}^6$, $Q_9{}^7$.

Ebenso konstruiere man auf einer Gerade b_1 durch B_1 die drei Punkte $S_2{}^5$, $S_2{}^6$, $S_2{}^7$, für welche:

$$S_2{}^5(B_1, B_3, B_4, B_5) \barwedge A_2(A_1, A_3, A_4, A_5),$$
$$S_2{}^6(B_1, B_3, B_4, B_6) \barwedge A_2(A_1, A_3, A_4, A_6),$$
$$S_2{}^7(B_1, B_3, B_4, B_7) \barwedge A_2(A_1, A_3, A_4, A_7);$$

dadurch sind ebenfalls drei Kegelschnitte bestimmt:

$$K_2{}^5 = (B_1 B_3 B_4 B_5 S_2{}^5), \quad K_2{}^6 = (B_1 B_3 B_4 B_6 S_2{}^6), \quad K_2{}^7 = (B_1 B_3 B_4 B_7 S_2{}^7),$$

welche mit den durch $S_2{}^5$, $S_2{}^6$, $S_2{}^7$ bzw. gehenden Strahlen, die in den Projektivitäten dem Strahle $A_2 A_9$ entsprechen, zum zweiten Male in $R_9{}^5$, $R_9{}^6$, $R_9{}^7$ geschnitten werden.

Man konstruiere nun:

$$(B_3 Q_9{}^5, S_2{}^5 R_9{}^5) = \mathfrak{B}_9^{5,3}, \; (B_3 Q_9{}^6, S_2{}^6 R_9{}^6) = \mathfrak{B}_9^{6,3}, \; (B_3 Q_9{}^7, S_2{}^7 R_9{}^7) = \mathfrak{B}_9^{7,3},$$
$$(Q_9{}^5 Q_9{}^6, \mathfrak{B}_9^{5,3} \mathfrak{B}_9^{6,3}) = \mathfrak{B}_9^{5,6}, \; (Q_9{}^5 Q_9{}^7, \mathfrak{B}_9^{5,3} \mathfrak{B}_9^{7,3}) = \mathfrak{B}_9^{5,7},$$
$$\mathfrak{B}_9^{5,6} \mathfrak{B}_9^{5,7} = b_9{}';$$

diese b_9' ist die Polare von A_9 in $\left|\begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 \\ b_1\, B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 \end{matrix}\right|$. Als zweite Lage von b_1 nehmen wir die $B_1 B_4$[1]), wo dann $S_2{}^5$, $S_2{}^6$, $S_2{}^7$ alle drei in B_4 fallen; die R ändern sich nicht. Es sei b_9'' die Gerade, die dadurch erhalten wird; es ist dann $b_9' b_9''$ der Punkt, um den sich die Polare von A_9 im Systeme $(0070)^7$ dreht.

Wir ersetzen jetzt A_7, B_7 durch A_8, B_8, wobei nur die dritten Kegelschnitte und die mit ihnen zusammenhängenden Punkte und Geraden sich ändern; wir erhalten dann den Drehpunkt der Polare von A_9 im Systeme $(0070)^8$ und haben beide Drehpunkte zur Polare in (0080) zu verbinden.

§ 63. Spezialfälle und Übertragung auf die Kollineation.

Den Fall des Polarfeldes können wir vermittelst des Kennzeichens (Nr. 311), daß dreimal zwei konjugierte Punkte oder konjugierte Geraden in beiderlei Sinne konjugiert sind, unter die Bestimmung der Korrelation durch elementare Bedingungen subsumieren. Dieses Kennzeichen umfaßt den Spezialfall, daß einmal ein Punkt und eine Gerade in beiderlei Sinne polar und einmal zwei Punkte oder zwei Geraden in beiderlei Sinne konjugiert sind. Die hier vorausgesetzte Lage der gegebenen Elemente bewirkt, daß die beim Kennzeichen auszuschließende Lage nicht vorliegt. 422

Wegen des involutorischen Charakters der Polarkorrelation fallen die beiden doppelten Bedingungen $\frac{P}{p'}$, $\frac{p}{P'}$ in eine zusammen, und wir haben es nur mit Signaturen $(\alpha\gamma\delta)$ zu tun, wo α das bisherige $\alpha+\beta$ und $2\alpha+\gamma+\delta=5$ ist.

Die folgende Tabelle zeigt, wie sich die Signaturen des Polarfeldes unter diejenigen der allgemeinen Korrelation unterordnen; dabei ist die erlaubte Vertauschung von γ und δ nur bei dem Polarfelde vorgenommen.

$(210)=(201)=(2120)=1,$	$(050)=(005)=(0080)=1,$
$(130)=(103)=(1140)=1,$	$(041)=(014)=(0071)=2,$
$\qquad\qquad=(1060)=1,$	$(032)=(023)=(0062)=4.$
$(121)=(112)=(1131)=2,$	
$\qquad\qquad=(1122)=2,$	

Z. B.

$$(130) \qquad \left|\begin{matrix} P & A & B & C \\ p & A' & B' & C' \end{matrix}\right| \qquad \text{Polarfeld}$$

---

1) Wegen der Konstruktion der $R_9{}^5$, $R_9{}^6$, $R_9{}^7$ empfiehlt es sich, als erste Lage von b_1 eine beliebige anzunehmen.

subsumiert sich unter:

$$(1140)\quad \left|\begin{matrix} P & p & A & A' & B & C \\ p & P & A' & A & B' & C' \end{matrix}\right|$$

oder unter: allgemeine Korrelation.

$$(1060)\quad \left|\begin{matrix} P & A & A' & B & B' & C & C' \\ p & A' & A & B' & B' & C' & C' \end{matrix}\right|$$

Die eben besprochene Konstruktion korrelativer Felder aus acht Paaren konjugierter Punkte:

$$(0080)\quad \left|\begin{matrix} A_1 \ldots A_8 \\ B_1 \ldots B_8 \end{matrix}\right|$$

muß zu derjenigen des Polarfeldes aus fünf Paaren konjugierter Elemente:

$$(050)\quad \left|\begin{matrix} A_1 \ldots A_5 \\ B_1 \ldots B_5 \end{matrix}\right|$$

führen, indem die drei weiteren Paare $\frac{A_6\,A_7\,A_8}{B_6\,B_7\,B_8}$ von vorhin jetzt etwa $\frac{B_1\,B_2\,B_3}{A_1\,A_2\,A_3}$ sind.

Erwähnen wir, daß das einfach unendliche System (040), das sich unter (0070) subsumiert, die Büschel-Eigenschaft hat, daß die Polaren eines festen Punktes in einen Punkt zusammenlaufen, und (004) die duale Eigenschaft, daß die Pole einer Gerade auf einer Gerade liegen.

(121) = 2 sagt z. B. aus, daß es zwei Polarfelder oder Kegelschnitte gibt, für welche Pol und Polare, zweimal zwei konjugierte Punkte und einmal zwei konjugierte Geraden gegeben sind.

Ein Pol P, der auf seiner Polare p liegt, bedeutet, daß der Kegelschnitt p in P berühren soll; die Vereinigung von A' mit A oder von a' mit a, daß er durch A gehen, bzw. a berühren soll. Demnach umfaßt (050) = 1 einen allgemeinen Satz und fünf spezielle, je nach der Anzahl von Vereinigungen konjugierter Punkte, und ebenso (041) = 2 und (032) = 4 (vgl. Nr. 186).

In (130) steckt als Spezialfall die Bestimmung des Kegelschnitts durch Pol und Polare und drei auf ihm liegende Punkte. Sind zwei von ihnen konjugiert imaginär, die darstellende Involution also die der konjugierten Punkte auf der Verbindungslinie, so bestimme man ihn durch Pol und Polare, zwei Paare konjugierter Punkte aus dieser Involution und den dritten Punkt, so daß wiederum (130), etwas allgemeiner, vorliegt.

Daß ein Brennpunkt gegeben ist, ist eine durch zwei elementare Bedingungen auszudrückende doppelte Bedingung. Reell lautet sie, daß zwei durch ihn gehende Paare von rechtwinkligen Strahlen aus konjugierten Strahlen bestehen; dadurch wird die ihm zugehörige Involution konjugierter Strahlen die rechtwinklige.

In imaginärer Fassung lautet sie: die durch den Punkt gehenden isotropen Strahlen sollen den Kegelschnitt berühren. Ist auch noch die ihm zugehörige Direktrix gegeben, so liegt eine weitere Doppelbedingung vor, daß ihm seine Polare zugeordnet ist.

Ein gegebener Mittelpunkt bedeutet auch, daß Pol und Polare gegeben sind; durch zwei konjugierte Durchmesser, welche gegeben sind, tritt hinzu, daß zwei konjugierte Geraden oder zwei konjugierte Punkte, ihre unendlich fernen Punkte, gegeben sind; so daß es sich um eine dreifache Bedingung handelt. Es ist ja dann ein Polardreieck gegeben, das man als drei Paare konjugierter Punkte oder als drei Paare konjugierter Geraden auffassen kann. Welche Auffassung bei zwei gleich möglichen dualen die geeignetere ist, kommt auf die weiteren Bedingungen an: diejenige, die zur kleineren Anzahl führt. Denken wir z. B. den Kegelschnitt durch Brennpunkt, Direktrix und einen Punkt bestimmt, welche Bestimmung eindeutig ist, so ist es besser, statt der konjugierten Strahlen durch den Brennpunkt die von ihnen eingeschnittenen konjugierten Punkte auf der Direktrix zu nehmen; man hat dann (130), im andern Falle (112)[1]. Ist aber, statt des Punktes, eine Tangente gegeben, was an der Eindeutigkeit nichts ändert, so sind die konjugierten Strahlen vorzuziehen, welche zu (103) führen.

Ebenso bei der dreifachen Bedingung, daß zwei konjugierte Durchmesser gegeben sind, sind diese oder ihre unendlich fernen Punkte vorzuziehen, je nachdem etwa zur endgültigen Bestimmung Tangenten oder Punkte gegeben sind.

Sind der Mittelpunkt und auf einem Durchmesser zwei konjugierte Punkte gegeben, so ist die ganze Involution konjugierter Punkte auf ihm, von welcher der Mittelpunkt der Zentralpunkt ist, gegeben, also die Potenz oder das Halbmesser-Quadrat. Ist es positiv, so wird man einfacher den Halbmesser selbst geben. Man sieht, die Bestimmung der Ellipse durch zwei konjugierte Halbmesser fällt unter (130).

Macht man bei einem einfachen (ebenen) Fünfecke $ABCDE$ je die Endpunkte der Diagonalen zu konjugierten Punkten, so hat man eine Polarkorrelation (050); jede Ecke hat die Gegenseite zur Polare und es handelt sich um die in Nr. 311 besprochene Polarkorrelation.

---

1) Die zweite Lösung, die sich bei dieser Signatur ergibt, wird durch den Doppelbüschel um den Brennpunkt gebildet: für diesen, als Kegelschnitt, ist die zu seinem Scheitel gehörige Involution konjugierter Strahlen unbestimmt und jeder Punkt der Ebene sendet zwei vereinigte Tangenten aus, gehört zur Punktkurve, die also unbestimmt ist.

Sie kann auch, wenn $F = (AB, CD)$ ist, durch das Polardreieck ADF und BC als Polare von E bestimmt werden: (130)[1]).

Dieses Polarfeld lehrt uns, daß der Wurf der fünf Ecken dem der Gegenseiten projektiv ist (Nr. 270).

Wir bestimmten in Nr. 319 ein Polarfeld durch zwei Involutionen konjugierter Punkte, welche von konjugierten Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ getragen werden; nehmen wir aus jenen je zwei Paare, so kommen wir zur Signatur (041). Es ergab sich aber, daß die beiden Punkte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, welche dem gemeinsamen Punkte $\mathfrak{C} = \mathfrak{ab}$ gepaart sind, auch konjugiert sind, und so haben wir ein Polardreieck $\mathfrak{ABC}$ und aus jeder der beiden Involutionen noch ein Paar, mithin die Signatur (050) und eindeutige Bestimmung.

423 Signaturen von Polarfeldern, denen nur eine Lösung entspricht, sind (210), (130), (050) (und die dualen). Die Herstellung der so bestimmten Polarfelder, d. h. die Konstruktion der Polare zu einem beliebig gegebenen Pole soll nunmehr besprochen werden, wobei wir erinnern, daß in Nr. 320 schon einige einfachere Fälle behandelt worden sind. Der Fall, daß zweimal Pol und Polare gegeben sind und zwei konjugierte Punkte:

$$(210) \qquad \left| \begin{array}{ccc} P & Q & A \\ p & q & A' \end{array} \right|,$$

ist schon dort behandelt.

Es seien gegeben einmal Pol und Polare und dreimal konjugierte Punkte:

$$(130) \qquad \left| \begin{array}{cccc} P & A & B & C \\ p & A' & B' & C' \end{array} \right|.$$

Sehen wir zunächst von der letzten Bedingung ab, so ergibt sich ein System 1. Stufe von Polarfeldern (Büschel), in welchem der Pol von PA, welcher F heißen möge, die Gerade p durchläuft. Jedesmal ist FA' die Polare von A, und wir haben die Involution konjugierter Strahlen um F, nämlich: $F(P, p;\ A, A')$; ist dann B_1' der Schnitt von PA mit dem Strahle, der in dieser Involution dem FB gepaart ist, so ist dieser Punkt der Pol von FB und der ähnlich konstruierte Punkt C_1' der Pol von FC. Die Polare von B ist daher $B'B_1'$; der Schnitt G dieser Gerade mit p ist der Pol von PB, und wiederum haben wir die Involution konjugierter Strahlen um G, nämlich: $G(P, p;\ B, B_1'B')$. Konstruieren wir daher den dem Strahle GC gepaarten Strahl und schneiden ihn in C_2' mit PB, so ist C_2' Pol von GC, und die Polare von C muß durch C_2' auf PB gehen, wie vorhin durch C_1' auf PA. Nun soll sie aber, nach der

1) Staudt, Geometrie der Lage, Nr. 238; Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl., Abt. II, S. 125.

letzten gegebenen Bedingung, durch C' gehen; also kommt es darauf an, einen Punkt F auf p zu gewinnen, für den diese drei Punkte in gerader Linie liegen. Die Punkte F auf p und B_1' auf PA bewegen sich projektiv. Denn jedem F entspricht ein Punkt B_1'; und wenn B_1' auf PA gegeben ist, so ist der Ort der Punkt X, für welchen, wenn $\mathfrak{P}$ ein Punkt auf p ist, die Strahlenpaare $X(P, \mathfrak{P}; A, A'; B, B_1')$ in Involution sind, eine Kurve 3. Ordnung (Nr. 225), von welcher sich aber hier, wo P, A, B_1' in gerader Linie liegen, diese Gerade, für deren sämtliche Punkte parabolische Involution entsteht, abspaltet; die restierende Kurve 2. Ordnung geht durch $\mathfrak{P}$, und der zweite Schnitt mit p ist der einzige dem B_1' entsprechende Punkt F.

Ebenso bewegen sich F und C_1' projektiv, ferner B_1' und G perspektiv, dieser Punkt auf p und C_2' auf PB wiederum projektiv. Daher tun es auch C_1' auf PA und C_2' auf PB.

Wenn F in den Schnittpunkt (p, PA') fällt, so wird die Involution parabolisch; daher rücken B_1' und C_1' in P; mithin fällt G in den Schnitt (p, PB'), also auch C_2' in P. Daher sind die von C_1' und C_2' beschriebenen Punktreihen in perspektiver Lage, und eine Verbindungsgerade $C_1'C_2'$ geht durch C'. Diese ist die Polare c von C in (130). Zwei Lagen von C_1', C_2' liefern das Perspektivitätszentrum $\mathfrak{C}$ und damit diese Polare $C'\mathfrak{C}$. Wir haben nun zweimal Pol und Polare: P, p; C, c und einmal konjugierte Punkte A, A', könnten aber in derselben Weise auch die Polaren von A, A', B, B', C' konstruieren.

Nun seien fünf Paare konjugierter Punkte gegeben:

$$(050) \qquad \left|\begin{matrix} A & B & C & D & E \\ A' & B' & C' & D' & E' \end{matrix}\right|;$$

wir nehmen die vier ersten, so daß ein einfach unendliches System (040) von Polarfeldern vorliegt. Jede Gerade a durch A' als Polare von A bestimmt nach dem Vorangehenden eins dieser Polarfelder und darin als Polare b von B einen durch B' gehenden Strahl; ebenso ist a eindeutig durch b bestimmt. Die Strahlen a und b bewegen sich projektiv um A' und B' und erzeugen einen Kegelschnitt, der durch A', B' geht, sowie auch durch $(A'B, B'A)$; denn, nach bekannter Eigenschaft des Polarfeldes, muß, wenn a durch B geht, b durch A gehen[1]).

1) Diese beiden Paare A, a; B, b sind nicht in allgemeiner Lage; sie bedeuten nicht zwei Doppelbedingungen, sondern nur eine Doppelbedingung und eine einfache: $\frac{A\,B}{a\,B'}$, weil die Inzidenz von b mit A eine Folge derjenigen von a mit B ist; wir können also noch beide Bedingungen $\frac{C}{C'}$, $\frac{D}{D'}$ heranziehen. Auch geben, $A\ a$; B, b in dieser Lage nicht die Involutionen auf AB und um ab.

Man konstruiere noch zwei weitere Punkte für den Kegelschnitt. Läßt man jetzt aus den fünf Paaren etwa D, D' weg, so erhält man einen analogen Kegelschnitt, der ebenfalls durch $A', B', (A'B, B'A)$ geht und durch zwei weitere Punkte festgelegt werden kann. Der vierte gemeinsame Punkt, der sich linear konstruieren läßt, sei F; er liefert in $A'F, B'F$ die Polaren a, b von A, B, welche zu (050) gehören, und dies Polarfeld ist nunmehr durch zweimal Pol und Polare und einmal konjugierte Punkte bestimmt.

Man kann auch für

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ a_1 & B' & C' & D' \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ a_2 & B' & C' & D' \end{vmatrix},$$

wo a_1 und a_2 durch A' gehen, die Polaren e_1, e_2 von E konstruieren; die Gerade von E' nach dem Schnittpunkte $e_1 e_2$ ist die Polare von E in (050). Denn die Polaren eines Punktes in den Polarfeldern von

$$(040) \qquad \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix}$$

bilden einen Büschel[1]).

424 Wir übertrugen (Nr. 407) die Ausartungen der Korrelation von den Feldern in die Bündel, nennen sie, je nachdem singuläre Axen (Ebenenbüschel) oder Ebenen (Strahlenbüschel) vorhanden sind, axial, planar und wollen einen Widerspruch, welcher bei der Erzeugung der Fläche 2. Grades durch korrelative Bündel (oder Felder) auftritt, aufklären. Eine Fläche 2. Grades ist bekanntlich durch neun Punkte $O, O', A, \ldots G$ (oder neun Berührungsebenen) gegeben. Wenn O, O' zu Scheiteln der erzeugenden Bündel genommen werden, so werden die Strahlen $O(A, \ldots G)$ die Strahlen $O'(A, \ldots G)$ zu konjugierten haben, denn die entsprechende Ebene von OA geht durch A, also durch $O'A$. Mithin liegt nicht eine Korrelation, sondern ein Korrelationenbüschel (0070) vor, und scheinbar entstehen ∞^1 Flächen. Aber tatsächlich erzeugen alle diese Korrelationen dieselbe Fläche und zwar deshalb, weil jeder Strahl des einen Bündels den ihm gemeinsam konjugierten trifft und daher alle ihm in den verschiedenen Korrelationen entsprechenden Ebenen in demselben Punkte schneidet. Der Korrelationenbüschel enthält drei axiale Korrelationen; von ihnen ist der eine sofort zu erkennen. Die beiden singulären Ebenenbüschel haben die Verbindungslinie OO' zur gemeinsamen Axe und die charakteristische Projektivität ist Identität: jede Ebene entspricht sich selbst. Konjugierte Strahlen müssen ja in entsprechende Ebenen fallen; siebenmal fallen zwei konjugierte Strahlen in dieselbe Ebene,

1) Andersartige Lösungen hat Schröter gegeben: Steiner-Schröters Vorlesungen, § 58 (vgl. Nr. 320).

nämlich OA und $O'A, \ldots$ Mithin sind diese Ebenen sich selbst entsprechend, daher alle. Folglich müssen je zwei in allen Korrelationen konjugierte Strahlen, da sie auch in dieser ausgearteten Korrelation konjugiert sind, in dieselbe Ebene durch OO' fallen, also sich schneiden[1]).

Zur Erzeugung der Fläche ist die eben besprochene axiale Korrelation nicht geeignet, wohl aber die beiden andern, wofern sie reell sind. Ihre Axen sind die Geraden der Fläche aus der einen oder andern Regelschar der Fläche, welche durch O, O' gehen, und die Erzeugung ist die durch projektive Ebenenbüschel um sie, wodurch je die andere Regelschar entsteht (vgl. Nr. 407). Das sonst kubische Problem der (ebenen oder Bündel-) Projektivität, das bei der Bestimmung der drei zentralen oder axialen Korrelationen eines Büschels vorliegt, ist im vorliegenden Falle, wo die eine Lösung bekannt ist, quadratisch geworden.

In Nr. 309 wurde zu einem gegebenen reellen Kegelschnitte K^2 425
und reellen Elementen U, V; u, v eine Korrelation konstruiert, für welche K^2 die Punkt-Kernkurve und $U, \ldots$ die ausgezeichneten Elemente sind, die bei der Betrachtung der ebenen Korrelation so genannt wurden.

Wir holen jetzt die allgemeine Konstruktion nach, bei welcher die Realität nicht vorausgesetzt wird.

Es sei ein Polarfeld Π gegeben; W und w seien in ihm polar, aber nicht inzident, ebenso C und $\mathfrak{c}$. Mit WC schneiden wir $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{C}$ und ziehen durch diesen Punkt eine Gerade c' und diejenige, welche von c' durch C und $\mathfrak{c}$ harmonisch getrennt wird; auf sie sei der Punkt D gelegt, wozu wir dem Punkte C noch den zweiten Namen D' geben; endlich seien noch E und E' zwei Punkte auf einer Gerade durch W, welche in Π konjugiert sind.

Wir legen nunmehr eine Korrelation fest:

$$(2120) \qquad \left| \begin{matrix} W & C & w & D & E \\ w & c' & W & D' & E' \end{matrix} \right|;$$

in welcher Weise die einzige Korrelation mit dieser Signatur vervollständigt werden kann, ist in Nr. 413 gezeigt worden.

Wir wollen dartun, daß das Polarfeld (K^2) der Punkt-Kernkurve dieser Korrelation mit Π identisch ist. W und w entsprechen sich in der Korrelation involutorisch, sind also, weil nicht inzident, die ausgezeichneten Elemente derselben, die wir mit diesen Buchstaben bezeichnet haben; sie sind polar in (K^2). Es seien noch $\mathfrak{W}$ der Schnitt von WC mit w und $\mathfrak{D}$ derjenige mit der Polare d von D',

---

1) In anderer Weise hat dies Schröter in der in Nr. 421 zitierten Abhandlung gezeigt. Hinsichtlich der obigen Aufklärung des Widerspruches sehe man Math. Annalen, Bd. 12, S. 367.

die ja durch D gehen muß. Dieser Punkt $\mathfrak{D}$ fällt mit $\mathfrak{C}$ zusammen. In der Tat, zu W, C, w, d im ersten Felde sind polar im zweiten w, c', W, D'; also ist $WC(W, C, w, d) \barwedge wc'(w, c', W, D')$. Jener Wurf ist $WC\mathfrak{W}\mathfrak{D}$; dieser ist perspektiv zu $\mathfrak{W}\mathfrak{C}WC$, weil $D' \equiv C$, also projektiv zu $WC\mathfrak{W}\mathfrak{C}$; daher ist $\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{C}$, und d ist die Gerade $\mathfrak{D}D \equiv \mathfrak{C}D$, also diejenige, welche von c' durch $C \equiv D'$ und $\mathfrak{c}$ harmonisch getrennt wird. Daraus folgt, daß $\mathfrak{c}$ die Polare von C in (K^2) ist (Nr. 318).

Die Punkte E, E', konjugiert in unserer Korrelation in dem einen Sinne und auf einer Gerade durch W gelegen, sind auch im andern Sinne konjugiert, und daher konjugiert im Polarfelde (K^2).

Somit hat dieses Polarfeld mit dem gegebenen Π gemeinsam: die beiden Paare polarer Elemente W, w; C, $\mathfrak{c}$ und das Paar konjugierter Elemente E, E'; folglich liegt die Signatur (210) vor (Nr. 422), welche nur eine Lösung zuläßt; das bedeutet die Identität von (K^2) mit Π.

Bringen wir W in alle ∞^2 möglichen Lagen und jedesmal c' durch Drehung um $\mathfrak{C}$ in die ∞^1 möglichen Lagen — C und E können fest bleiben und damit $\mathfrak{c}$ und E' —, so erhalten wir ∞^3 ebene Korrelationen, für welche Π das Polarfeld (K^2) ist; das ist ja auch notwendig wegen der ∞^8 Korrelationen und ∞^5 Polarfelder in der gegebenen Ebene.

426 Wir können in dualer Weise eine Korrelation herstellen, für welche ein gegebenes Polarfeld dasjenige der Geraden-Kernkurve ist; beide Konstruktionen übertragen wir in den Bündel, um die beiden Aufgaben zu lösen, korrelative Bündel oder korrelative Felder zu konstruieren, welche eine Rotationsfläche 2. Grades erzeugen (Nr. 399).

Um korrelative Bündel dieser Art zu erhalten, stellen wir einen Polarbündel her, dessen Basiskegel ein Rotationskegel ist (Nr. 342), konstruieren nun eine konzentrische Korrelation, für welche dieser Polarbündel derjenige des Strahlen-Kernkegels ist, verschieben beide korrelativen Bündel parallel und haben erhalten, was wir wollen. Ein Strahl, der seiner entsprechenden Ebene parallel ist, ist, vor der Verschiebung, Kante des Strahlen-Kernkegels; der unendlich ferne Schnitt der Fläche ist der dieses Kegels und berührt die absolute Kurve doppelt.

Der Scheitel des Polarbündels, von dem wir ausgehen, kann ein fester Punkt im Raum sein; in seinem Bündel gibt es ∞^3 „Rotations-Polarbündel"; zu jedem gibt es ∞^3 Korrelationen, für welche er Polarbündel des Strahlen-Kernkegels ist; die beiden Scheitel der erzeugenden Bündel können ∞^6 Lagen einnehmen. Dies führt zur zwölffach unendlichen Mannigfaltigkeit der Konstruktion. Andererseits kann jede gegebene Rotationsfläche auf ∞^5 Weisen erzeugt werden, weil die Scheitel auf ihr beliebig gewählt werden können: in ∞^4 Lagen und bei jedem Paare von Scheiteln noch ∞^1 erzeugende Korrelationen möglich sind (Nr. 424). So ergibt sich die Mannigfaltigkeit $12 - 5 = 7$ der Rotationsflächen 2. Grades und die Allgemeinheit der Lösung.

Wollen wir aber durch korrelative Felder eine Rotationsfläche herstellen, so müssen wir den Asymptotenkegel benutzen und ihn so konstruieren, daß er ein Rotationskegel wird.

Wir fanden (Nr. 395), der Mittelpunkt M einer durch korrelative Felder erzeugten Fläche ist die Mitte der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte R, Q' der beiden Felder; der Asymptotenkegel ist der Ebenen-Kernkegel der beiden Bündel, welche aus M die Felder projizieren. Wir werden daher so zu verfahren haben:

Wir stellen in einem Punkte M einen Rotations-Polarbündel her, dazu eine konzentrische Korrelation, für welche er der Polarbündel des Ebenen-Kernkegels ist; es sei ferner durch M eine Gerade $l \equiv n'$ gelegt und auf sie zwei Punkte R, Q', zu beiden Seiten von M in gleicher Entfernung; sind dann in der Korrelation die Ebenen λ', ν jener Gerade entsprechend, so führe man die Ebene ω des ersten Feldes durch R parallel zu λ', die des andern ω' durch Q' parallel zu ν, wodurch R und Q' die Mittelpunkte der beiden von den Bündeln in den Ebenen hervorgerufenen korrelativen Felder werden und M der Mittelpunkt der durch diese erzeugten Fläche. Dem Asymptotenkegel gehört der gegebene Rotations-Polarbündel zu; also ist sie eine Rotationsfläche. Bleibt man beim Polarbündel, so werden λ' und ν identisch, ω und ω' parallel, und R und Q' die Berührungspunkte von ω und ω' mit der Fläche, also Durchmesser-Endpunkte (Nr. 399).

Die zwölffache Unendlichkeit der Konstruktion ergibt sich daraus, daß M ∞^3 Lagen haben kann, bei jedem Punkte M ∞^3 Rotations-Polarbündel und bei jedem wiederum ∞^3 Korrelationen möglich sind; sodann kann $l \equiv n'$ jedesmal ∞^2 Lagen haben und auf ihr sind ∞^1 Paare R, Q' möglich[1]).

Was für die Korrelation erhalten ist, gilt auch für die Kollineation. Für sie bedeutet, wenn Felder Σ, Σ' vorausgesetzt werden, die Signatur $(\alpha\beta\gamma\delta)_8$, daß α-mal zwei gegebene Punkte P, P', β-mal zwei gegebene Geraden p, p' zugeordnet sein sollen, daß γ-mal einem Punkt A ein Punkt entsprechen soll, der auf a' liegt, oder, was dasselbe, der a' eine Gerade, die durch A geht, und δ-mal einer Gerade b eine durch den Punkt B' gehende Gerade entsprechen soll. Für die Beziehung zwischen A und a', b und B' ist noch nicht ein geeigneter Name eingeführt; 427

1) Vgl. hierzu G. Müth, Die projektive Erzeugung der Rotationsflächen 2. Grades, Diss. von Breslau. 1905,

das Wort „konjugiert" hat man der Korrelation vorbehalten; es sei gestattet, es auch für die Kollineation anzuwenden. Die letzteren einfachen Bedingungen gehen durch Vertauschung der Felder ineinander über und sind also nicht wesentlich verschieden; dagegen sind die ersteren doppelten verschieden und, um sie ineinander überzuführen, ist Dualisierung erforderlich. Man stelle zwischen Σ' und einem beliebigen Felde Σ'' eine Korrelation her; sie wandelt die gegebenen Elemente in Σ' in die dualen in Σ'' um, und diese bilden daher mit denen in Σ die früheren Korrelationsbedingungen. Jede Kollineation zwischen Σ, Σ', die den gegebenen Bedingungen genügt, führt zu einer Korrelation zwischen Σ und Σ'', die diesen umgewandelten Bedingungen genügt; und umgekehrt. Wir können also unsere Tabelle ($\mathfrak{Z}$) in Nr. 418 auch für die Kollineation benutzen.

Die Affinität ist durch eine elementare doppelte Bedingung gegeben: das Entsprechen der beiden unendlich fernen Geraden.

Daher ist:

$$\text{Affinität } (\alpha\beta\gamma\delta)_6 = \text{Kollineation } (\alpha,\ \beta+1,\ \gamma,\ \delta)_8;$$

d. h. die Anzahl jener Affinitäten und dieser Kollineationen ist die nämliche. Und wir haben folgende Tabelle für die Affinitäts-Signaturen:

$$\begin{array}{rcl}
(3000) & = 1, & (1040)=(1004)=1,\\
(2100) & = 0, & (1031)=(1013)=2,\\
(1200) & = 1, & (1022) \quad = 2,\\
(0300) & = 1, & (0140)=(0104)=1,\\
(2020)=(2002) & = 1, & (0131)=(0113)=2,\\
(2011) & = 1, & (0122) \quad = 3;\\
(1120)=(1102) & = 1, & (0060)=(0006)=1,\\
(1111) & = 1, & (0051)=(0015)=2,\\
(0220)=(0202) & = 1, & (0042)=(0024)=4,\\
(0211) & = 2, & (0033) \quad = 5.
\end{array}$$

Bei (2100) $\left|\begin{matrix} P & Q & r \\ P' & Q' & r' \end{matrix}\right|$ seien R, R' die Schnitte (PQ, r), $(P'Q', r')$; die Punktreihen PQR und $P'Q'R'$ sind nicht ähnlich; also ist keine Affinität möglich.

Die Ähnlichkeit ist durch das Entsprechen der absoluten Punkte bestimmt (Nr. 287); diese Korrespondenz ist aber auf zwei Weisen möglich — was bei ineinander liegenden Feldern zu Gleichsinnigkeit und Ungleichsinnigkeit führt. Daher haben wir:

$$\text{Ähnlichkeit } (\alpha\beta\gamma\delta)_4 = 2 \times \text{Kollineation } (\alpha+2,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)_8.$$

Es ergibt sich die Tabelle:

$$
\begin{array}{lll}
(2000) = 2, & (1020) = (1002) = 2, & (0040) = (0004) = 2, \\
(1100) = 2, & \qquad (1011) \quad = 4, & (0031) = (0013) = 4, \\
(0200) = 0, & (0120) = (0102) = 2, & \qquad (0022) \quad = 6. \\
 & \qquad (0111) \quad = 2, &
\end{array}
$$

Bei (0200) $\left|\begin{matrix} p & q \\ p' & q' \end{matrix}\right|$ ist die Ähnlichkeit nicht möglich, weil die Winkel pq und $p'q'$ nicht gleich sind; aber das ist nur die diesem Falle entsprechende Form der Doppelverhältnis-Ungleichheit (Nr. 266).

Bei (2000) $\left|\begin{matrix} P & Q \\ P' & Q' \end{matrix}\right|$ und (1100) $\left|\begin{matrix} P & q \\ P' & q' \end{matrix}\right|$ sind die beiden zu Σ ähnlichen Felder in Σ' symmetrisch zueinander in bezug auf $P'Q'$, bzw. das Lot aus P' auf q'.

Daß ∞^4 Ähnlichkeiten zwischen zwei Feldern möglich sind, folgt auch daraus, daß ein zu einem festen Dreiecke von Σ ähnliches Dreieck (von gegebenem Ähnlichkeitsverhältnis) ∞^3 Lagen in Σ' und das Ähnlichkeitsverhältnis ∞^1 Werte haben kann.

Der Kongruenz können nur drei Bedingungen auferlegt werden; es liegen da nur vier wesentlich verschiedene Signaturen vor: (1010), (0110), (0030), (0021).

Bei (1010) $\left|\begin{matrix} P & A \\ P' & a' \end{matrix}\right|$ gibt es vier Kongruenzen; denn es gibt auf a' zwei Punkte in der Entfernung PA von P' und jedesmal können noch die durch PA, $P'A'$ entstehenden Halbebenen auf zwei Weisen zugeordnet (oder Σ' um $P'A'$ umgeklappt) werden.

Bei (0110) $\left|\begin{matrix} p & A \\ p' & a' \end{matrix}\right|$ gibt es zwei Punkte A' auf a' in derselben Entfernung von p', wie sie A von p hat, und wiederum kann man jedesmal die durch die Lote aus A auf p, aus A' auf p' entstehenden Halbebenen in zwei Weisen zuordnen, es gibt also ebenfalls vier Lösungen.

Oder:

Jeder der beiden Punkte A' liefert zwei Ähnlichkeiten (2000) oder (1100), welche, wegen $PA = P'A'$, Kongruenzen sind.

Bei (0030) $\left|\begin{matrix} A & B & C \\ a' & b' & c' \end{matrix}\right|$ handelt es sich darum, ein dem Dreieck ABC kongruentes $A'B'C'$ so dem Dreiseit $a'b'c'$ einzuschreiben, daß A' auf a', ... liegt. Wir bewegen $A'B'$ mit ihren Endpunkten auf a', b'; sie nimmt C' mit, und zwar kann es sowohl auf der einen, als auf der andern Seite geschehen, und durch diese beiden C' werden zwei Ellipsen beschrieben[1]). Ihre Schnittpunkte mit c' geben vier Lösungen.

---

1) Z. B. Steiner-Schröters Vorlesungen, 3. Aufl., Nr. 128.

Lassen wir $A'B'$ eine Gerade c_1' mitnehmen, welche zu ihr so liegt, wie c zu AB, so erzeugen zwei Punkte derselben projektive Punktreihen auf zwei Ellipsen; c_1', die Verbindungslinie entsprechender Punkte, umhüllt eine Kurve 4. Klasse und geht viermal durch C'. Da aber c_1' auch auf der andern Seite von $A'B'$ mitgenommen werden kann, so ergeben sich acht Lösungen bei

$$(0021) \qquad \left|\begin{matrix} A & B & c \\ a' & b' & C' \end{matrix}\right|.$$

Also:

$$(1010) = 4, \quad (0110) = 4, \quad (0030) = 4, \quad (0021) = 8.$$

428 Die Homologie, als spezieller Fall der ebenen Kollineation, involviert wohl drei Bedingungen, die sich aber nicht durch Elementarbedingungen ausdrücken lassen. Sie muß deshalb direkt behandelt werden. Es genügt, dieselben sieben Signaturen:

$$(2010),\ (1110),\ (1030),\ (1021),\ (0050),\ (0041),\ (0032)$$

wie bei der Polarkorrelation zu behandeln. In einem Systeme $(\alpha\beta\gamma\delta)_4$ von Homologien gibt es eine Anzahl ausgearteter Homologien, und zwar λ Homologien (s, S'), d. h. bei denen die Axe singulär im ersten Felde und das Zentrum singulär im zweiten Felde ist, und π Homologien (S, s'); für die erstere Art ist die Korrespondenz der Punkte und Geraden in Nr. 404 beschrieben, die bei der andern ergibt sich durch Vertauschung der Felder. Ferner enthält ein solches System μ, ν Homologien, welche noch eine weitere einfache Elementarbedingung so erfüllen, daß bei den μ der Punkt im ersten, die Gerade im zweiten Felde liegt, bei den ν umgekehrt.

Zwei Punkte A, B in Σ und ein Punkt C' in Σ' führen zu einer Korrespondenz $[\mu, \mu]$ im Büschel C', in welcher die Strahlen zugeordnet sind, die je nach den Punkten gehen, welche A, B in der nämlichen Homologie des Systems entsprechen. Die Koinzidenzen entstehen durch die ν Homologien des Systems, bei denen die Gerade, welche der AB entspricht, durch C' geht, und durch die λ Homologien (s, S'), weil da jene entsprechenden Punkte sich in S' vereinigen. Daraus und aus der dualen Betrachtung folgen die nämlichen Formeln wie in Nr. 414:

$$2\mu = \nu + \lambda; \quad 2\nu = \mu + \pi.$$

Hier wollen wir den Schritt zu den Ausartungen 2. Stufe nicht vollziehen, sondern, weil es sich ohne große Schwierigkeiten machen läßt, λ und π direkt ermitteln.

$$(2000)_4 \qquad \left|\begin{matrix} P & Q \\ P' & Q' \end{matrix}\right|.$$

$\lambda = 1$; $s = PQ$, $S' = (PP', QQ')$; $\pi = 1$ durch Vertauschung der Felder; daher $\mu = \nu = 1$; also:

$$(2010)_5 = (2001)_5 = 1.$$

In der Tat, bei $(2010) \left|\begin{matrix} P & Q & A \\ P' & Q' & a' \end{matrix}\right|$ ist das Zentrum S der Schnittpunkt (PP', QQ'), und wenn SA die a' in A', dem entsprechenden Punkte zu A, trifft, so ist die Axe die Perspektivitätsaxe der beiden Dreiecke PQA, $P'Q'A'$. —

$$(1100)_4 \quad \left|\begin{matrix} P & q \\ P' & q' \end{matrix}\right|.$$

$\lambda = 2$; 1) $s = q$, $S' = P'$; 2) $s = (P, qq')$, $S' = (q', PP')$; ebenso $\pi = 2$. Daher $\mu = \nu = 2$; also:

$$(1110)_5 = (1101)_5 = 2.$$

Für $(1110) \left|\begin{matrix} P & q & A \\ P' & q' & a' \end{matrix}\right|$ wollen wir es direkt einsehen. Wir schneiden PP' mit q, q' in Q, Q'; die beiden Koinzidenzen S, $\mathfrak{S}$ der konjektiven Punktreihen auf dem Zentrumsstrahle PP' bewegen sich (Nr. 71) in der Involution (PQ', QP'). Die Axe s muß $\mathfrak{S}$ mit qq' verbinden und auf ihr, in U, müssen sich PA und $P'A'$ schneiden, wenn A' der entsprechende Punkt zu A ist; durchlaufen S, $\mathfrak{S}$ die Involution, so bewegen sich die Strahlen SAA', s und $UP'A'$ projektiv; A' durchläuft einen Kegelschnitt und fällt zweimal auf a'. —

$$(1020)_4 \quad \left|\begin{matrix} P & A & B \\ P' & a' & b' \end{matrix}\right|.$$

$\lambda = 3$; denn 1) $s = AB$, $S' = P'$; 2) $s = PA$, $S' = (b', PP')$ mit zwei Kombinationen.

$\pi = 3$; 1) $S = P$, s' Verbindungslinie von (SA, a') und (SB, b');
2) S so auf PP' gelegen, daß P', (SA, a'), (SB, b') auf einer Gerade s' liegen; es sind zwei Lagen von S möglich, weil, wenn S die Gerade PP' durchläuft, die Verbindungslinie von (SA, a'), (SB, b') einen Kegelschnitt umhüllt. Daher $\mu = \nu = 3$;

$$(1030)_5 = (1021)_5 = 3. \text{ —}$$

$$(1011)_4 \quad \left|\begin{matrix} P & A & b \\ P' & a' & B' \end{matrix}\right|.$$

$\lambda = 3$; nämlich 1) $S' = P'$, s verbindet A mit $(S'B', b)$,
2) $S' = (PP', a')$, s verbindet P mit $(S'B', b)$,
3) $s = PA$, S' ist der Schnitt von PP' mit der Gerade, welche B' mit sb verbindet. Ebenso $\pi = 3$.

Also ebenfalls $\mu = \nu = 3$;

$$(1021)_5 = (1012)_5 = 3,$$

so daß wir $(1021)_5$ zum zweiten Male gefunden haben. —

$$(0040)_4 \quad \left|\begin{matrix} A & B & C & D \\ a' & b' & c' & d' \end{matrix}\right|.$$

$\lambda = 6$; s verbindet nämlich zwei von den gegebenen Punkten und S' ist der Schnitt der nicht zugeordneten Geraden.

Zu der Zahl $\pi = 6$ der Ausartungen (S, s') führt der Graßmannsche Satz von Nr. 200: Der Ort der Punkte X, für welche die drei Schnitte (XA, a'), (XB, b'), (XC, c') in einer Gerade x liegen, ist eine Kurve 3. Ordnung, welche durch die Punkte A, B, C und die Ecken von $a'b'c'$ geht, und die x umhüllen eine Kurve 3. Klasse, welche a', b', c' und die Seiten von ABC berührt. Die beiden Kurven 3. Ordnung, welche zu A, B, C; a', b', c', bzw. A, B, D; a', b', d' gehören, liefern in ihren sechs Schnitten, außer A, B, $a'b'$, die sechs Zentren S und die Kurven 3. Klasse in den sechs gemeinsamen Tangenten, außer a', b', AB, die zugehörigen Axen s'. Daher $\mu = \nu = 6$;

$$(0050)_5 = (0041)_5 = 6. \text{ —}$$

$$(0031) \quad \left|\begin{matrix} A & B & C & d \\ a' & b' & c' & D' \end{matrix}\right|$$

$\lambda = 6$; 1) $s = AB$, S' ist Schnitt von c' mit (D', ds);
2) $S' = a'b'$, s verbindet C mit $(d, S'D')$;
beidemal gibt es drei Kombinationen.

$\pi = 6$. Für A, B, C; a', b', c' werden die Graßmannschen Kurven konstruiert. Die Schnitte von d mit der Kurve 3. Ordnung liefern drei Zentren S, die entsprechenden Tangenten der Kurve 3. Klasse sind die zugehörigen s'. Die Tangenten aus D' an die Kurve 3. Klasse sind die s' für drei weitere (S, s'), die entsprechenden Punkte auf jener Kurve die zugehörigen S; daher wiederum $\mu = \nu = 6$, und

$$(0041)_5 = (0032)_5 = 6.$$

Mithin beträgt die Anzahl der Homologien: 1 bei den Signaturen $(\alpha\beta\gamma\delta)_5$, wo $\alpha = 2$, $\beta = 0$ oder umgekehrt, 2 bei denen, wo $\alpha = \beta = 1$, 3 bei denen, wo $\alpha + \beta = 1$, 6 bei allen, wo $\alpha = \beta = 0$, wo also nur einfache Elementarbedingungen gegeben sind[1]).

429 Wir fanden in Nr. 410, daß für eine Kollineation das Entsprechen von zwei gegebenen Kegelschnitten k, k' (im allgemeinen in verschiedenen Ebenen) eine fünffache Bedingung

1) Vgl. Math. Annalen, Bd. 22, S. 574.

ist. Das gilt also auch für die Kongruenz von Bündeln, weil diese mit dem Entsprechen der isotropen Kegel gleichbedeutend ist.

Es können daher noch drei weitere Bedingungen auferlegt werden. Was nun die elementaren Bedingungen anlangt, so werden, infolge der schon vorliegenden fünffachen Bedingung, die beiden doppelten und die beiden einfachen Bedingungen äquivalent: $\frac{p}{p'}$ mit $\frac{P}{P'}$, $\frac{a}{A'}$ mit $\frac{A}{a'}$, wo P, P' die Pole von p, p' in bezug auf k und k' sind und A Pol von a nach k, a' Polare von A' nach k' ist. Es sind also je vier Signaturen gleich:

$$(1010) = (0110) = (1001) = (0101), \quad (0030) = (0021) = (0012) = (0003);$$

daher genügt es,

$$(1010) \quad \left| \begin{matrix} P & A \\ P' & a' \end{matrix} \right| \quad \text{und} \quad (0030) \quad \left| \begin{matrix} A, & B, & C \\ a', & b', & c' \end{matrix} \right|$$

zu besprechen.

Es seien im ersten Falle Q, R die Berührungspunkte der Tangenten aus P an k und Q', R' die der Tangenten aus P' an k'; diese müssen jenen entsprechen, was auf zwei Weisen möglich ist. Lassen wir zunächst die gleichnamigen homolog sein. Seien dann U, U_1 die Berührungspunkte der Tangenten aus A an k, so muß A' so auf a' liegen, daß für die ihm zugehörigen Berührungspunkte U', U_1', welche mit dem Pole $\mathfrak{A}'$ von a' in gerader Linie liegen, gilt:

$$QRUU_1 \barwedge Q'R'U'U_1';$$

infolgedessen sind U' und U_1' entsprechend in einer Projektivität auf k'; und da an ihren Direktionskegelschnitt von $\mathfrak{A}'$ zwei Tangenten kommen, so erhalten wir in jedem der beiden Fälle des Entsprechens von Q, R und Q', R' zwei Lösungen, also im ganzen vier;

$$(1010) = 4.$$

Bei der zweiten Signatur seien $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ die Pole von a', b', c', und U, U_1; V, V_1; W, W_1 die Berührungspunkte der Tangenten aus A, B, C; so gilt es, auf k' sechs Punkte U', ... W_1' zu finden, so daß:

$$UU_1VV_1WW_1 \barwedge U'U_1'V'V_1'W'W_1'$$

und $U'U_1'$, $V'V_1'$, $W'W_1'$ bzw. durch $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ gehen.

Zu zwei Punkten U', V' auf k' gibt es, wie eben gefunden, zwei Punktepaare $W'W_1'$, so daß $UVWW_1 \barwedge U'V'W'W_1'$ und $W'W_1'$ durch $\mathfrak{C}'$ geht. Jedesmal konstruieren wir V_1', dem V_1 in der Projektivität entsprechend, und erhalten, bei festem Punkte U', jedem Punkte V' zwei Punkte V_1' und jedem V_1' zwei Punkte V' zugeordnet, also eine (nicht involutorische) Korrespondenz [2, 2], an deren Direktionskurve 4. Klasse (Nr. 180) vier Tangenten aus $\mathfrak{B}'$ kommen. Jedesmal wird, in der betreffenden nun schon fünf Paare von entsprechenden Punkten umfassenden Projektivität, der dem U_1 entsprechende U_1' konstruiert. Es ergibt sich eine Korrespondenz [4, 4] der Punkte U', U_1' und in ihr acht Paare, deren Verbindungslinien durch $\mathfrak{A}'$ gehen. Also ist:

$$(0030) = 8.$$

Man übertrage dies auf Bündel und insbesondere kongruente Bündel.

Durch eine ausgeartete Kollineation 1. Stufe geht, haben wir gelernt, ein eigentlicher Kegelschnitt stets in einen ausgearteten über (Nr. 403); also können einfach unendliche Kollineations-Systeme, welche die Bedingung $\frac{k}{k'}$ erfüllen, keine solche Ausartungen enthalten, wohl aber Ausartungen 2. Stufe. Wir wollen z. B. annehmen, daß ein solches System durch die doppelte Bedingung $\frac{P}{P'}$ festgelegt werde. Sind dann wieder Q, R; Q', R' die Berührungspunkte der von P, bzw. P' kommenden Tangenten, so haben wir zwei Systeme von Projektivitäten auf k und k' und zugehörigen Kollineationen $\left|\frac{k}{k'}\right|$. Betrachten wir dasjenige, in welchem Q und Q', R und R' entsprechend sind, so werden die einzelnen Projektivitäten und Kollineationen festgelegt, indem einem festen Punkte T' von k' die verschiedenen Punkte T von k zugeordnet werden. Dabei kann T in Q oder R fallen, und das führt zu Ausartungen. Nehmen wir an, T falle in Q; so haben wir, weil die Verbindungslinie QT der sich vereinigenden Punkte die Tangente QT ist, ausgeartete Projektivität $Q(P, R, T) \barwedge Q'(P', R', T')$ mit den singulären Strahlen QP und $Q'R'$; aber auch $R(P, Q, T) \barwedge R'(P', Q', T')$ ist ausgeartet mit den singulären Strahlen RQ und $R'P'$. Es liegt daher ausgeartete Kollineation zweiter Stufe vor, für welche Q und QP singulär im ersten Felde sind und R', $R'P'$ im zweiten. Daß in einer solchen allgemeine Kegelschnitte entsprechend sein können, haben wir in Nr. 403 erkannt. In den beiden Systemen haben wir je zwei solche Ausartungen, also im ganzen vier. Seien wieder μ, ν die Charakteristiken eines solchen Systems und θ die Anzahl der Ausartungen, so finden wir durch ähnliche Überlegungen wie in Nr. 414:

$$2\nu = \mu + \theta, \qquad 2\mu = \nu + \theta;$$

woraus folgt: $\mu = \nu = \theta$.

Die Gleichheit von μ und ν haben wir schon erkannt. In dem Systeme $\left|\frac{P}{P'}\right|$ ist $\theta = 4$, also auch $\mu = \nu = 4$, in Übereinstimmung mit dem obigen Ergebnisse.

In dem andern Falle, wo das System $\left|\begin{matrix} A & B \\ a' & b' \end{matrix}\right|$ ist, seien wieder U, U_1; V, V_1 die Berührungspunkte der Tangenten aus A, B an k; jede Gruppe von vier Punkten U', U_1'; V', V_1' auf k', bei welcher $U' U_1'$

durch den Pol $\mathfrak{A}'$ von a', $V'V_1'$ durch den Pol $\mathfrak{B}'$ von b' geht und $UU_1VV_1 \barwedge U'U_1'V'V_1'$, führt zu einer Projektivität zwischen k und k' und zugehöriger Kollineation. Wir erhalten acht ausgeartete Projektivitäten und Kollineationen folgendermaßen. Wenn U' und U_1' sich in einem Schnittpunkt $\mathfrak{U}'$ von a' mit k' vereinigen, dem Berührungspunkte der einen Tangente aus $\mathfrak{A}'$, so lassen wir auch V' oder V_1' in ihn fallen und haben die beiden Projektivitäten mit den singulären Punkten V_1 oder V auf k und $\mathfrak{U}'$ auf k'. Der zweite Schnitt von a' und die beiden Schnitte von b' geben noch sechs andere. Also ist $\theta = 8$ und $\mu = \nu = 8$; wie wir oben schon auf andere Weise gefunden haben.

§ 64. Lineare Systeme von Korrelationen zwischen denselben Feldern[1]).

Für den Büschel (0070) von Korrelationen (Nr. 419) haben wir erkannt, daß jeder Punkt des einen Feldes einen ihm in allen Korrelationen des Büschels konjugierten Punkt besitzt, weil, wegen der Charakteristik $\mu = 1$, seine Polaren in ihnen einen Strahlenbüschel bilden. 430

Sind zwei Korrelationen gegeben, so hat jeder Punkt des einen oder andern Feldes einen gemeinsam konjugierten, den Schnitt der beiden Polaren. Wir greifen aus diesen ∞^2 Paaren gemeinsam konjugierter Punkte sieben heraus und bestimmen den Büschel (0070), zu dem die beiden gegebenen Korrelationen gehören, und der ebenso durch jede zwei seiner Korrelationen bestimmt oder konstituiert werden kann. Jeder Gerade l des einen Feldes ist ein Kegelschnitt im andern zugeordnet (Nr. 419), welcher sowohl Ort der Punkte, die den Punkten von l gemeinsam konjugiert sind, als auch Ort der Pole der Gerade l in den einzelnen Korrelationen des Büschels ist.

Hat ein Punkt in beiden Korrelationen dieselbe Polare, so sind ihm irgend zwei Punkte derselben gemeinsam konjugiert in den beiden Korrelationen, also in allen Korrelationen des Büschels; er hat dieselbe Gerade in allen zur Polare. Es wurde schon erwähnt, daß die Paare der gemeinsam konjugierten Punkte, weil eben einer Gerade des einen Feldes ein Kegelschnitt im andern korrespondiert, eine quadratische Verwandtschaft bilden, auf welche wir noch ausführlicher zu sprechen kommen.

Das System der Korrelationen (0007) nannten wir eine Schar; wegen der Charakteristik $\nu = 1$ desselben erzeugen die Pole einer Gerade in seinen Korrelationen eine Gerade, die dadurch jener Gerade in allen Korrelationen der Schar konjugiert wird. Zwei Korrelationen bestimmen also auch eine Schar; denn sie liefern zu jeder Gerade

---

1) Vgl. hierzu Rosanes, Journ. f. Math., Bd. 88, S. 24; Bd. 90, S. 303; Bd. 95, S. 247.

eine gemeinsam konjugierte Gerade, die Verbindungslinie der beiden Pole, und sieben solche Paare geben die Schar. Alle die ∞^2 Paare gemeinsam konjugierter Geraden erzeugen dann eine quadratische Verwandtschaft zwischen den Geraden der beiden Felder, in welcher den Geraden eines Strahlenbüschels des einen Feldes die Tangenten eines Kegelschnitts im andern korrespondieren. Eine Gerade und ein Punkt, welche in zwei Korrelationen polar sind, sind es in allen ihrer Schar.

Der Korrelationenbüschel (0070) enthält drei zentrale Korrelationen. Seien S, S'; S_1, S_1'; S_2, S_2' die singulären Punkte oder, mit kürzerer Bezeichnung, die Zentren dieser ausgearteten Korrelationen. Die Polare von S in der zentralen Korrelation (S, S') ist unbestimmt; ist dann $\mathfrak{s}'$ die Polare von S in einer andern Korrelation des Büschels, so ist jeder Punkt von $\mathfrak{s}'$ dem S konjugiert in beiden Korrelationen, also in allen Korrelationen des Büschels; $\mathfrak{s}'$ ist gemeinsame Polare von S; als Polare in (S_1, S_1'), (S_2, S_2') muß sie durch S_1', bzw. S_2' gehen; folglich ist sie deren Verbindungslinie. Mithin hat jedes von den sechs Zentren eines Korrelationenbüschels eine allen Korrelationen desselben gemeinsame Polare in der Verbindungslinie derjenigen beiden Zentren im andern Felde, die nicht mit ihm zusammengehören. Daraus folgt, daß die Dreiecke der Zentren gemeinsame polare Dreiecke für alle Korrelationen des Büschels sind (Nr. 272).

Eine Schar (0007) hat drei axiale Korrelationen; die Dreiseite der singulären Geraden oder „Axen“ sind gemeinsame polare Dreiseite.

Die drei Zentren eines jeden der beiden Felder liegen auf allen Kegelschnitten, die den Geraden des andern korrespondieren, als Pole derselben in bezug auf die zentralen Korrelationen.

Umgekehrt, es seien $\begin{matrix} A_1 A_2 A_3 \\ B_1 B_2 B_3 \end{matrix}$ zwei Dreiecke, welche in zwei Korrelationen polar sind. A_1 kann höchstens in einer der drei zentralen Korrelationen des Büschels, den sie konstituieren, Zentrum sein; dann muß $B_2 B_3$ als gemeinsame Polare von A_1 (mag er Zentrum sein oder nicht) in den beiden zentralen Korrelationen desselben, für welche er nicht Zentrum ist, durch die im zweiten Felde gelegenen Zentren dieser Korrelationen gehen. Daraus wiederum folgt, daß ihr gemeinsamer Pol A_1 in der Tat Zentrum der dritten zentralen Korrelation ist; denn er ist auch Pol in dieser. Also:

Zwei Korrelationen zwischen denselben Feldern haben nur ein gemeinsames Paar polarer Dreiecke; ihre Ecken sind die Zentren der zentralen Korrelationen des Büschels, den sie bestimmen, und ihre Seiten die Axen der drei axialen Korrelationen ihrer Schar.

Wir fanden (Nr. 273), daß zwei Korrelationen ∞^6 gemein- 431
same Paare polarer Vierseite haben; sie sind allen Korrelationen des Büschels gemeinsam, weil ja die Ecken des einen Vierseits zu denen des andern konjugiert sind. Suchen wir ein solches gemeinsames Paar zu konstruieren unter Benutzung der Herstellung polarer Vierseite für eine einzelne Korrelation, die a. a. O. besprochen wurde.

Es sei zunächst $a_1a_2a_3$ ein beliebiges Dreieck im ersten Felde und $b_1'b_2'b_3'$, $b_1''b_2''b_3''$ seien die polaren Dreiecke in den beiden Korrelationen, so brauchen wir ein Dreieck $b_1b_2b_3$, das zu beiden perspektiv ist und zwar mit derselben Axe b_4; dann sind jene beiden Dreiecke selbst perspektiv mit dieser Axe; da also $b_1'b_1''$, $b_2'b_2''$, $b_3'b_3''$ auf einer Gerade b_4 liegen, so müssen die zu ihnen gemeinsam konjugierten Punkte a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2 auf dem Kegelschnitt liegen, der in der quadratischen Verwandtschaft der Gerade b_4 entspricht, können also nicht alle drei beliebig gewählt sein, sondern nur zwei; diese bestimmen die Gerade b_4, und aus ihr läßt sich leicht der korrespondierende Kegelschnitt herstellen, der jene Punkte enthält und auf dem der dritte Punkt liegen muß. Dem entsprechend sei verfahren worden.

Jetzt sei b_3 beliebig durch $b_3'b_3''$ gezogen; b_1 und b_2 müssen auch durch $b_1'b_1''$, bzw. $b_2'b_2''$ gehen. Die polaren Dreiecke $a_1'a_2'a_3'$, $a_1''a_2''a_3''$ zu dem gesuchten $b_1b_2b_3$ müssen zu $a_1a_2a_3$ koaxial perspektiv sein, also muß $a_1'a_1''$ auf a_1 und $a_2'a_2''$ auf a_2 liegen; andererseits sind diese Punkte gemeinsam konjugiert zu den beiden Punkten b_2b_3 und b_3b_1 von b_3, also auf dem Kegelschnitt gelegen, der in der quadratischen Verwandtschaft der b_3 entspricht, und weil er den a_1a_2, als gemeinsam konjugierten Punkt zu dem auf b_3 gelegenen $b_3'b_3''$, enthält, die zweiten Schnitte der a_1, a_2 mit diesem Kegelschnitte; indem wir diese Punkte $a_1'a_1''$, $a_2'a_2''$ haben, haben wir auch die gemeinsam konjugierten b_2b_3, b_3b_1 und dann auch b_1, b_2, die beiden andern Seiten des gesuchten Dreiecks, als die Geraden von b_3b_1 nach $b_1'b_1''$, von b_2b_3 nach $b_2'b_2''$. Damit ist $b_1b_2b_3$ zu $b_1'b_2'b_3'$, $b_1''b_2''b_3''$ perspektiv gemacht mit b_4 als gemeinsamer Axe. Folglich ist (Nr. 273) auch $a_1a_2a_3$ zu $a_1'a_2'a_3'$ und $a_1''a_2''a_3''$ perspektiv, und da a_1, a_1', a_1'' durch denselben Punkt gehen und ebenso a_2, a_2', a_2'', so ist die Verbindungslinie dieser beiden Punkte die gemeinsame Axe a_4 der Perspektivität; und wir haben in

$$\begin{matrix} a_1a_2a_3a_4 \\ b_1b_2b_3b_4 \end{matrix}$$

gemeinsame polare Vierseite der beiden Korrelationen und ihres Büschels.

Wir konnten $a_1a_2a_3$ in ∞^5 Weisen wählen, nämlich zwei Ecken beliebig, die dritte dann auf einem bestimmten Kegelschnitte, oder auch b_4 beliebig und alle drei Ecken von $a_1 a_2 a_3$ auf dem durch b_4 bestimmten Kegelschnitte. Nun sind $b_1'b_1''$, $b_2'b_2''$, $b_3'b_3''$ auf b_4 bestimmt; b_3 kann noch ∞^1 Lagen durch $b_3'b_3''$ annehmen. So zeigt sich die sechsfache Unendlichkeit aus der Konstruktion.

Jede Korrelation besitzt ∞^6 Paare von polaren Dreiecken, die ∞^8 Korrelationen zwischen gegebenen Feldern also ∞^{14} Paare; mithin gehört, weil es ∞^{12} Paare von Dreiecken gibt, jedes gegebene Paar von Dreiecken zu ∞^2 Korrelationen als ein Paar von polaren. Dieses doppelt unendliche System ist (3000), kann aber, weil in sich dual, auch mit (0300) bezeichnet werden.

Jede Korrelation besitzt (Nr. 273) ∞^{11} Paare polarer Vierseite (oder Vierecke), so daß durch alle Korrelationen sich ∞^{19} ergeben; da es ∞^{16} Paare von Vierecken gibt, so gehört jedes Paar

$$\begin{matrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 \end{matrix}$$

zu ∞^3 Korrelationen als Paar polarer Vierseite, in der Tat zum Systeme:

$$(0050) \qquad \left| \begin{matrix} a_2 a_3 & a_3 a_1 & a_1 a_2 & a_1 a_4 & a_2 a_4 \\ b_1 b_4 & b_2 b_4 & b_3 b_4 & b_2 b_3 & b_3 b_1\,; \end{matrix} \right|$$

denn für alle diese Korrelationen sind (Nr. 273) auch $a_3 a_4$ und $b_1 b_2$ konjugiert.

Bei Vierecken handelt es sich um das System (0005).

432 Es entstehen bei einem Korrelationenbüschel für den Fall, daß die Felder ineinander liegen, die Fragen nach den Systemen, welche durch die Kernkurven der einen und der andern Art gebildet werden, nach den Örtern der ausgezeichneten Elemente W; U, V und w; u, v.

Die Punkt-Kernkurven K^2 bilden einen Büschel; denn jeder Schnittpunkt von zweien ist in den beiden zugehörigen Korrelationen sich selbst konjugiert, also auch in den übrigen des Büschels und liegt daher auf allen Punkt-Kernkurven. Folglich berühren zwei von ihnen eine Gerade.

Eine Gerade wird auch von zwei Geraden-Kernkurven Γ_2 tangiert; denn ihre (einen) Pole erzeugen einen Kegelschnitt, und also fallen zwei von ihnen auf sie. Dadurch wird sie Tangente der beiden zugehörigen Γ_2. Aber die Γ_2 bilden keinen Büschel.

Auf der Verbindungslinie der Punkte W, die zu zwei Korrelationen des Büschels gehören, liegen zwei der einen und andern zugehörige Involutionen doppelt konjugierter Punkte; ihr gemeinsames Paar ist doppelt konjugiert für beide, und daher für alle Korrelationen des Büschels, und die Gerade muß durch alle Punkte W gehen.

Es gibt ein Paar doppelt konjugierter Punkte G', G'', welches allen Korrelationen des Büschels gemeinsam ist; auf seiner Gerade (W) liegen alle Punkte W.

Doppelt konjugierte Punkte sind auch in bezug auf die Kernkurve K^2 konjugiert; also sind G', G'' die Doppelpunkte der Involution, in der diese Gerade (W) den K^2-Büschel schneidet, und Berührungspunkte mit zweien seiner Kurven.

Wenn im speziellen Falle zwei Korrelationen denselben Punkt W besitzen, so gilt für jede Gerade durch ihn, was eben für die einzige Gerade (W) gefolgert wurde; der gemeinsame Punkt ist dann W für alle Korrelationen des Büschels, und es ergeben sich ∞^1 gemeinsame Paare doppelt konjugierter Punkte, sie sind die Doppelpunkte der Involutionen, in denen der Büschel der Kernkurven K^2 von den Strahlen des Büschels W geschnitten wird, oder die Berührungspunkte dieser Strahlen mit Kernkurven und erzeugen daher eine Kurve 3. Ordnung, die durch W geht.

Aber im allgemeinen tritt dies nicht ein. Die Reihe der Punkte W auf jener ausgezeichneten Gerade (W) ist projektiv zu dem Büschel der Korrelationen und dem der Kernkurven K^2; die auf ihr entstehende Korrespondenz [1, 2] der Punkte W und der Schnitte der zugehörigen Kernkurve K^2 lehrt, daß dreimal W auf dieselbe fällt. Die Berührung von K^2 und Γ_2 in zwei getrennten Punkten U, V ist dann eine vierpunktige Berührung in einem Punkte geworden.

Man kann (W) auch erhalten als die Perspektivitätsaxe zweier perspektiven Strahlenbüschel um die Punkte P, Q, in denen entsprechende Strahlen nach den P_1, Q_1 gehen, die diesen Punkten je in derselben Korrelation des Büschels doppelt konjugiert sind; wenn PP_1 durch Q geht, dann liegt auch Q_1 auf dieser Gerade.

Der Kegelschnitt der dem P doppelt konjugierten Punkte P_1 ist, wie man leicht findet, die erste Polare des P nach der Kurve 3. Ordnung (P), die durch den Büschel PW und den zu ihm projektiven K^2-Büschel entsteht.

Der Polarenbüschel von P in bezug auf die Kernkurven K^2 schneidet in die Gerade (W) eine zu der Punktreihe der W projektive Punktreihe; jede der Koinzidenzen ist ein W, dessen Polare in bezug auf den zugehörigen K^2, d. h. die zugeordnete w durch P geht. Die Geraden w der Korrelationen unseres Büschels umhüllen also einen Kegelschnitt (w); sein Tangentenbüschel ist zur Punktreihe der W projektiv, und wir erhalten auch hieraus drei Inzidenzen zusammengehöriger W und w oder vierpunktige Berührungen zwischen K^2 und Γ_2.

Die vier Tangenten aus P an die eben erwähnte Kurve 3. Ordnung (P) sind Tangenten an einen K^2 und gehen durch den zugehörigen W; daher sind sie Geraden u, v für die betreffende Korrelation. Also umhüllen die Geraden u, v der verschiedenen

Korrelationen des Büschels eine Kurve 4. Klasse. Weil (W) zwei Kurven K^2 (oder Γ_2) berührt, für welche sie dann u oder v wird, ist sie Doppeltangente dieser Kurve 4. Klasse.

(W) berührt die zusammengehörigen Kernkurven K^2 und Γ_2 in demselben Punkte (einem U oder V); und die beiden Berührungspunkte mit dem einen und dem andern Kurvenpaar sind die ausgezeichneten Punkte G', G''. Dies sind zwei Schnitte des Orts der Punkte U, V mit der Gerade (W), drei weitere sind die drei Punkte W, die mit U und V sich vereinigen und in denen zwei zusammengehörige Kernkurven sich vierpunktig berühren. Also ist der Ort der Punkte U, V eine Kurve 5. Ordnung.

Die zentralen Korrelationen des Büschels haben eine nicht zerfallende Punkt-Kernkurve, erzeugt durch die charakteristische Projektivität zwischen den Büscheln um die singulären Punkte, und eine ausgeartete Geraden-Kernkurve, bestehend aus diesen Büscheln. Die drei Geradenpaare im K^2-Büschel müssen daher zu nicht ausartenden Korrelationen im Büschel gehören. Nun sind die beiden Kernkurven immer zueinander in der Korrelation, zu welcher sie gehören, polar und zwar in beiderlei Sinne (Nr. 307); also muß, weil die Korrelation allgemein ist, zu einer K^2 des Büschels, welche ein Geradenpaar ist, eine Γ_2 gehören, welche ein Punktepaar ist, und dieses Paar muß zu jenem Paare in beiderlei Sinne polar sein; d. h. wenn $d \equiv e'$, $f \equiv g'$ das Geradenpaar ist, so muß $D' \equiv G$, $F' \equiv E$ das Punktepaar sein; denn so allein kommt die Eigenschaft zustande, daß ein Punkt des Geradenpaars seine beiden Polaren tangential an das Punktepaar, d. h. durch seine Punkte sendet, und eine Tangente des Punktepaars ihre Pole auf dem Geradenpaare hat. Und die weiteren Eigenschaften, welche zwei zusammengehörigen Kernkurven zukommen, fordern, daß der Doppelpunkt des Geradenpaars auf die Doppelgerade des Punktepaars fällt und W von jenem durch die Punkte des letzteren Paars, w von dieser durch die Geraden des Geradenpaars harmonisch getrennt wird. Im Doppelpunkte sind dann U, V, in der Doppelgerade u, v vereinigt, und man erkennt, daß U, u; V, v; W, w in bezug auf beide Kernkurven Pole und Polaren sind (vgl. Nr. 392).

Auf diese Weise sind in das System der Geraden-Kernkurven drei neue Punktepaare gekommen. Wir fanden schon, daß zwei von den Γ_2 eine Gerade berühren; dann schließen wir, vermittelst der Charakteristiken-Formeln für Kegelschnittsysteme 1. Stufe (Nr. 186), daß in dem Systeme der Γ_2 vier durch einen Punkt gehen und daß es kein Geradenpaar enthält, was aber zu erwarten war.

Ein interessanter Spezialfall, auf dessen genauere Untersuchung wir jedoch nicht eingehen können, ist folgender:

In einer Ebene liegen A, B, C' in gerader Linie und ebenso

A', B', C, ferner mögen P und P' so hergestellt sein, daß sowohl PA und $P'A'$, als PB und $P'B'$ auf der Verbindungslinie $s = CC'$ sich schneiden. Es handelt sich dann um den Korrelationenbüschel:

$$(3010) \qquad \left| \begin{matrix} A & B & C & P \\ B'C' & C'A' & A'B' & P' \end{matrix} \right| .$$

Zu jedem Punkte X wird der gemeinsam konjugierte X' ebenso gewonnen, wie P' aus P. Alle Punkte von s sind sich selbst konjugiert, außerdem noch der Punkt $S = (AA', BB')$.

Sämtliche Punkt-Kernkurven zerfallen, und zwar in die feste Gerade s und eine veränderliche k, die durch S geht. Die zentralen Korrelationen haben die Zentren A, A'; B, B'; C, C'; die charakteristischen Projektivitäten entstehen durch perspektive Lage, in den beiden ersten Fällen mit der Axe s; im dritten verbindet sie die drei Punkte $(CA, C'B')$, $(CB, C'A')$ und S.

Auch sämtliche Geraden-Kernkurven zerfallen, und zwar bilden je zwei entsprechende Punkte der Projektivität $ABC' \barwedge A'B'C$ eine solche Kurve.

Es seien drei Korrelationen Γ_1, Γ_2, Γ_3 zwischen denselben Feldern gegeben. Im allgemeinen laufen die drei Polaren eines Punktes X des einen Feldes nicht in einen Punkt zusammen; bewegt man X auf einer Gerade l, so entstehen durch die Polaren drei projektive Büschel um die Pole von l; und dreimal gehen zusammengehörige Polaren durch einen Punkt (Nr. 200). Bei drei Korrelationen gibt es also ∞^1 gemeinsame Paare konjugierter Punkte, welche in den beiden Feldern zwei Kurven 3. Ordnung a^3, b^3 erfüllen. Greifen wir sechs von diesen Paaren heraus, so erhalten wir ein doppelt unendliches System (0060) von Korrelationen, zu dem die drei gegebenen gehören. 433

Ein weiteres Paar konjugierter Punkte bestimmt darin einen Büschel (0070), zwei weitere Paare bestimmen eine Korrelation, welche den beiden Büscheln gemeinsam ist, die durch das eine und das andere Paar einzeln bestimmt werden. Umgekehrt, zwei Korrelationen aus (0060) bestimmen einen Büschel; denn sie haben ∞^2 gemeinsame Paare konjugierter Punkte, darunter die sechs gegebenen; ein beliebiges Paar aus ihnen bestimmt den Büschel. Folglich können wir das System (0060) aus den drei gegebenen Korrelationen Γ_1, Γ_2, Γ_3 fächerförmig erzeugen; denn, ist Γ eine beliebige Korrelation aus ihm, so haben die beiden Büschel $\Gamma\Gamma_1$ und $\Gamma_2\Gamma_3$ eine Korrelation gemein; also befindet sich jede Korrelation des Systems in einem der Büschel, welche Γ_1 mit den verschiedenen Korrelationen von $\Gamma_2\Gamma_3$ verbinden.

Wir nennen deshalb das System ein Netz von Korrelationen, oder auch, weil ja der Büschel, der zwei Korrelationen des Systems verbindet, ihm ganz angehört und daher die eben beschriebene Erzeugung durch Büschel möglich ist, ein büschel-lineares System 2. Stufe. Aus dieser Entstehungsweise folgt, daß die ∞^1 Paare von konjugierten Punkten, welche den drei Konstituenten Γ_1, Γ_2, Γ_3 gemeinsam sind, allen Korrelationen des Netzes zugehören; denn sie sind, wegen der Eigenschaft eines Büschels von Korrelationen, zunächst allen Korrelationen von $\Gamma_2 \Gamma_3$ gemeinsam, dann wiederum allen Korrelationen der Büschel, die von Γ_1 nach den Korrelationen von $\Gamma_2 \Gamma_3$ gehen.

Folglich muß, wenn im Netze (0060) ein Büschel (0070) ausgeschieden wird, als siebentes Paar konjugierter Punkte ein nicht zu diesen ∞^1 allen Korrelationen des Netzes gemeinsamen Paaren gehöriges genommen werden; und ähnliches gilt, wenn aus dem Büschel eine einzelne Korrelation (0080) genommen wird.

Die Eigenschaft, daß zwei Büschel des Netzes immer eine Korrelation gemeinsam haben, lehrt aber auch, daß die drei ursprünglichen Konstituenten durch drei beliebige aus dem Netze ersetzt werden können (wofern sie nur nicht zu demselben Büschel gehören); denn die fächerförmige Erzeugung aus ihnen kann ebenso begründet werden. Und ebenso kann man die sechs festlegenden Paare konjugierter Punkte beliebig durch sechs andere aus der einfach unendlichen Mannigfaltigkeit ersetzen.

Aus dem Netze wird durch die Doppelbedingung, daß ein Punkt in dem einen Felde und eine Gerade im andern Pol und Polare seien, eine Korrelation ausgeschieden, denn es ist $(1060) = 1$; man kann ja auch diese Bedingung in zwei einfache zerlegen, daß nämlich der Punkt zu zwei Punkten der Gerade konjugiert sei.

Die beiden Kurven a^3, b^3 ergaben sich zunächst als Örter der Punkte, welche in allen Korrelationen des Netzes konjugiert sind, und befinden sich infolgedessen in eindeutiger Beziehung ihrer Punkte.

In bezug auf sechs Punktepaare A_i, B_i:

$$G^6 \quad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 \end{matrix}$$

fanden wir (Nr. 231) zwei Kurven 3. Ordnung a_1^3, b_1^3 mit eindeutig zugeordneten Punkten A, B, welche korrespondierend sind, d. h. nach den beiden sechspunktigen Gruppen projektive Büschel senden. Es ergab sich aber noch eine weitere eindeutige Zuordnung der homologen Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ dieser Kurven, nach denen je weitere entsprechende Strahlen aus den projektiven Büscheln A, B gehen (Nr. 232).

Wir erkennen nun, daß die korrespondierenden Punkte A, B zusammengehörige singuläre Punkte zentraler Korrelationen aus dem Netze (0060) sind; die Projektivität zwischen ihnen ist je die charakteristische. Und umgekehrt, alle Zentren zentraler Korrelationen des

Netzes senden nach den beiden Gruppen projektive Büschel, also befinden sie sich auf a_1^3, b_1^3. Indem weiter nach zwei homologen Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ entsprechende Strahlen aus allen diesen Paaren projektiver Büschel gehen, ergeben diese Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sich als gemeinsam konjugiert zunächst in allen zentralen Korrelationen des Netzes und, weil es durch drei von ihnen konstituiert werden kann, in allen. Damit erweisen sich die Kurven a_1^3, b_1^3 mit den a^3, b^3 identisch.

Wir haben also bei einem Netze von Korrelationen zwei Kurven 3. Ordnung a^3, b^3, welche einerseits durch die Punkte entstehen, welche in allen Korrelationen des Netzes konjugiert sind, andererseits auch durch die Zentren der zentralen Korrelationen des Netzes erfüllt werden.

Infolgedessen erhalten wir auf den Kurven die Ecken von ∞^2 Dreiecken, die Zentren der zentralen Korrelationen der Büschel des Netzes, also der Dreiecke, welche gemeinsam polar sind in allen Korrelationen eines solchen Büschels.

Diese Identität der beiden Kurvenpaare ergibt sich auch durch folgende Überlegung. Es sei Γ_0 eine zentrale Korrelation des Netzes und $\mathfrak{A}$ ihr eines Zentrum; es ist in Γ_0 allen Punkten des andern Feldes konjugiert, daher dem $\mathfrak{B}$, der ihm in zwei beliebigen Korrelationen des Netzes gemeinsam konjugiert ist, in allen Korrelationen desselben konjugiert.

Durch $\mathfrak{B}$ geht jede von den Polaren von $\mathfrak{A}$, die er je gemeinsam hat für alle Korrelationen eines Büschels des Netzes, zu welchem Γ_0 gehört; je die beiden andern Schnitte einer dieser Polaren mit b^3 sind die beiden nicht mit $\mathfrak{A}$ zusammengehörigen Zentren dieses Büschels im zweiten Felde.

Ordnet man dem Punkte $\mathfrak{A}$ eine nicht durch $\mathfrak{B}$ gehende Polare zu, so ist die dadurch bestimmte Korrelation des Netzes die zentrale Korrelation Γ_0; ordnet man ihm aber eine durch $\mathfrak{B}$ gehende Polare zu, so ergibt sich ein ganzer Büschel von Korrelationen aus dem Netze, zu welchem immer Γ_0 gehört.

Wenn A', A'', A'''; B', B'', B''' die Zentren der drei zentralen Korrelationen eines Büschels (0070) aus dem Netze sind, so ist zu $\mathfrak{A} \equiv A'''$ der gemeinsam konjugierte Punkt $\mathfrak{B}$ im Netze der dritte Schnitt der gemeinsamen Polare $B'B''$ (im Büschel) mit b^3. Daher sind in den projektiven Büscheln A', B' die Strahlen $A'A'''$ und $B'B''$, weil sie nach $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ gehen, entsprechend, ebenso $A'A''$ und $B'B'''$; desgleichen in den Büscheln A'' und B'' die Strahlen $A''A'''$ und $B''B'$, $A''A'$ und $B''B'''$, und in A''', B''' die $A'''A'$ und $B'''B''$, $A'''A''$ und $B'''B'$.

Diese drei Punktepaare A', B'; A'', B''; A''', B''' sind aber diejenigen, welche im Problem der ebenen Projektivität (Nr. 233) bei zwei siebenpunktigen Gruppen sich ergeben als Paare von korrespondierenden Punkten; also gilt das eben gefundene Entsprechen auch für die drei Paare projektiver Büschel um sie[1]).

Bezüglich der a. a. O. betrachteten Kurven $a^3_{(7)}$ und $a^3_{(6)}$, die in $A_1, \ldots A_5$, A_0, A', A'', A''', und $b^3_{(7)}$, $b^3_{(6)}$, welche in $B_1, \ldots B_5$, B_0, B', B'', B''' sich schneiden, muß, weil $a^3_{(7)}$ und $b^3_{(7)}$, $a^3_{(6)}$ und $b^3_{(6)}$ in bezug auf $G_{(6,{}^5 7)}$ korrespondierend sind, gelten (Nr. 232), daß den Strahlen $A'A'''$, $A''A'''$, die aus den auf $a^3_{(7)}$ und $a^6_{(6)}$ gelegenen Punkten A', A'' kommen und nach dem ebenfalls auf beiden Kurven gelegenen Punkte A''' gehen, Strahlen in B', B'' entsprechen, die auf beiden Kurven $b^3_{(7)}$ und $b^3_{(6)}$ sich schneiden; das tun sie dadurch, daß sie identisch sind: $B'B''$, $B''B'$.

Drei Korrelationen führen aber auch zu ∞^1 Paaren gemeinsam konjugierter Geraden, welche in den beiden Feldern Kurven 3. Klasse umhüllen. Wir gelangen dann zu einem schar-linearen Systeme 2. Stufe von Korrelationen, dem diese Paare konjugierter Geraden gemein sind, und zu dessen Festlegung sechs genügen: (0006). Es entsteht fächerförmig aus drei Konstituenten, indem man mit Scharen statt mit Büscheln arbeitet. Und die beiden Kurven werden von den Axen der axialen Korrelationen dieses Systems umhüllt.

434 In dem dreifach unendlichen System von Korrelationen (0050) bestimmen 1, 2, 3 weitere Paare konjugierter Punkte ein Netz, einen Büschel, eine einzelne Korrelation; zwei Netze aus ihm haben einen Büschel gemeinsam, ein Netz und ein Büschel eine Korrelation. Zwei Korrelationen des Systems liefern einen demselben angehörigen Büschel und drei Korrelationen, nicht aus demselben Büschel, oder ein Büschel und eine nicht in ihm enthaltene Korrelation ein dem System ganz angehöriges Netz. Wenn zwei Büschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ und eine einzelne Korrelation Γ aus dem Systeme vorliegen, so bestimmen $\mathfrak{B}$ und Γ ein Netz, welches mit $\mathfrak{B}_1$ eine Korrelation Γ_1 gemeinsam hat; daher schneidet der Büschel $\Gamma\Gamma_1$ die beiden Büschel $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$, letzteren in Γ_1, ersteren, weil $\Gamma\Gamma_1$ und $\mathfrak{B}$ sich beide in dem Netze $\mathfrak{B}\Gamma$ befinden, dem ja auch Γ_1 angehört. Jede Korrelation des Systems befindet sich in einem der ∞^2 Büschel, welche eine Korrelation von $\mathfrak{B}$ mit einer von $\mathfrak{B}_1$ verbinden; dabei muß jedoch vermieden werden, daß $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ demselben Netze angehören, was der Fall ist, wenn sie sich in einer Korrelation schneiden. Wegen dieser Herstellung des Systems durch Büschel wollen wir es ein büschel-lineares System 3. Stufe, kürzer ein Gebüsche nennen. Alle die Büschel, welche von der nämlichen Korrelation nach denen eines Büschels, etwa $\mathfrak{B}_1$, gehen, bilden das Netz, welches dieselbe mit $\mathfrak{B}_1$ verbindet;

1) S. Kantor, Denkschriften der Wiener Akademie, Bd. 96, S. 92.

man erhält also das Gebüsche auch durch alle die Netze, welche den einen der beiden Büschel $\mathfrak{B}_1$ mit allen Korrelationen des andern $\mathfrak{B}$ verbinden. Sind ferner Γ_1 und Γ_2 fest in $\mathfrak{B}_1$, Γ beweglich in $\mathfrak{B}$, so können wir diese Netze fächerförmig je durch Γ_1 und den Büschel $\Gamma_2\Gamma$ erzeugen, letzterer durchwandert das Netz $\Gamma_2\mathfrak{B}$, und das Gebüsche entsteht durch die Büschel aus Γ_1 nach den Korrelationen eines Netzes aus ihm, welches Γ_1 nicht enthält.

Seien wiederum

$$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$$
$$B_1 B_2 B_3 B_4 B_5$$

die fünf gemeinsamen Paare konjugierter Punkte, so wissen wir aus dem Problem der ebenen Projektivität (Nr. 226), daß jedem Punkte A ein Punkt B korrespondiert, so daß

$$A(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \barwedge B(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5).$$

Folglich sind A, B zusammengehörige Zentren einer zentralen Korrelation aus (0050). Das Gebüsche enthält ∞^2 zentrale Korrelationen; sie erfüllen mit ihren Zentren die ganzen Felder. Jedem der zehn Punkte ist ein vollständiger Kegelschnitt korrespondierend, dem Punkte A_1 z. B. der Kegelschnitt, für dessen Punkte B gilt:

$$B(B_2, B_3, B_4, B_5) \barwedge A_1(A_2, A_3, A_4, A_5).$$

Zu ihnen kommen noch die beiden verbundenen Punkte A_0, B_0, die das sechste linear abhängige Paar bilden (Nr. 228), A_0 entspricht allen Punkten des Kegelschnitts $(B_1 \ldots B_5)$ und B_0 allen von $(A_1 \ldots A_5)$. Nun wurde (Nr. 232) gezeigt, daß in den projektiven Büscheln um korrespondierende Punkte A, B entsprechende Strahlen auch nach diesen Punkten A_0, B_0 gehen; folglich sind dieselben konjugiert zunächst in allen zentralen Korrelationen des Gebüsches. Verbinden wir zweimal zwei zentrale Korrelationen durch Büschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, so sind weiter die Punkte A_0, B_0 konjugiert in allen Korrelationen dieser Büschel, daher in allen Korrelationen irgend eines Büschels, der eine Korrelation von $\mathfrak{B}$ mit einer von $\mathfrak{B}_1$ verbindet, folglich, weil diese Büschel zu allen Korrelationen des Gebüsches führen, in allen. Also:

Alle ∞^3 Korrelationen zwischen zwei Feldern, welche fünf Paare konjugierter Punkte gemeinsam haben, haben noch ein sechstes gemein, das sechste linear abhängige Paar, das zu den fünf Paaren gehört. Wir wissen, es ist linear konstruierbar.

Man kann durch Dualisierung des einen Feldes aus den vorangehenden Sätzen entsprechende Sätze für die Kollineation ableiten.

Es genüge zunächst, den vorangehenden Satz umzuwandeln. Er lautet dann:

Alle ∞^3 Kollineationen zwischen zwei Feldern, bei denen fünf gegebene Punkte $A_1, \ldots A_5$ des einen ihre entsprechenden Punkte auf fünf gegebenen Geraden $b_1, \ldots b_5$ haben, besitzen noch ein sechstes derartiges Paar A_0, b_0[1]).

Einen speziellen Fall unseres Satzes fanden wir schon (Nr. 272): Sind $A_1, \ldots A_5$ die Ecken a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2, a_1a_4, a_2a_4 eines vollständigen Vierseits und $B_1, \ldots B_5$ die Ecken b_1b_4, b_2b_4, b_3b_4, b_2b_3, b_3b_1 eines anderen, so haben alle Korrelationen, in denen die $A_1, \ldots A_5$ den $B_1, \ldots B_5$ konjugiert sind, auch die sechsten Ecken a_3a_4 und b_1b_2 zu konjugierten; und wir sehen nochmals, daß in den sechs Eckenpaaren sechs linear abhängige Punktepaare vorliegen (Nr. 228).

Wir erwähnen einige interessante Fälle.

Liegen die beiden Felder ineinander, so befindet sich unter den ∞^3 Korrelationen ein Polarfeld (Nr. 422 Signatur (050) und Nr. 423), in dem also auch A_0, B_0 konjugiert sind.

Nehmen wir weiter an, daß die fünf Verbindungslinien $A_1B_1, \ldots A_5B_5$ demselben Strahlenbüschel angehören, so befindet sich unter den Korrelationen auch diejenige zentrale, deren Zentren sich im Scheitel vereinigen und deren charakteristische Projektivität die Identität ist, aus lauter sich selbst entsprechenden Strahlen besteht; es gehört demnach auch der Strahl A_0B_0 zum Büschel.

Ferner, wenn A_1 auf b_1, A_2 auf $b_2, \ldots A_5$ auf b_5 liegt, so befindet sich unter den ∞^3 Kollineationen auch die Identität, in der jeder Punkt mit dem entsprechenden sich deckt; also liegt auch A_0 auf b_0.

Dualisieren wir bei dem obigen Satze über zwei Vierseite das eine Feld und setzen sie in derselben Ebene voraus, so haben wir:

Wenn die Ecken a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2, a_1a_4, a_2a_4 eines Vierseits mit den Seiten B_1B_4, B_2B_4, B_3B_4, B_2B_3, B_3B_1 eines Vierecks inzidieren, so inzidiert auch a_3a_4 mit B_1B_2.

Oder dualisieren wir beide Felder, sie ebenfalls in derselben Ebene (oder in parallelen) annehmend, und setzen voraus, daß die Seiten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, A_1A_4, A_2A_4 des einen Vierecks zu den Seiten B_1B_4, B_2B_4, B_3B_4, B_2B_3, B_3B_1 des andern senkrecht sind, so befindet sich unter den Korrelationen, in denen jene diesen konjugiert sind, das ausgeartete Polarfeld, das zu dem Punktepaar der absoluten Punkte gehört und in welchem jede zwei konjugierten Geraden rechtwinklig sind; also sind auch A_3A_4 und B_1B_2 rechtwinklig. Eine

---

1) In dieser Form hat den Satz Clebsch zuerst (ohne Beweis) ausgesprochen: Math. Annalen, Bd. 6, S. 205. Vgl. auch Voß ebenda Bd. 15, S. 255; Rosanes, Journ. f. Math. 88, S. 249; Sturm, Math. Annalen, Bd. 22, S. 570.

Drehung des einen Vierecks um 90^0 führt die Normalität in Parallelismus über.

Wenn vier Korrelationen $\Gamma_1, \ldots \Gamma_4$ gegeben sind, so haben wir für die beiden Netze $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ und $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_4$ je zwei Kurven a^3, b^3, bzw. $\bar{a}^3$, $\bar{b}^3$; gemeinsam sind den a^3 und $\bar{a}^3$, b^3 und $\bar{b}^3$ die Zentren der zentralen Korrelationen des Büschels $\Gamma_1\Gamma_2$. Es sei dann $\mathfrak{A}$ einer der sechs ferneren Schnittpunkte von a^3 und $\bar{a}^3$, so laufen seine Polaren in Γ_1, Γ_2, Γ_3 in einen Punkt zusammen und ebenso die in Γ_1, Γ_2, Γ_4; und da $\mathfrak{A}$ nicht Zentrum einer zentralen Korrelation in $\Gamma_1\Gamma_2$ ist, so ist dies beidemal derselbe Punkt, nämlich der einzige dem $\mathfrak{A}$ im Büschel gemeinsam konjugierte Punkt, der dann einer der weiteren Schnitte von b^3 und $\bar{b}^3$ ist.

Vier Korrelationen zwischen denselben Feldern haben sechs Paare konjugierter Punkte gemeinsam. Sie sind dann allen Korrelationen des Gebüsches gemeinsam, das aus den vier als Konstituenten sich ergibt, indem man zweimal zwei zu Büscheln und die Korrelationen des einen mit denen des andern wiederum zu Büscheln verbindet.

Fünf von diesen Paaren genügen, das Gebüsche festzulegen, und bedingen das sechste; womit der Satz von Clebsch von neuem bewiesen ist.

Ist ein System 4. Stufe von Korrelationen durch vier 435
Paare konjugierter Punkte bestimmt:

$$(0040) \qquad \left| \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 \end{matrix} \right|,$$

so werden axiale Korrelationen möglich; weil von zwei in einer solchen Korrelation konjugierten Punkten stets der eine auf der Axe seines Feldes liegt, so muß die eine Axe zwei von den vier Punkten z. B. A_1, A_2, verbinden, während die beiden ihnen nicht konjugierten B_3, B_4 auf der andern liegen. Das ist auf sechs Weisen möglich. Aber für die Festlegung der charakteristischen Projektivität ist noch nichts durch die gegebenen Punkte geschehen; sie kann noch in ∞^3 Weisen erfolgen; jede dieser sechs unbestimmten axialen Korrelationen zählt ∞^3-fach. Bei den bisherigen büschel-linearen Systemen 1., 2., 3. Stufe (0070), (0060), (0050), in denen es ∞^2, ∞^1, sechs gemeinsame Paare konjugierter Punkte gibt, sind eben deshalb axiale Korrelationen nicht vorhanden, weil zwei Geraden nicht möglich sind, von denen mindestens eine durch einen Punkt aus jedem dieser Paare geht. Nun ist aber an sich die axiale Korrelation eine einfache Bedingung (Nr. 412), und da sie in diesen Systemen, wo man sie, als einfache Bedingung, in endlicher Anzahl, ∞^1-, ∞^2-mal erwarten konnte, nicht möglich ist, so ist es ganz berechtigt, daß sie in dem Systeme

4. Stufe (0040) in dem sie möglich wird, sofort in der Mannigfaltigkeit ∞^3 auftritt.

Während die Systeme (0070), (0060), (0050) allgemein sind, ist (0040) nicht mehr allgemein. Ein allgemeines büschel-lineares System 4. Stufe konstituieren wir durch fünf beliebige Korrelationen, etwa so, daß wir eine von ihnen mit jeder Korrelation des büschellinearen Systems 3. Stufe, das durch die vier andern konstituiert wird, durch einen Büschel verbinden[1]). Wenn vier Korrelationen noch eine endliche Anzahl gemeinsamer konjugierter Punkte besitzen, so gilt das für fünf beliebige Korrelationen nicht mehr. Das System (0040) mit vier gemeinsamen Paaren ist sogar vierfach spezialisiert, indem ihm diejenigen mit ein, zwei, drei Paaren konjugierter Punkte — den fünf Konstituenten und dann allen Korrelationen des Systems gemeinsam — vorangehen.

Ob die allgemeinen büschel-linearen Systeme 4. und höherer Stufe axiale, bzw. die allgemeinen schar-linearen zentrale Korrelationen enthalten, soll später untersucht werden.

In dem Systeme (0040) sind die Zentren der zentralen Korrelationen zwei beliebige Punkte auf zwei analogen Kegelschnitten durch die beiden vierpunktigen Gruppen (Nr. 225).

436 Wenden wir diese Ergebnisse auf die Erzeugung der Fläche 2. Grades durch korrelative Gebilde an; wobei wir die durch Bündel vorziehen, um der Korrelation der Bündel etwas gerecht zu werden.

Ein Korrelationenbüschel (0070) zwischen zwei Bündeln O, O' erzeugt einen Büschel von Flächen 2. Grades; denn sobald ein Strahl von O die ihm in zwei Korrelationen des Büschels entsprechenden Ebenen von O' in dem nämlichen Punkte trifft, trifft er die Axe des Büschels, den alle seine Polarebenen bilden, also alle diese Ebenen in jenem Punkte; jeder gemeinsame Punkt von zweien der erzeugten Flächen liegt auf allen.

Jede der Flächen wird aus O und O' durch einen Korrelationenbüschel erzeugt (Nr. 424); von ihm gehört zu unserem Büschel je nur eine Korrelation.

Die vier Kegel des Flächenbüschels werden durch Korrelationen des Büschels von der Spezialität in Nr. 398 erzeugt.

Ebenso entsteht durch ein Korrelationennetz (0060) und ein Korrelationengebüsche (0050) ein Netz, bzw. Gebüsche von Flächen 2. Grades, denn der fächerförmigen Herstellung jener durch Büschel entspricht die analoge fächerförmige Herstellung dieser Flächensysteme durch Büschel.

Beim Netze (0060) haben wir in den Bündeln zwei Kegel 3. Ord-

1) Eingehendere Erörterungen über lineare Systeme höherer Stufe wird § 97 in Bd. III bringen; aber § 34 in Bd. I hat schon Belehrung gebracht.

nung a^3, b^3 mit in zwei Weisen eindeutig zugeordneten Kanten; die eine Zuordnung ist die der korrespondierenden Kanten a, b, welche nach den sechs Paaren konjugierter Kanten projektive Büschel senden, die Axen axialer Korrelationen des Netzes, die je die betreffende Fläche durch diese projektiven Büschel erzeugen; für die andern Flächen gehören diese Ausartungen nicht zum Netze.

Die homologen Kanten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, welche in allen Korrelationen des Netzes konjugiert sind und nach denen weitere entsprechende Ebenen jener projektiven Büschel gehen, bilden die zweite Zuordnung. Diese Kanten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ rufen in dem gemeinsamen Ebenenbüschel um OO' eine Korrespondenz [3, 3] hervor, in der zwei Ebenen einander entsprechen, welche solche konjugierte Strahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ enthalten. Die sechs Koinzidenzen beweisen, daß es sechs Paare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gibt, die einen Schnittpunkt haben. Diese sechs Schnittpunkte sind die übrigen gemeinsamen Punkte der Flächen des Netzes, außer O, O'.

Nehmen wir an, daß die sieben, sechs oder fünf gegebenen Paare konjugierter Strahlen einen Schnittpunkt C_i haben, dann gehört zum Büschel, Netze oder Gebüsche von Korrelationen die axiale Korrelation Γ_0, deren Axen sich in OO' vereinigen und deren charakteristische Projektivität Identität ist; daraus folgt, daß alle weiteren gemeinsamen Paare konjugierter Strahlen (∞^2, ∞^1, ein sechstes) einen Schnittpunkt haben.

Der Büschel, der diese Korrelation mit irgendeiner des Systems verbindet, ist dann der eine und dieselbe Fläche erzeugende Korrelationenbüschel; denn jeder Strahl von O trifft den ihm im Büschel gemeinsam konjugierten Strahl, mit dem er in derselben Ebene durch OO' liegt, und damit alle polaren Ebenen in demselben Punkt.

Daher ist im ersten Falle der gegebene Korrelationenbüschel eben dieser Büschel, und es ergibt sich nur die eine Fläche 2. Grades, nicht ein Büschel.

Im zweiten Falle zerlegt sich das Korrelationennetz in ∞^1 derartige Büschel, die je dieselbe Fläche 2. Grades erzeugen und alle durch die ausgezeichnete Korrelation Γ_0 gehen. Erzeugnis ist nur ein Büschel von Flächen 2. Grades, dessen Grundkurve durch O, O', $C_1, \ldots C_6$ bestimmt ist.

Im dritten Falle zerlegt sich das Korrelationengebüsche in ∞^2 von Γ_0 ausgehende derartige Büschel, und es entsteht nur ein Netz von Flächen 2. Grades. Das zu den fünf Paaren $a_i = OC_i$, $b_i = O'C_i$ gehörige sechste Paar konjugierter Strahlen, allen Korrelationen gemeinsam, sei a_0, b_0 und sein Schnittpunkt C_0; so sind O, O', $C_1, \ldots C_5$, C_0 die Grundpunkte dieses Netzes. Die lineare Konstruktion des Paares a_0, b_0 aus den fünf gegebenen Paaren liefert (Nr. 235) eine lineare Konstruktion des achten assoziierten Punktes zu sieben gegebenen.

Bestimmt man das Netz von Korrelationen durch drei doppelte Bedingungen:

$$(3000) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix},$$

so hat man (Nr. 390) die acht Grundpunkte des Flächennetzes unmittelbar: O, O', $a\alpha'$, $b\beta'$, $c\gamma'$, $(bc, \beta'\gamma')$, $(ca, \gamma'\alpha')$, $(ab, \alpha'\beta')$; das sind aber nicht acht assoziierte Punkte in allgemeiner Lage, sie liegen vielmehr dreimal in zwei Ebenen, z. B. O, $b\beta'$, $c\gamma'$, $(bc, \beta'\gamma')$ in der Ebene bc, O', $a\alpha'$, $(ca, \gamma'\alpha')$, $(ab, \alpha'\beta')$ in α'. Die drei Ebenenpaare ergeben sich durch planare Korrelationen, welche in diesem Falle im Netze vorhanden sind.

§ 65. Apolare lineare Systeme von Korrelationen zwischen zwei Feldern[1]).

437 Es werde vorausgesetzt, daß zwei Korrelationen C und Γ zwischen den nämlichen Feldern Σ, Σ' so beschaffen seien, daß einmal einem Dreiseite $a'b'c'$ in Σ' durch sie Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$ polar sind, von denen $A_1B_1C_1$ dem ABC eingeschrieben ist und zwar so, daß A_1 auf BC liegt usw.

Die Kollineation in Σ, in der zwei Elemente einander korrespondieren, welche in C und Γ demselben Elemente von Σ' entsprechen, ist in eingeschriebener Dreieckslage (Nr. 365). Es gibt deshalb in Σ ∞^4 Dreiecke $X_1Y_1Z_1$, welche dem entsprechenden XYZ eingeschrieben sind, demnach in Σ' ∞^4 Dreiseite $x'y'z'$, so beschaffen, daß von ihren in C und Γ korrespondierenden Dreiecken XYZ, $X_1Y_1Z_1$ das zweite dem ersten eingeschrieben ist.

Betrachten wir nun XYZ aus Σ, sein in C entsprechendes ist $x'y'z'$, das in Γ entsprechende sei $x_1'y_1'z_1'$; weil X_1 auf YZ liegt, geht, wegen Γ, x' durch $y_1'z_1'$, ebenso y' durch $z_1'x_1'$, z' durch $x_1'y_1'$; d. h. $x_1'y_1'z_1'$ ist dem $x'y'z'$ eingeschrieben.

Ebenso zeigt sich $X_1Y_1Z_1$ als ein Dreieck, von dessen beiden polaren Dreiecken dasjenige in Γ (welches $x'y'z'$ ist) dem andern eingeschrieben ist. Damit ist erkannt, daß die beiden Felder sich gleichartig verhalten und wir in der Voraussetzung auch von einem Dreiecke in Σ ausgehen konnten.

Es ergeben sich demnach in beiden Feldern ∞^4 Dreiecke, von denen jedes folgende Eigenschaften hat: Das ihm

---

1) Vgl. hierzu Rosanes' erwähnte Abhandlungen; Pasch, Math. Annalen, Bd. 23, S. 419; London, ebenda Bd. 38, S. 334.

in Γ polare Dreieck ist dem in C polaren eingeschrieben; konstruiert man zu ihm das in C polare und zu diesem das in Γ polare, so ist dieses ihm eingeschrieben; konstruiert man hingegen das in Γ polare und zu diesem das in C polare, so ist letzteres ihm umgeschrieben.

Ferner wissen wir (Nr. 365), daß, wenn unter der obigen Voraussetzung bei den zwei demselben Dreiecke polaren Dreiecken die Inzidenz der Ecken und Seiten zweimal erfüllt ist, sie von selbst zum dritten Male eintritt.

Bezeichnen wir das Dreieck XYZ nach seinen Seiten xyz, so sind diese Seiten x, y, z, weil sie die Pole X_1, Y_1, Z_1 der x', y', z' in Γ enthalten, diesen konjugiert in Γ; und bezeichnen wir $x'y'z'$ nach seinen Ecken $X_1'Y_1'Z_1'$, so sind diese Ecken konjugiert zu den X_1, Y_1, Z_1 in C. Folglich haben die genannten ∞^4 Dreiecke noch folgende Eigenschaft. Von jedem und dem zu ihm in C polaren sind die entsprechenden Seiten (je dem Pole der andern gegenüberliegend) in Γ konjugiert, und von ihm und dem zu ihm in Γ polaren sind die entsprechenden Ecken in C konjugiert.

Es kann also die Voraussetzung auch in den beiden Formen ausgesprochen werden: Es sind einmal zwei in C polare Dreiseite abc, $a'b'c'$ vorhanden, deren entsprechende Seiten a und a', ... in Γ konjugiert sind. Oder es sind einmal zwei in Γ polare Dreiecke $A_1B_1C_1$, $A_1'B_1'C_1'$ vorhanden, deren entsprechende Ecken in C konjugiert sind.

Denn z. B. die Konjugiertheit von a und a', ... in Γ sagt ja aus, daß der Pol A_1 von a' auf $a = BC$ liegt usw., also daß das eine polare Dreieck $A_1B_1C_1$ dem andern ABC eingeschrieben ist.

Zwei Korrelationen in dieser Beziehung zueinander seien als apolar[1]) bezeichnet; nach Reyes Terminologie, in der sie deutlicher voneinander unterschieden werden, sagt man: C stützt Γ und Γ ruht auf C.

Die Apolarität ist für jede der beiden Korrelationen C und Γ eine einfache Bedingung, wenn die andere gegeben ist. Wenn z. B. C gegeben ist, so stellen wir in Σ (oder Σ') eine der ∞^7 Kollineationen in eingeschriebener Dreieckslage her, welche also Σ in ein in derselben Ebene befindliches Feld Σ_1 transformiert, das ∞^4 Dreiecke enthält, die dem entsprechenden in Σ eingeschrieben sind; Σ_1 wird dann zu Σ' korrelativ, und diese Korrelation Γ ruht auf C. Es gibt daher unter den ∞^8 Korrelationen ∞^7, welche

1) Zu Rosanes' Wort „konjugiert" kann ich mich nicht entschließen, weil dies Wort schon zu viele Bedeutungen hat und hier insbesondere vielfach verschiedene Bedeutungen desselben in dem nämlichen Satze zusammenkommen würden.

auf C ruhen, und ebenso ∞^7, welche eine Korrelation Γ stützen.

Demnach führen i gegebene Korrelationen (zwischen denselben Feldern) zu ∞^{8-i} Korrelationen, welche auf ihnen ruhen, bzw. sie stützen.

438 Wir beweisen nun den Fundamentalsatz der Linearität dieser Beziehung.

C_1, C_2 seien zwei Korrelationen, welche beide die Korrelation Γ stützen. Wir haben zwei vierfach unendliche Mannigfaltigkeiten von Dreiecken in Σ', welche zu C_1 und Γ, bzw. C_2 und Γ gehören. Da ∞^6 Dreiecke vorhanden sind, so gibt es $\infty^{2\cdot 4-6}$ Dreiecke, welche beiden gemeinsam sind. Es sei $x'y'z'$ eins von diesen ∞^2 Dreiecken; ihm seien in C_1, C_2, Γ polar $X_1Y_1Z_1$, $X_2Y_2Z_2$, XYZ; letzteres ist also den beiden andern eingeschrieben; X liegt demnach auf den Polaren Y_1Z_1 und Y_2Z_2 von $y'z'$ in C_1, C_2, ist daher dem $y'z'$ gemeinsam konjugiert in diesen Korrelationen, ebenso Y dem $z'x'$, Z dem $x'y'$. Ist also C_3 eine dritte Korrelation aus dem Büschel C_1C_2, so sind diese Punkte auch in ihr konjugiert; es gehen die Polaren von $y'z'$, $z'x'$, $x'y'$ in ihr auch durch X, Y, Z, d. h. XYZ ist auch dem Dreiecke $X_3Y_3Z_3$ eingeschnitten, das dem $x'y'z'$ in C_3 polar ist; auch C_3 stützt die Γ.

Wenn C_1, C_2 die Γ stützen, so tun es alle Korrelationen ihres Büschels.

Wenn Γ_1, Γ_2 auf C ruhen, so tun es alle Korrelationen ihrer Schar.

Wie aus drei, vier Konstituenten büschel- oder schar-lineare Systeme 2., 3. Stufe von Korrelationen vermittelst Büschel oder Scharen aufgebaut werden, ist schon erörtert. Wir gelangen entsprechend zu höherstufigen linearen Systemen. Das Gebüsche (büschel-lineare Systeme 3. Stufe), das zu vier Konstituenten gehört, erweitern wir vermittelst einer fünften (ihm nicht angehörigen) Konstituente, indem wir mit ihr alle seine Korrelationen durch Büschel verbinden, zum büschel-linearen System 4. Stufe, usw., bis zum büschel-linearen System 8. Stufe, welches alle Korrelationen zwischen den gegebenen Feldern umfaßt; und ähnlich bei den schar-linearen Systemen. Dann lehrt der Fundamentalsatz:

Alle ∞^{7-i} Korrelationen Γ, welche auf $i+1$ unabhängigen Korrelationen $C_0, C_1, \dots C_i$ $(i \leqq 7)$ ruhen, ruhen auch auf sämtlichen Korrelationen des durch diese konstituierten büschel-linearen Systems i^{ter} Stufe und bilden selbst ein schar-lineares System $(7-i)^{\text{ter}}$ Stufe, das durch irgend $8-i$ unabhängige der Γ konstituiert ist. Unabhängig sind $i+1$ Korrelationen, wenn sie nicht einem linearen Systeme von niedrigerer als i^{ter} Stufe angehören.

So sind demnach je ein büschel-lineares System i^{ter} Stufe von Korrelationen C und ein schar-lineares System k^{ter} Stufe von Korrelationen Γ, wo $i+k=7$ ist, durch Apolarität verbunden; alle Korrelationen jenes Systems stützen alle von diesem, und die des zweiten ruhen auf denen des ersten.

Ist eine der Zahlen i, k gleich 7, so ist die andere 0; es handelt sich in dem letztern Falle nur um eine endliche Anzahl von Korrelationen, und zwar um eine; denn mindestens zwei würden sofort eine Schar oder einen Büschel, d. h. ein System 1. Stufe nach sich ziehen. Also:

Auf acht Korrelationen und dem durch sie bestimmten büschel-linearen Systeme 7. Stufe ruht eine Korrelation. Dieselben acht Korrelationen und das durch sie konstituierte schar-lineare System 7. Stufe werden von einer Korrelation gestützt.

Wenn ein büschel- oder ein schar-lineares System i^{ter} Stufe in einem von höherer Stufe i_1 enthalten ist, so ist das diesem apolar verbundene schar-, bzw. büschel-lineare System $(7-i_1)^{\text{ter}}$ Stufe in dem jenem apolar verbundenen Systeme $(7-i)^{\text{ter}}$ Stufe enthalten.

Haben daher zwei gleichartige lineare Systeme i^{ter} und $i_1{}^{\text{ter}}$ Stufe ein lineares System niedrigerer Stufe h gemein, so befinden sich die beiden ihnen apolar verbundenen Systeme $(7-i)^{\text{ter}}$ und $(7-i_1)^{\text{ter}}$ Stufe in dem diesem apolar verbundenen System $(7-h)^{\text{ter}}$ Stufe.

Infolgedessen greifen sie mit einem System von der Stufe

$$7-i+7-i_1-(7-h)=7-(i+i_1)+h$$

ineinander über, und das zu diesem apolare System von der Stufe $i+i_1-h$ umfaßt die beiden gegebenen.

Wenn also zwei gleichartige lineare Systeme i^{ter} und $i_1{}^{\text{ter}}$ Stufe ein lineares System h^{ter} Stufe derselben Art gemeinsam haben, so sind sie in demselben linearen System $(i+i_1-h)^{\text{ter}}$ Stufe dieser Art enthalten.

Erwähnen wir gleich zwei interessante Spezialfälle apolarer Systeme. Das System der Korrelationen (3000) = (0300), welche zwei gegebene Dreiecke zu polaren Dreiecken haben, ist 2. Stufe, in sich dual und daher sowohl büschel- als schar-linear. Auf ihm ruht, infolge der umgestalteten Voraussetzung für die Apolarität, das schar-lineare System 5. Stufe, dessen Korrelationen die entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke zu konjugierten haben, und es wird gestützt durch das büschel-lineare System 5. Stufe der Korrelationen, in denen die entsprechenden Ecken der beiden Dreiecke konjugiert sind.

Es handelt sich hier durchweg um spezielle Systeme, denn allgemeine lineare Systeme von höherer als 3. Stufe haben keine gemeinsamen konjugierten Geraden oder Punkte, und ein allgemeines System 2. Stufe hat keine gemeinsamen polaren Dreiecke, da schon das System 1. Stufe nur ein solches Paar besitzt.

439 Es seien S, S' zwei konjugierte Punkte der Korrelation $\boldsymbol{C}$; und Γ sei irgend eine der ∞^3 zentralen Korrelationen, welche sie zu Zentren haben. Zu einem Dreiseit $a'b'c'$ in Σ', dessen Ecke $b'c'$ in S' liegt, sei ABC polar in $\boldsymbol{C}$; so geht BC durch S. Weil a' nicht durch S' geht, ist ihr Pol A_1 in Γ das Zentrum S; dagegen die Pole von b', c', die durch S' gehen, in Γ sind beliebige Punkte der Strahlen von S, welche den b', c' in der charakteristischen Projektivität entsprechen; wir nehmen diejenigen als B_1, C_1, welche auf CA, bzw. AB liegen. Dann ist $A_1B_1C_1$ dem ABC eingeschrieben, und Γ ruht auf $\boldsymbol{C}$.

Jede der ∞^3 zentralen Korrelationen, deren Zentren in zwei konjugierten Punkten S, S' von $\boldsymbol{C}$ liegen, ruht auf $\boldsymbol{C}$.

Umgekehrt, wenn eine zentrale Korrelation Γ auf $\boldsymbol{C}$ ruht, so sind ihre Zentren S, S' in $\boldsymbol{C}$ konjugiert.

Denn sei wieder $a'b'c'$ in Σ' so, daß $b'c'$ in S' liegt; polar zu ihm in $\boldsymbol{C}$ sei ABC; genau aus denselben Gründen wie oben nehmen wir als Pole B_1, C_1, in Γ, von b', c' die auf CA, AB gelegenen; Pol A_1 von a' ist S. Weil Γ auf $\boldsymbol{C}$ ruht und zwei Inzidenzen erfüllt sind, so muß auch diese Ecke $S \equiv A_1$ von $A_1B_1C_1$ auf BC liegen, d. i. auf der Polare, in $\boldsymbol{C}$, von $b'c' = S'$; also ist S zu S' konjugiert in $\boldsymbol{C}$.

Ebenso, wenn s, s' in einer Korrelation Γ konjugiert sind, so stützt jede axiale Korrelation, für welche sie die Axen sind, die Γ; und umgekehrt, wenn eine axiale Korrelation mit den Axen s, s' die Korrelation Γ stützt, so sind s, s' in Γ konjugiert.

Damit ist die Konjugiertheit von Punkten oder Geraden in einer Korrelation Spezialfall davon geworden, daß eine Korrelation auf ihr ruht oder sie stützt.

Und wie wir aus einem büschel- oder schar-linearen Systeme solche niedrigerer Stufe durch die Bedingung ausscheiden, daß gegebene Korrelationen auf Korrelationen des Systems ruhen oder sie stützen sollen, so auch durch die Bedingung, daß gegebene Punkte oder Geraden konjugiert seien. Für die Systeme der 2. und 3. Stufe wissen wir das schon.

In den schar-linearen Systemen, welche auf $\boldsymbol{C}$ ruhen, zählen solche zentralen Korrelationen, deren Zentren in konjugierten Punkten von $\boldsymbol{C}$ liegen, trotz der Unbestimmtheit, nur einfach; und (S, S') repräsentiert die einzige Korrelation, welche auf dem büschel-linearen Systeme 7. Stufe ruht, dessen Korrelationen die konjugierten Punkte S, S' gemeinsam sind.

Sie ist nur unbestimmt als Mitglied eines büschel-linearen Systems, nicht als Mitglied eines schar-linearen.

Betrachten wir jetzt den andern Fall, daß eine zentrale Korrelation $\boldsymbol{C}$ eine Korrelation Γ stützt. Es seien S, S' die Zentren von $\boldsymbol{C}$ und Π die charakteristische Projektivität. Wir ziehen c' beliebig, a' hingegen durch S'; der Pol C von c' in $\boldsymbol{C}$ ist S, der Pol A von a' ein beliebiger Punkt des Strahls a, der dem a' in Π entspricht. Die Pole von a', c' in Γ seien A_1, C_1; dann ziehen wir den Strahl $b = SA_1$ und den entsprechenden b' in Π. Jetzt haben wir das Dreiseit $a'b'c'$; der Pol der b' in $\boldsymbol{C}$ ist jeder Punkt von b. Die Polare der Ecke $a'b' = S'$ in $\boldsymbol{C}$ ist ganz beliebig; wir nehmen eine durch C_1 gehende Gerade und dann als Pole A, B von a', b' in $\boldsymbol{C}$ die Schnitte dieser Gerade mit a, b.

Weil vom Dreiecke $A_1B_1C_1$, das zu $a'b'c'$ in Γ polar ist, zwei Ecken C_1, A_1 auf den Seiten AB, BC des in $\boldsymbol{C}$ polaren Dreiecks $CAB \equiv SAB$ liegen und Apolarität zwischen $\boldsymbol{C}$ und Γ besteht, so muß B_1 auf CA liegen. Da nun a, b die Pole B_1, A_1 von b', a' in Γ enthalten, so sind sie ihnen in dieser Korrelation konjugiert.

Wenn daher eine zentrale Korrelation $\boldsymbol{C}$ eine andere Korrelation Γ stützt und a, a' in der Projektivität Π, die zu jener gehört, entsprechend sind, so sind die beiden Strahlen b', b aus den singulären Büscheln, welche zu ihnen in Γ konjugiert sind, wiederum in Π entsprechend.

Und umgekehrt, geschieht dies einmal, so ist $A_1B_1C_1$ dem ABC eingeschrieben, $\boldsymbol{C}$ stützt Γ, und die genannte Eigenschaft findet durchweg statt.

Wenn eine axiale Korrelation Γ auf einer andern Korrelation $\boldsymbol{C}$ ruht und A, A' in der charakteristischen Projektivität Π von Γ entsprechend sind, so gilt dies auch für die Punkte B', B der Axen, welche jenen in $\boldsymbol{C}$ konjugiert sind.

Wir betrachten das spezielle büschel-lineare System 4. Stufe (0040) 440
mit vier gemeinsamen Paaren konjugierter Punkte:

$$\left| \begin{array}{c} A_1A_2A_3A_4 \\ B_1B_2B_3B_4 \end{array} \right|;$$

dasselbe enthält (Nr. 435) sechs unbestimmte axiale Korrelationen, die aber in dem büschel-linearen Systeme je nur als eine Korrelation zählen; Axen derselben sind A_1A_2, B_3B_4; . . .; A_3A_4, B_1B_2.

Das schar-lineare System 3. Stufe, welches auf jenem Systeme ruht, ruht auch auf diesen Korrelationen, also sind je die zusammengehörigen Axen in allen seinen Korrelationen konjugiert; da diese Axen aber „gegenüberliegende“ Seiten der Vierecke sind, so sind diese für alle Korrelationen des zweiten Systems polar (Nr. 273).

Wir erhalten so weitere interessante Beispiele apolar verbundener Systeme:

Das büschel-lineare System 4. Stufe der Korrelationen, für welche die entsprechenden Ecken zweier Vierecke konjugiert, und das schar-lineare System 3. Stufe, für dessen Korrelationen diese Vierecke polar sind,

und dual:

das schar-lineare System 4. Stufe, für dessen Korrelationen die entsprechenden Seiten zweier Vierseite konjugiert, und das büschel-lineare System 3. Stufe der Korrelationen, für welche diese Vierseite polar sind.

Sämtliche genannten Systeme sind speziell.

Es sei C eine Korrelation, in welcher:

$$\begin{matrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \end{matrix}$$

polare Dreiseite sind. Γ ruhe auf C und habe a_1 und b_1, a_2 und b_2 zu konjugierten Geraden; die Konjugiertheit von a_3 und b_3 wird dann von selbst erfüllt. Denn durch jene zwei Konjugiertheiten wird aus dem schar-linearen Systeme 7. Stufe der auf C ruhenden Korrelationen eins von der 5. Stufe ausgeschieden. Andererseits haben wir das schar-lineare System 5. Stufe der Korrelationen, die auf allen Korrelationen ruhen, für welche die Dreiseite polar sind. Sie haben die entsprechenden Seiten derselben zu konjugierten Geraden. Beide Systeme erfüllen aber die nämlichen drei linearen Bedingungen, das Ruhen auf C und die Konjugiertheit von a_1 und b_1, a_2 und b_2. Also sind sie identisch; Γ, zum ersten System gehörig, befindet sich im zweiten und a_3, b_3 sind deshalb konjugiert in ihr. Also:

Wenn eine Korrelation Γ auf einer andern C ruht, welche die Dreiseite $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$ zu polaren hat, und a_1 und b_1, a_2 und b_2 in Γ konjugiert sind, so sind es auch a_3 und b_3.

Und wenn Γ, für welche $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ polar sind, auf C ruht und in dieser A_1 und B_1, A_2 und B_2 konjugiert sind, so sind es auch A_3 und B_3.

Ebenso, wenn Γ auf einer C ruht, für welche $a_1 a_2 a_3 a_4$, $b_1 b_2 b_3 b_4$ polar sind, und a_1 und b_1, a_2 und b_2, a_3 und b_3 zu konjugierten Geraden hat, so sind es auch a_4 und b_4.

Wenn C die Γ stützt, für welche $A_1 A_2 A_3 A_4$, $B_1 B_2 B_3 B_4$ polar sind, und selbst A_1 und B_1, A_2 und B_2, A_3 und B_3 zu konjugierten Punkten hat, so sind es auch A_4 und B_4[1]).

---

1) Hier zeigt sich, daß „polare" Vierseite und Vierecke doch nicht unbegründet ist (Nr. 273).

Wir haben: Für eine Korrelation Γ, die auf allen ∞^5 Korre- 441
lationen C ruht, in denen A_1 und B_1, A_2 und B_2, A_3 und B_3 konjugiert sind, sind die Dreiecke $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ polar.

Für eine Korrelation Γ, die auf allen ∞^4 Korrelationen C ruht, in denen A_1 und B_1, A_2 und B_2, A_3 und B_3, A_4 und B_4 konjugiert sind, sind die Vierecke $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ polar.

Dies führt zur Fortsetzung:

Für eine Korrelation Γ, die auf allen ∞^3 Korrelationen C ruht, in denen A_1 und B_1, A_2 und B_2, A_3 und B_3, A_4 und B_4, A_5 und B_5 konjugiert sind, nennen wir die beiden Fünfecke $A_1A_2A_3A_4A_5$, $B_1B_2B_3B_4B_5$ polar. Da in den C nicht bloß jene Punkte, sondern auch die beiden linear abhängigen Punkte A_0 und B_0 konjugiert sind, so geben die sechs Paare von Punkten fünf Paare von Fünfecken, die dann alle in bezug auf Γ polar genannt werden müssen, da ja das linear abhängige Paar mit jedem der andern vertauscht werden kann. Eine direktere Beziehung zweier solcher polaren Fünfecke zu Γ scheint nicht vorhanden.

Es gilt noch der Satz:

Wenn C die Γ stützt, für welche $A_1 \ldots A_5$, $B_1 \ldots B_5$ polar sind, und A_1 und $B_1, \ldots A_4$ und B_4 zu konjugierten Punkten hat, so sind es auch A_5 und B_5,

sowie der duale.

In dem büschel-linearen Systeme 7. Stufe, auf welchem eine gegebene Korrelation Γ ruht, haben wir alle linearen Systeme 3. Stufe aufzusuchen; jedes hat sechs linear abhängige Paare von gemeinsamen konjugierten Punkten und führt daher zu sechs Paaren polarer Fünfecke von Γ. Aus dem System 7. Stufe kann man die vier Konstituenten auf $\infty^{7\cdot 4}$ Weisen wählen, während andererseits jedes lineare System 3. Stufe auf $\infty^{3\cdot 4}$ Weisen konstituiert werden kann; folglich gibt es in dem System 7. Stufe ∞^{28-12} Systeme 3. Stufe. Dies beweist, daß Γ ∞^{16} Paare polarer Fünfecke besitzt, von denen immer sechs zusammengehören. Da es ∞^{20} Paare von Fünfecken in den beiden Ebenen gibt, so ist es für zwei Fünfecke eine vierfache Bedingung, in einer gegebenen Korrelation polar zu sein. Und zu einem gegebenen Fünfeck-Paare gehört ein büschel-lineares System 3. Stufe, für dessen Korrelationen die entsprechenden Ecken konjugiert sind. Für jede der ∞^4 Korrelationen des auf ihm ruhenden schar-linearen Systems 4. Stufe sind die beiden Fünfecke polar; und es zeigt sich, daß es für eine Korrelation eine $(8-4)$-, also vierfache Bedingung, daß zwei gegebene Fünfecke in ihr polar sind.

Ingleichen: Die Vielfachheit der Bedingung für zwei polare Vierecke (in beiderlei Sinne) ist fünf und bei zwei polaren Dreiecken sechs.

Wir definieren dual die Polarität von zwei Fünfseiten in einer Korrelation und haben zwei weitere Beispiele apolarer Systeme: das büschel-lineare System 3. Stufe der Korrelationen, welche die entsprechenden Ecken zweier Fünfecke zu konjugierten Punkten haben, und das schar-lineare System 4. Stufe, für dessen Korrelationen diese Fünfecke polar sind; und die beiden dualen Systeme. Diesmal handelt es sich nicht um spezielle Systeme.

442 Für eine Korrelation Γ seien zwei polare Dreiecke $\begin{smallmatrix} A_1 A_2 A_3 \\ B_1 B_2 B_3 \end{smallmatrix}$ oder, als Dreiseite aufgefaßt, $\begin{smallmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \end{smallmatrix}$ gegeben, wodurch sie einem in sich dualen System 2. Stufe zugewiesen wird, sowie zwei zentrale Korrelationen, auf denen sie ruhen soll: C_0, C_0', wodurch sie vollständig und eindeutig bestimmt ist. Die erstere habe die Zentren A_0, B_0 und die Projektivität Π_0; ziehen wir zunächst nur sie heran, so kommt Γ in eine gewisse Schar; wir wollen zu einer gegebenen Gerade a die in dieser gemeinsam konjugierte Gerade b konstruieren. Wir ziehen die Strahlen $B_0(B_1, B_2, B_3)$ und ihre entsprechenden in Π_0 und durch die Punkte, in denen diese die a schneiden, die Geraden $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ bzw. nach A_1, A_2, A_3; die Ecken von $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3$ seien $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$. Dann ziehen wir $A_0(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ und ihre entsprechenden in Π_0, welche bzw. mit b_1, b_2 geschnitten werden; die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte ist die gesuchte b. Denn $\begin{smallmatrix} \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 a \\ b_1 b_2 b_3 b \end{smallmatrix}$ sind polare Vierseite in C_0, weil

$$\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{A}_1 \text{ und } b_1 b,\ \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{A}_2 \text{ und } b_2 b,$$

$$\mathfrak{a}_1 a \text{ und } b_2 b_3 = B_1,\ \mathfrak{a}_2 a \text{ und } b_3 b_1 = B_2,\ \mathfrak{a}_3 a \text{ und } b_1 b_2 = B_3$$

auf entsprechenden Strahlen von Π_0 liegen, also in C_0 konjugiert sind und dies (Nr. 272) dann auch für $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{A}_3$ und $b_3 b$ gilt. Nun sind $\mathfrak{a}_1$, b_1; $\mathfrak{a}_2$, b_2; $\mathfrak{a}_3$, b_3 in Γ konjugiert, weil $\mathfrak{a}_1, \ldots$ durch die Pole $A_1, \ldots$ von $b_1, \ldots$ gehen, also sind auch a, b in Γ (oder vielmehr jeder Korrelation der Schar) konjugiert.

Wird nun C_0' herangezogen, so sei b', welche der a in der neuen Schar konjugiert ist, konstruiert; dann ist bb' der Pol von a in der Korrelation Γ, die den beiden Scharen gemeinsam ist; und dieselbe ist in der elementaren Weise durch vier Geraden a_1, a_2, a_3, a und ihre Pole bestimmt.

443 Ein Korrelationenbüschel ist durch sieben Paare gemeinsam konjugierter Punkte bestimmt; wir treten nun an die Aufgabe heran, zu einem achten Punkte den gemeinsam konjugierten Punkt zu konstruieren. Dazu mögen erst zwei Hilfssätze über acht solche gemeinsame Paare konjugierter Punkte eines

Korrelationenbüschels hergeleitet werden. Wir zerlegen sie in zwei Gruppen von drei und fünf Paaren:

$$\begin{array}{ll} A_1 A_2 A_3 & A_4 A_5 A_6 A_7 A_8 \\ B_1 B_2 B_3, & B_4 B_5 B_6 B_7 B_8. \end{array}$$

Die erste führt zu einem (speziellen) büschel-linearen System 5. Stufe, die andere zu einem (allgemeinen) von der 3. Stufe; da sie den Korrelationenbüschel gemeinsam haben, so befinden sie sich in einem büschel-linearen System 7. Stufe (Nr. 438). Die beiden auf ihnen ruhenden schar-linearen Systeme 2. und 4. Stufe haben daher die Korrelation und nur sie gemeinsam, welche auf dem Systeme 7. Stufe ruht. Für sie sind $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ polare Dreiecke und $A_4 \ldots A_8$, $B_4 \ldots B_8$ polare Fünfecke. Also:

Acht Paare gemeinsam konjugierter Punkte eines Korrelationenbüschels haben die Eigenschaft, daß, wenn sie in zwei Gruppen von drei und fünf Paaren zerlegt werden, eine Korrelation existiert, in welcher sowohl die zugehörigen Dreiecke, als die zugehörigen Fünfecke polar sind. Und analoges gilt bei der Zerlegung in zwei Gruppen von je vier Paaren.

In ähnlicher Weise ergeben sich folgende Sätze:

Für sieben Paare gemeinsam konjugierter Punkte eines Korrelationennetzes, das ja durch sechs Paare bestimmt ist, gibt es bei jeder Zerlegung in vier und drei Paare eine Korrelation, in welcher die beiden Vierecke und die beiden Dreiecke polar sind.

Und endlich für die sechs gemeinsamen und linear-abhängigen Paare konjugierter Punkte eines Korrelationengebüsches, das durch fünf von ihnen bestimmt ist, gibt es, wenn sie in drei und drei Paare zerlegt werden, eine Korrelation, in der die einen und die andern Dreiecke polar sind.

Die Umkehrung kennen wir (Nr. 272).

Dazu treten die dualen Sätze.

Wir kommen auf die beiden apolaren Systeme zurück, von 444
denen, wenn

$$\begin{array}{l} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 \end{array}$$

vorliegen, das eine, büschel-linear 3. Stufe, die Korrelationen enthält, für welche A_1 und $B_1, \ldots A_5$ und B_5 konjugiert sind, das andere, schar-linear 4. Stufe, diejenigen, für welche die beiden Fünfecke polar sind. Jede zentrale Korrelation des ersteren hat ihre Zentren, A, B so, daß:

$$A(A_1, \ldots A_5) \barwedge B(B_1, \ldots B_5).$$

Wir wissen (Nr. 228), daß hierdurch eine eindeutige Zuordnung der beiden Punktfelder festgelegt wird, und daß in allen den projektiven Büscheln entsprechende Strahlen nach den Punkten des linear abhängigen Paars $A_0 B_0$ gehen. Jedem der zwölf Hauptpunkte korrespondiert ein ganzer Kegelschnitt, je durch die fünf nicht homologen Punkte der andern Ebene, z. B. dem A_1 der Kegelschnitt $(B_2 B_3 B_4 B_5 B_0)$.

Ordnen wir dem Hauptpunkte einen dieser fünf Punkte zu, so erhalten wir Zentren von 30 oder, wenn wir von A_0, B_0 absehen, 20 zentralen Korrelationen des dreistufigen Systems, die besonders brauchbar sind; ihre charakteristische Projektivität ist ja leicht anzugeben, z. B. für die mit den Zentren A_1, B_2 ist sie:

$$A_1(A_3, A_4, A_5) \barwedge B_2(B_3, B_4, B_5).$$

Auf diesen Korrelationen ruhen diejenigen des andern Systems.

Nunmehr seien sieben Paare gemeinsam konjugierter Punkte eines Korrelationenbüschels gegeben:

$$\begin{gathered} A_1 A_2 \dots A_7 \\ B_1 B_2 \dots B_7; \end{gathered}$$

wir wollen zu A_8 den zugehörigen B_8 haben. Wir fanden eben, es gibt eine Korrelation Γ, für welche $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ polare Dreiecke und $A_4 \dots A_8$, $B_4 \dots B_8$ polare Fünfecke sind. Sie ruht auf dem büschel-linearen System 3. Stufe, für dessen Korrelationen A_4 und $B_4, \dots A_8$ und B_8 konjugiert sind, und auf den ihm zugehörigen zentralen Korrelationen; unter den 20 haben wir solche, die von dem gesuchten B_8 unabhängig sind, z. B. die beiden:

$$A_8(A_5, A_6, A_7) \barwedge B_4(B_5, B_6, B_7), \quad A_8(A_4, A_6, A_7) \barwedge B_5(B_4, B_6, B_7).$$

Die Korrelation Γ können wir daher bestimmt ansehen durch die beiden polaren Dreiecke $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ und das Ruhen auf diesen zentralen Korrelationen. Wir haben gelernt, sie in einfacherer Weise zu bestimmen (Nr. 442), und nehmen an, daß das geschehen sei.

Jetzt vervollständigen wir die Projektivitäten von andern unserer zentralen Korrelationen vermittelst des Umstandes, daß sie die Γ stützen.

Nehmen wir z. B.

$$A_7(A_5, A_6, A_8) \barwedge B_4(B_5, B_6, B_8);$$

B_8 ist noch nicht bekannt, also brauchen wir ein anderes drittes Paar. Suchen wir zu $A_7 A_5$ und $B_4 B_5$ die in Γ konjugierten Strahlen $\bar{b}$, $\bar{a}$, die zu den Büscheln B_4, A_7 gehören, so haben wir (Nr. 439) wiederum in der Projektivität entsprechende Strahlen und damit das notwendige dritte Paar $\bar{a}$, $\bar{b}$. Nun kann zu $A_7 A_8$ der entsprechende b konstruiert werden, der nach B_8 geht. Und wiederholt man dies an einer andern zentralen Projektivität, etwa: $A_7(A_4, A_6, A_8) \barwedge B_5(B_4, B_6, B_8)$, so erhält man eine zu b analoge Gerade b', und der Schnitt bb' ist der gesuchte B_8.

Damit ist unsere Aufgabe von Nr. 443 gelöst und zwar vollständig linear.

Nachdem später erkannt sein wird, daß jede quadratische Verwandtschaft zwischen zwei Punktfeldern die Beziehung der gemeinsam konjugierten Punkte eines Korrelationenbüschels ist, haben wir dann mit unserer Lösung auch diejenige der Fundamental-Aufgabe der quadratischen Verwandtschaft.

Zugleich ist nun auch die Aufgabe erledigt, deren Lösung wir in Nr. 421 in Schröterscher Behandlung gegeben haben:

Von einer Korrelation sind acht Paare konjugierter Punkte gegeben; es soll zu einem neunten A_9 die zugehörige Polare b_9 konstruiert werden. Wir bilden aus jenen acht Punktepaaren zwei Gruppen von sieben Paaren, denen dann zwei Korrelationenbüschel zugehören; seien auf Grund der vorangehenden Aufgabe zu A_9 die beiden zugehörigen Punkte B_9 und B'_9 konstruiert, so ist $B_9 B'_9$ die gesuchte Polare b_9[1]).

Und umgekehrt, hat man die Lösung dieser Aufgabe, dann hat man auch die der früheren. Zu den sieben Punktepaaren fügen wir zwei Punktepaare hinzu A_8', B_8'; A_8'', B_8'' und haben zweimal die jetzige Aufgabe:

$$\begin{matrix} A_1 \ldots A_7 A_8' & \qquad A_1 \ldots A_7 A_8'' \\ B_1 \ldots B_7 B_8'' & \qquad B_1 \ldots B_7 B_8''. \end{matrix}$$

Die Polaren zu A_8 seien b_8', b_8''; so ist $b_8' b_8''$ der gesuchte B_8.

Konstruiert man bei sieben gegebenen Paaren den Kegelschnitt, welcher durch die den Punkten einer Gerade a konjugierten Punkte gebildet wird, bzw. fünf Punkte desselben, schneidet ihn mit einer Gerade b in B_8, B_8' und sucht dann wieder auf a zu B_8, B_8' die konjugierten Punkte A_8, A_8', so hat man in

$$\begin{vmatrix} A_1 \ldots A_7 A_8 \\ B_1 \ldots B_7 B_8 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A_1 \ldots A_7 A_8' \\ B_1 \ldots B_7 B_8' \end{vmatrix}$$

die beiden Korrelationen

$$(0071) \qquad \begin{vmatrix} A_1 \ldots A_7 a \\ B_1 \ldots B_7 b \end{vmatrix}.$$

Auf der obigen Aufgabe: Zu sieben Paaren konjugierter Punkte eines Korrelationenbüschels ein achtes Paar zu konstruieren, beruht 445

---

1) Die obige Lösung, von mir etwas modifiziert, rührt von London (a. a. O.) her. Gegenüber der Schröterschen Lösung, bei welcher von einfacheren Fällen allmählich zu schwierigeren emporgestiegen wird und bei der einfachere Mittel herangezogen werden, operiert diese Lösung mit dem schwierigeren Begriffe apolarer Korrelationen und bringt dadurch eine einfachere Konstruktion zustande.

die Konstruktion der Fläche 2. Grades aus neun Punkten $O, O', C_1 \ldots C_7$, welche in allgemeiner Lage sich befinden. Der Büschel der Korrelationen zwischen den Bündeln O, O', welche die Fläche erzeugen, hat OC_1, $O'C_1$; ... OC_7, $O'C_7$ zu konjugierten Strahlen, und weil diese sich schneiden, so tun es alle konjugierten Strahlen, die dem Büschel gemeinsam sind (Nr. 436), und diese Schnittpunkte erzeugen die Fläche; wir sind auf Grund der obigen Aufgabe imstande, weitere konjugierte Strahlen oder ihre Spuren in einer festen Ebene zu konstruieren, und haben hier den Vorteil, daß, weil durchweg zwei konjugierte Strahlen mit OO' in einer Ebene liegen oder ihre Spuren mit derjenigen von OO' in einer Gerade, immer bloß einer von den Strahlen b, b' notwendig ist.

Wenn

$$\begin{matrix} A_1 \ldots A_7 \\ B_1 \ldots B_7 \end{matrix}$$

sieben Paare gemeinsam konjugierter Punkte für ein Korrelationennetz sind, gibt es eine Korrelation Γ, in der

$$\begin{matrix} A_1 A_2 A_3 \\ B_1 B_2 B_3 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} A_4 A_5 A_6 A_7 \\ B_4 B_5 B_6 B_7 \end{matrix}$$

zugleich polare Dreiecke und polare Vierseite sind (Nr. 443). Dies führt zur Konstruktion von B_7, wenn die andern Punkte bekannt sind. Die Korrelation Γ können wir uns (Nr. 273) bestimmt denken durch:

$$\left| \begin{matrix} A_2 A_3, & A_3 A_1, & A_1 A_2, & A_4 A_7, & A_5 A_7 \\ B_1, & B_2, & B_3, & B_5 B_6, & B_4 B_6 \end{matrix} \right|,$$

sodaß die Signatur (0302) vorliegt, welche, wie die duale (3020) auf (4000), ebenso leicht auf (0400) zurückgeführt werden kann (Nr. 421). Es sind in ihr auch konjugiert A_4A_5 und B_6B_7, A_4A_6 und B_5B_7; konstruieren wir also für sie die Pole von A_4A_5, A_4A_6, so geben diese, bzw. mit B_6, B_5 verbunden, zwei sich im gesuchten Punkte B_7 schneidende Geraden.

Sind also acht Punkte gegeben: $O, O', C_1, \ldots C_6$, so sind in allen Korrelationen des Netzes, welches den Flächenbüschel 2. Ordnung durch diese acht Punkte erzeugt, die Strahlen OC_1 und $O'C_1, \ldots$ konjugiert. Wir können nach dem Vorangehenden weitere gemeinsame konjugierte Strahlen konstruieren, es liegen immer zwei zusammengehörige in einer Ebene durch OO', was wiederum ein Konstruktionsvorteil ist, und wir erhalten durch die Schnitte die Grundkurve des Flächenbüschels. Die Strahlen bilden die beiden Kegel a^3, b^3 des Korrelationennetzes.

Der Fall von sieben gegebenen Punkten, zu denen der achte assoziierte gesucht werden soll, ist, als der einfachste, schon früher erledigt (Nr. 235).

Es seien drei Korrelationen zwischen denselben Feldern Σ, Σ' 446
gegeben: C_1, C_2, Γ; es soll entschieden werden, wie viele Korrelationen der Büschel $\mathfrak{B} = C_1 C_2$ enthält, auf welchen Γ ruht; was nur eine einfache Bedingung ist. Enthält der Büschel zwei Korrelationen, für welche das gilt, dann gilt es für alle. Wir haben daher nur eine zu erwarten.

Nehmen wir in Σ' zwei Punkte X', Y', die Polaren in C_1, C_2, Γ seien x_1, y_1; x_2, y_2; $\bar{x}$, $\bar{y}$; diejenigen x, y in den verschiedenen Korrelationen von $\mathfrak{B}$ durchlaufen projektive Büschel um $x_1 x_2$, $y_1 y_2$. Wenn nun ein Punkt Z' von Σ' in Γ die Polare $\bar{z}$ und in einer Korrelation von $\mathfrak{B}$ die Polare z hat und diese Korrelation die gewünschte Eigenschaft besitzt, so kommt es darauf an, Z' so zu finden, daß $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ dem xyz eingeschrieben ist. Sehen wir noch von der Inzidenz von z mit dem Punkte $\bar{x}\bar{y}$ ab, so werden wir für jede Korrelation von $\mathfrak{B}$ einen zugehörigen Punkt Z' finden, für den wenigstens die beiden Inzidenzen von x mit $\bar{y}\bar{z}$ und von y mit $\bar{z}\bar{x}$ erfüllt werden; es ist $\bar{z}$ die Verbindungslinie der Punkte $x\bar{y}$ und $y\bar{x}$ und Z' ihr Pol in Γ. Jene Punkte beschreiben auf $\bar{y}$ und $\bar{x}$ projektive Punktreihen; also umhüllt $\bar{z}$ einen Kegelschnitt, welcher $\bar{x}$ und $\bar{y}$ berührt, und Z' beschreibt in Σ' einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$, der durch X' und Y' geht. Diese krumme Punktreihe der Z' ist projektiv zum Büschel $\mathfrak{B}$ und daher auch zum Büschel der Polaren eines festen Punktes in bezug auf die Korrelationen von $\mathfrak{B}$; wir nehmen dazu den Punkt $\bar{x}\bar{y}$. Der Polarenbüschel schneidet in $\mathfrak{K}'$ eine Involution, welche zu der Reihe der Punkte Z' projektiv ist; die Korrespondenz [1, 2] auf $\mathfrak{K}'$, die wir so erhalten, hat drei Koinzidenzelemente. Zu diesen gehören die Punkte X', Y'. Denn wir haben im Büschel $\mathfrak{B}$ eine Korrelation, für welche die Polare x von X' durch den Punkt $\bar{x}\bar{y}$ geht und folglich die Polare von $\bar{x}\bar{y}$ durch X'; wenn aber $x\bar{y}$ in $\bar{x}\bar{y}$ fällt, so kommt $\bar{z}$, die Verbindungslinie von $x\bar{y}$ mit $y\bar{x}$, auf $\bar{x}$ zu liegen und Pol in Γ ist X'. Die dritte Koinzidenz Z' entspreche der Korrelation C von $\mathfrak{B}$; weil die Polare von $\bar{x}\bar{y}$ in ihr durch Z' geht, so geht diejenige z von Z' durch $\bar{x}\bar{y}$; und es wird auch die dritte Inzidenz erfüllt.

In jedem Büschel von Korrelationen zwischen zwei Feldern gibt es eine Korrelation, welche eine gegebene Korrelation Γ zwischen den nämlichen Feldern stützt. Sie ist dem Büschel mit dem büschel-linearen System 7. Stufe der Korrelationen gemeinsam, welche Γ stützen.

Daraus folgt, daß jedes büschel-lineare System i^{ter} Stufe ein lineares System $(i-1)^{\text{te}}$ Stufe von Korrelationen enthält, welche eine gegebene Korrelation stützen; mit jedem ihm nicht angehörigen Büschel jenes Systems hat dieses eine Korrelation gemein.

Das System i^{ter} Stufe enthält, allgemeiner, ein büschel-lineares System $(i-k-1)^{\text{ter}}$ Stufe von Korrelationen, welche $k+1$ gegebene Korrelationen $(k \leqq i-1)$ und daher alle Korrelationen des schar-linearen Systems k^{ter} Stufe stützen, welches jene konstituieren. Dies System $(i-k-1)^{\text{ter}}$ Stufe ist dem gegebenen i^{ter} Stufe gemeinsam mit dem büschel-linearen Systeme $(7-k)^{\text{ter}}$ Stufe, welches das System k^{ter} Stufe stützt.

Ebenso gibt es in jeder Schar von Korrelationen eine, welche auf einer gegebenen Korrelation (zwischen denselben Feldern) ruht. Usw.

447 Wenn S, S' in einer Korrelation C konjugiert sind, so ruht jede der ∞^3 zentralen Korrelationen, welche diese Punkte zu Zentren haben, auf ihr, und umgekehrt; ist etwa C eine axiale Korrelation mit s, s' als Axen, so muß von den Punkten S, S', weil sie konjugiert sind, entweder S auf s oder S' auf s' liegen (Nr. 400); und ist das der Fall, so ruht die zentrale Korrelation auf der axialen.

Sind S, S' konjugiert in allen Korrelationen eines büschel-linearen Systems i^{ter} Stufe, so befindet sich die unbestimmte zentrale Korrelation (S, S') in dem schar-linearen Systeme $(7-i)^{\text{ter}}$ Stufe, welches auf jenem ruht. Die drei büschel-linearen Systeme 1., 2., 3. Stufe haben immer gemeinsam konjugierte Punkte und zwar ∞^2, ∞^1, eine endliche Anzahl 6, die höheren nur in speziellen Fällen. Folglich enthalten die schar-linearen Systeme 6., 5., 4. Stufe immer ∞^2, ∞^1, sechs unbestimmte zentrale Korrelationen, und im letzteren Falle bilden die Zentren sechs linear abhängige Paare. Aber wie in Nr. 439 gesagt, im schar-linearen Systeme zählt jede dieser Korrelationen nicht ∞^3-fach, sondern nur einfach. Ebenso haben die büschel-linearen Systeme 6., 5., 4. Stufe immer ∞^2, ∞^1, sechs unbestimmte axiale Korrelationen, und weil die einzelne Korrelation ∞^3 Paare konjugierter Punkte oder Geraden hat, so besitzt das schar-, bzw. büschel-lineare System 7. Stufe ∞^3 unbestimmte zentrale, bzw. axiale Korrelationen. Was in Nr. 435 für die speziellen büschel- oder schar-linearen Systeme 4. Stufe mit vier gemeinsamen Paaren konjugierter Punkte oder Strahlen erkannt wurde, gilt auch für die allgemeinen derartigen Systeme, nur ergeben sich dort die Axen oder Zentren sehr einfach aus den gemeinsam konjugierten Elementen.

Eine zentrale oder axiale Korrelation erhält in jeder Schar oder jedem Büschel eines Systems, zu welchem sie gehört, eine bestimmte Projektivität. Eine axiale Korrelation C_0 z. B., welche zu einem bestimmten Büschel gehört, sei betrachtet, und C sei eine allgemeine Korrelation des Büschels. Wenn s, s' die Axen von C_0 sind, so sind ihre Pole $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}$ in C auch Pole in C_0 und daher in allen Korrelationen des Büschels. Die durch $\mathfrak{S}'$ gehende Polare eines Punktes $\mathfrak{A}$ auf s in der Korrelation C treffe s' in $\mathfrak{A}'$, so ist dieser der Pol von $\mathfrak{S}\mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ bewegen sich projektiv auf s, s'. Das ist die der C_0 zukommende Projektivität. Denn die Polare eines beliebigen Punktes von $\mathfrak{S}\mathfrak{A}$ in C geht durch $\mathfrak{A}'$, diejenige in C_0 ist s', also ist $\mathfrak{A}'$ jenem Punkte in C und C_0 konjugiert, daher in allen Korrelationen des Büschels; oder $\mathfrak{A}'$ hat in allen die $\mathfrak{S}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}$ in allen die $\mathfrak{S}'\mathfrak{A}'$ zur Polare, also auch in C_0; womit die obige Projektivität als diejenige erkannt ist, die der C_0, insofern sie zu dem Büschel gehört, zukommt. Die beiden ebenfalls projektiven Büschel um $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ (bzw. perspektiv zu den Punktreihen s, s') bilden die einzige zentrale Korrelation im Büschel; die beiden andern haben sich in der axialen vereinigt. Eine axiale Korrelation ist im allgemeinen in einem Büschel nicht vorhanden; ist es aber der Fall, so nimmt sie zwei der zentralen in sich auf.

§ 66. Apolarität von Polarfeldern.

Wir wollen dem Spezialfalle des Polarfeldes noch einige Betrach- 448
tungen widmen. Wenn C und Γ, welche apolar sind, beide Polarfelder sind, so fällt, wegen des involutorischen Charakters beider Verwandtschaften, der Unterschied der Felder weg; es existiert dann nur ein vierfach unendliches System von Dreiecken; jedem aus demselben sind in C und Γ zwei dem System ebenfalls angehörige Dreiecke polar, von denen das zweite dem ersten eingeschrieben ist. Dieses vierfach unendliche System hat mit dem dreifach unendlichen Systeme der Polardreiecke von Γ (weil es ∞^6 Dreiecke in der Ebene gibt) ein einfach unendliches System gemeinsam. Gehört $x'y'z'$ diesem System an, so ist das polare Dreieck $X_1Y_1Z_1$ in Γ mit ihm identisch; dem in C polaren Dreiecke XYZ ist $X_1Y_1Z_1 \equiv x'y'z'$ eingeschrieben. Der Punkt $X_1 \equiv y'z'$ hat zur Polare in C die YZ, auf welcher er liegt; also ist er ein Punkt der Basiskurve (C) von C, ebenso Y_1, Z_1. Unser Dreieck ist daher dieser Basiskurve (C) eingeschrieben und Polardreieck der andern (Γ), und solcher Dreiecke gibt es ∞^1. Und ebenso sind die ∞^1 Polardreiecke von C, welche sich in der vierfach unendlichen Mannigfaltigkeit befinden, der (Γ) umgeschrieben.

Wenn also von zwei Polarfeldern C und Γ derselben Ebene das erste das zweite stützt, d. h. wenn es ein Dreieck gibt, von welchem das nach Γ polare dem noch C polaren eingeschrieben ist, so gibt es ∞^4 solche Dreiecke und unter ihnen ∞^1 Polardreiecke von Γ, welche dann der Basiskurve (C) ein-, und ∞^1 Polardreiecke von C, welche der Basiskurve (Γ) umgeschrieben sind. Und jedes der ∞^4 Dreiecke und sein polares in C haben die entsprechenden Seiten in Γ konjugiert, während das Dreieck und sein entsprechendes in Γ die Ecken in C konjugiert haben.

Wenn umgekehrt ein Polardreieck $x'y'z'$ von Γ vorhanden ist, das der Basiskurve (C) eingeschrieben ist, so seien die beiden in C und Γ polaren XYZ, $X_1 Y_1 Z_1$; von ihnen ist das letztere mit $x'y'z'$ identisch und zwar so, daß $X_1 \equiv y'z', \ldots$; die Seiten des ersteren sind Tangenten von (C) in den Ecken von $x'y'z'$ und zwar berührt YZ in $y'z', \ldots$; folglich ist $X_1 Y_1 Z_1 \equiv x'y'z'$ dem XYZ eingeschrieben. C stützt Γ; es gibt ∞^4 Dreiecke, für welche das in Γ polare dem in C polaren eingeschrieben ist, und, außer dem Dreiecke der Voraussetzung, ∞^1 andere Polardreiecke von Γ, welche (C) eingeschrieben sind, und ∞^1 Polardreiecke von C, welche (Γ) umgeschrieben sind, usw.

Und ebenso kann man davon ausgehen, daß ein Polardreieck von C vorhanden ist mit der eben genannten Eigenschaft, oder endlich auch davon, daß einmal polare Dreiecke in C vorhanden sind, deren entsprechende Seiten in Γ, oder polare in Γ, deren entsprechende Ecken in C konjugiert sind.

An diesem speziellen Falle zweier Polarfelder oder Kegelschnitte derselben Ebene ist die Apolarität zuerst untersucht worden[1]).

Es ist für die Eigenschaft, daß ∞^1 Polardreiecke von Γ oder (Γ) dem (C) ein-, bzw. ∞^1 Polardreicke von C oder (C) dem (Γ) umgeschrieben sind, auch der Ausdruck gebraucht worden (Smith), daß (Γ) dem (C) harmonisch eingeschrieben und (C) dem (Γ) harmonisch umgeschrieben ist. Wird (Γ) ein Punktepaar, so bedeutet jene Eigenschaft, daß seine Punkte in C oder in bezug auf (C) konjugiert sind; ist (C) ein Geradenpaar, so bedeutet diese Eigenschaft, daß seine Geraden in Γ oder in bezug auf (Γ) konjugiert sind.

Zwei Geradenpaare, auf denen Γ ruht, bestimmen ein Polviereck von Γ; also ruht Γ auch auf jedem demselben umgeschriebenen Kegelschnitte (C), weil er dem Büschel der beiden Geradenpaare angehört. Wenn also (C) einem Polviereck von Γ umgeschrieben ist, so ruht Γ auf C. Wenn (Γ) einem Polvierseit von C umgeschrieben ist, wird Γ von C gestützt.

Zwei Polarfelder derselben Ebene konstituieren einen Büschel und eine Schar, welche aus lauter Polarfeldern bestehen; denn die konjugierten Punkte oder Geraden eines Polarfeldes

---

1) Smith, Proceed. London Math. Soc., Bd. 2, S. 85, Collected Math. Papers, Bd. 1, S. 524; Rosanes, Math. Annalen, Bd. 6, S. 265; Reye, Geometrie der Lage, Abt. I, Anhang.

sind durchweg doppelt konjugiert, also sind die gemeinsamen konjugierten Punkte oder Geraden der beiden Polarfelder, weil doppelt konjugiert für sie, auch doppelt konjugiert für alle übrigen Korrelationen des Büschels, der Schar, und drei beliebige Paare unter ihnen (mit Verbindungslinien, die nicht in einem Punkt zusammenlaufen, oder Schnittpunkten, die nicht in einer Gerade liegen) lehren, daß der ganze Büschel, die ganze Schar aus Polarfeldern besteht. Daraus folgt wieder, daß ein büschel- oder schar-lineares System beliebiger Stufe, dessen Konstituenten Polarfelder sind, nur aus solchen besteht. Da es nun in einer Ebene ∞^5 Polarfelder gibt, so sind je ein büschel-lineares System i^{ter} Stufe von Polarfeldern (Kegelschnitten) und ein schar-lineares System k^{ter} Stufe, wo $i + k = 4$ ist, durch Apolarität verbunden. Ersteres ist in dem büschel-linearen System $(7-k)^{\text{ter}}$ Stufe enthalten, welches das schar-lineare System k^{ter} Stufe stützt, und letzteres in dem schar-linearen System $(7-i)^{\text{ter}}$ Stufe, welches auf dem System i^{ter} Stufe ruht.

Es sei A ein Punkt der Basiskurve (C), also sich selbst konjugiert in C, so ruhen die unbestimmten zentralen Korrelationen Γ mit in A vereinigten Zentren auf C. Diejenigen, deren charakteristische Projektivität Involution ist, sind Polarfelder mit Geradenpaaren (den Doppelstrahlen) als Basen. Die Unbestimmtheit der Involution macht die Basis (Γ) nur als Punktgebilde ∞^2-deutig; als Geradengebilde ist sie eindeutig: der doppelte Strahlenbüschel um A. Sein Polarfeld ruht auf den Polarfeldern aller durch A gehenden Kegelschnitte, und jedem der schar-linearen Systeme 4. Stufe von Polarfeldern, die auf einem dieser Polarfelder ruhen, gehört es einfach an. Dieser Spezialfall veranschaulicht uns, daß eine zentrale Korrelation, deren Projektivität noch nicht bestimmt ist, nicht in jeder Beziehung unbestimmt ist, nur als Mitglied eines büschel-linearen Systems, nicht aber als Mitglied eines schar-linearen Systems (Nr. 439).

Fünf Paare konjugierter Punkte bestimmen ein Polarfeld (Kegel- 449
schnitt); $(050) = 1$ (Nr. 422).

Vier Paare konjugierter Punkte bestimmen einen Büschel von Polarfeldern (Kegelschnitten). Dieser Büschel subsumiert sich unter den allgemeinen Fall eines Büschels von Korrelationen, als:

$$\begin{vmatrix} A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 A_1 A_2 A_3 \end{vmatrix}$$

(Nr. 422).

Die weiteren ∞^2 gemeinsamen Paare konjugierter Punkte führen zu einer quadratischen Verwandtschaft, welche, wegen des involutorischen Charakters des Polarfeldes, ebenfalls involutorisch ist. Ein gemeinsamer Punkt von zwei Basiskurven ist sich selbst konjugiert in den zugehörigen Polarfeldern, also in allen des Büschels und daher auf allen Basiskurven gelegen.

Der Büschel von Polarfeldern enthält so viele zentrale, der Büschel von Kegelschnitten so viele Geradenpaare, als es Punkte gibt, aus denen die vier gegebenen Punktepaare durch Strahlenpaare in Involution projiziert werden, also drei nach Nr. 230; was wir aber auch schon anderweitig erkannt haben.

Der Fall des durch drei Paare konjugierter Punkte:

$$(030) \qquad \left| \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 \\ B_1 B_2 B_3 \end{matrix} \right|$$

bestimmten Netzes von Polarfeldern oder Kegelschnitten subsumiert sich unter den allgemeinen Fall:

$$(0060) \qquad \left| \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 B_1 B_2 B_3 \\ B_1 B_2 B_3 A_1 A_2 A_3 \end{matrix} \right| .$$

Hier haben wir zwei Kurven a^3, b^3, welche in zwei Weisen in eindeutiger Beziehung ihrer Punkte stehen: die einen entsprechenden Punkte sind die Zentren der zentralen Korrelationen, die andern die gemeinsamen konjugierten Punkte. In unserm Falle haben sich zusammengehörige Zentren durchweg vereinigt; es liegt also nur eine Kurve c^3 vor, der Ort der Doppelpunkte der Geradenpaare des Kegelschnitt-Netzes, seine Jacobische Kurve, die Kurve (Nr. 225), aus deren Punkten die drei Punktepaare $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, sowie auch die Paare der weiteren gemeinsamen konjugierten Punkte — alle auf c^3 gelegen, — durch Strahlenpaare einer Involution projiziert werden. Die zweite eindeutige Beziehung auf c^3, die der gemeinsam konjugierten Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ aller Polarfelder des Netzes, ist hier auch involutorisch. Weil eben die konjugierten Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ aus jedem Punkte der c^3 durch gepaarte Strahlen einer Involution projiziert werden, so müssen zwei solche Strahlen die c^3 immer noch in einem zweiten Paare konjugierter Punkte treffen. Daher treffen, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ konjugiert sind und ebenso $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, sowohl $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$, als $\mathfrak{A}\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{A}'$ sich auf der Kurve. Diese Punkte $\mathfrak{A}_0 = (\mathfrak{A}\mathfrak{A}', \mathfrak{B}\mathfrak{B}')$ und $\mathfrak{B}_0 = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}', \mathfrak{B}\mathfrak{A}')$ sind, nach dem Satze von Hesse (Nr. 314), ebenfalls in allen Polarfeldern des Netzes konjugiert, also auf c^3 gelegen.

Die beiden Involutionen um $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ haben die Eigenschaft, daß zu jedem Strahlenpaare $\mathfrak{A}_0(\mathfrak{A}\mathfrak{A}', \mathfrak{B}\mathfrak{B}')$ der einen ein Strahlenpaar $\mathfrak{B}_0(\mathfrak{A}\mathfrak{B}', \mathfrak{B}\mathfrak{A}')$ der andern gehört, das dieselben Punktepaare projiziert; also sind sie projektiv und zwar in halbperspektiver Lage, da $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ auch entsprechend, also $\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0$ zu zwei entsprechenden Paaren gehört. Die Kurve ist ihr Erzeugnis (Nr. 176).

Vereinigen wir $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, so zeigt sich, daß die Tangenten der c^3 in zwei konjugierten Punkten denselben dritten Schnitt (Tangentialpunkt) haben.

Liegen wiederum vier Punktepaare vor, so haben die Kurven 3. Ordnung, welche zu $\frac{A_1 A_2 A_3}{B_1 B_2 B_3}$ und $\frac{A_1 A_2 A_4}{B_1 B_2 B_4}$ gehören, gemeinsam die sechs Punkte A_1, A_2, B_1, B_2, $(A_1 A_2, B_1 B_2)$ und $(A_1 B_2, B_1 A_2)$; die drei übrigen Schnittpunkte sind die Zentren der zentralen Polarfelder im Büschel, oder die Punkte, aus denen die vier Paare durch eine Involution projiziert werden.

Zwei Paare konjugierter Punkte $\frac{A_1}{B_1} \frac{A_2}{B_2}$ bestimmen ein Gebüsche von Polarfeldern, in denen allen, nach Hesses Satz, auch $(A_1 A_2, B_1 B_2)$ und $(A_1 B_2, B_1 A_2)$ konjugiert sind.

Zwei, drei, vier Polarfelder derselben Ebene haben ∞^2, ∞^1, eine endliche Anzahl (3) von Paaren konjugierter Punkte gemein, die dann auch den durch sie konstituierten büschel-linearen Systemen 1., 2., 3. Stufe gemeinsam sind. Dagegen haben fünf Polarfelder und das durch sie konstituierte büschel-lineare System 4. Stufe von Polarfeldern im allgemeinen keine gemeinsamen konjugierten Punkte.

Ähnlich ergeben sich die dualen Sätze über schar-lineare Systeme von Polarfeldern und ihre gemeinsamen Paare von konjugierten Geraden.

Auf einem büschel-linearen System 3. Stufe von Polar- 450
feldern ruht ein schar-lineares System 1. Stufe, eine Kegelschnitt-Schar. Die drei Paare konjugierter Punkte, welche jenen gemeinsam sind, sind (Nr. 449) die drei Punktepaare dieser Schar oder die Doppelpunkte der Involutionen der axialen Polarfelder (Nr. 404) des Systems 1. Stufe. Und die drei gemeinsamen Paare konjugierter Geraden eines schar-linearen Systems 3. Stufe sind die Geradenpaare des Kegelschnitt-Büschels, auf welchem es ruht.

Ferner ruht auf einem büschel-linearen System 2. Stufe $\mathfrak{S}$ oder Netze von Polarfeldern oder Kegelschnitten ein schar-lineares System ebenfalls 2. Stufe $\mathfrak{S}'$. Die Punktepaare dieses Systems $\mathfrak{S}'$ bilden die Paare der gemeinsamen konjugierten Punkte von $\mathfrak{S}$ und erzeugen eine Kurve 3. Ordnung c^3, die Jacobische Kurve dieses Systems $\mathfrak{S}$; sie möge, als Ort der Punktepaare des zweiten, die Cayleysche Kurve von $\mathfrak{S}'$ heißen. Als Jacobische Kurve des $\mathfrak{S}$ ist sie auch der Ort der Zentren der zentralen Polarfelder des Systems $\mathfrak{S}$ oder der Doppelpunkte seiner Geradenpaare.

Diese Geradenpaare von $\mathfrak{S}$ bilden andererseits die gemeinsamen Paare konjugierter Geraden von $\mathfrak{S}'$ und umhüllen eine Kurve 3. Klasse, c_3, welche die Jacobische Kurve von $\mathfrak{S}'$ und die Cayleysche Kurve von $\mathfrak{S}$ heißt. Als Jacobische Kurve von $\mathfrak{S}'$ ist sie auch der Ort der Axen der axialen Polarfelder dieses Systems oder der Doppellinien der Punktepaare desselben.

Jede Tangente von c_3 trägt also die beiden Punkte eines Punktepaars von $\mathfrak{S}'$, konjugiert in bezug auf $\mathfrak{S}$, also auf c^3 gelegen; der dritte Schnitt ist der Doppelpunkt des Geradenpaars von $\mathfrak{S}$, zu welchem sie gehört. In jedem Punkte von c^3 schneiden sich die beiden Geraden eines Paars aus $\mathfrak{S}$, konjugiert in bezug auf $\mathfrak{S}'$, also c_3 tangierend; und die dritte Tangente ist die Doppellinie des Punktepaars von $\mathfrak{S}'$, zu welchem jener Punkt gehört.

Leicht zu bestätigen sind diese Ergebnisse für das in sich duale System 2. Stufe der Polarfelder mit gemeinsamem Polardreiecke $\triangle$. Als büschel-lineares System $\mathfrak{S}$ stützt es das schar-lineare System $\mathfrak{S}'$ der Polarfelder, deren Basiskurven dem $\triangle$ eingeschrieben sind; als schar-lineares $\mathfrak{S}_1'$ ruht es auf dem büschel-linearen System $\mathfrak{S}_1$ der Polarfelder, deren Basiskurven dem $\triangle$ umgeschrieben sind (Nr. 448).

Für $\mathfrak{S}$ besteht die Jacobische Kurve 3. Ordnung c^3 aus den drei Seiten von $\triangle$, jedoch derartig, daß im allgemeinen nur die Ecken Doppelpunkte von Geradenpaaren des Netzes sind und die Seiten sich nur dadurch ergeben, daß sie — mit lauter Doppelpunkten erfüllte — Geradenpaare mit vereinigten Geraden darstellen. Jede Ecke von $\triangle$ trägt eine Involution von Geradenpaaren des Netzes; die drei Büschel um die Ecken stellen also die Cayleysche Kurve 3. Klasse von $\mathfrak{S}$ dar. Dieselben Kurven ergeben sich bei $\mathfrak{S}_1$, aber in anderer Weise; dessen Geradenpaare zerfallen in eine Seite von $\triangle$ und eine Gerade durch die Gegenecke. Für $\mathfrak{S}_1'$ und $\mathfrak{S}'$ aber ist es umgekehrt: die drei Büschel um die Ecken bilden die Jacobische Kurve 3. Klasse und die Seiten die Cayleysche Kurve 3. Ordnung.

Ferner bei $\mathfrak{S}$ ist einem Punkte einer Seite von $\triangle$ die Gegenecke konjugiert; so entstehen die Jacobische Kurve und die Cayleysche als Ort solcher Punkte, welche konjugierte Punkte haben, und der Verbindungslinien dieser Punkte.

Bei $\mathfrak{S}_1$ hingegen ist einem Punkte einer Seite von $\triangle$ ein anderer Punkt derselben konjugiert; die drei Seiten bilden die Jacobische Kurve. Dabei bleibt je die Verbindungslinie fest, und die Büschel um die Ecken von $\triangle$ ergeben sich als Cayleysche Kurve, indem jede Ecke sich selbst konjugiert und die Verbindungslinie unbestimmt ist.

451 Das System aller ∞^5 Polarfelder einer Ebene ist in sich dual, sowohl büschel-, als schar-linear. Das schar-lineare System 2. Stufe der Korrelationen, die auf ihm ruhen, und das büschel-lineare derjenigen, welche es stützen, sind sehr spezieller Art. Jenes besteht aus allen axialen Korrelationen mit vereinigten Axen, deren charak-

teristische Projektivität die Identität ist, dieses aus den ähnlich beschaffenen zentralen Korrelationen[1]).

In der Tat, es sei $\mathfrak{P}$ ein Polarfeld und $\mathfrak{A}$ eine jener axialen Korrelationen; wenn dann $a'b'c'$ ein Polardreiseit von $\mathfrak{P}$ ist, so ist das in $\mathfrak{P}$ polare Dreieck $ABC \equiv a'b'c'$, die Pole aber von a', b', c' in $\mathfrak{A}$ sind die Punkte auf der Axe, durch welche sie gehen; polar ist also ein ausgeartetes Dreieck $A_1 B_1 C_1$ (mit Ecken, die in einer Gerade liegen), das dem ABC eingeschrieben ist.

Für ein Polarfeld $\mathfrak{P}$ seien die beiden Dreiseite $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$ polar; es gehört dann zu dem büschel-linearen Systeme 2. Stufe von Korrelationen, für die das auch gilt. Das darauf ruhende schar-lineare System 5. Stufe der Korrelationen, in denen a_1 und b_1, a_2 und b_2, a_3 und b_3 konjugiert sind, und das schar-lineare System 2. Stufe der eben beschriebenen axialen Korrelationen $\mathfrak{A}$ werden umfaßt von dem schar-linearen Systeme 7. Stufe der auf $\mathfrak{P}$ ruhenden Korrelationen und haben deshalb eine Korrelation gemein, also eine $\mathfrak{A}$, in der a_1 und $b_1, \ldots$ konjugiert sind, d. h. auf deren Axe sie sich schneiden. Damit sind $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$, zwei polare Dreiseite eines Polarfeldes, von neuem als perspektiv erkannt (Nr. 314).

Für zwei polare Vierseite des $\mathfrak{P}$ erhalten wir dagegen nicht ein entsprechendes Ergebnis, denn den beiden Systemen 4. und 2. Stufe, mit denen wir dann zu tun haben, ist keine Korrelation gemeinsam.

Wir wenden uns nun zu der schon in Nr. 423 vorgenommenen 452
Aufgabe, **das durch fünf Paare konjugierter Punkte eindeutig bestimmte Polarfeld (050) zu vervollständigen, zu jedem Punkte die Polare zu konstruieren**, um sie jetzt unter Benutzung von Apolaritäts-Eigenschaften zu behandeln.

Auch diese Aufgabe kann, ähnlich wie in Nr. 444, auf die andere zurückgeführt werden:

Wenn vier Paare von konjugierten Punkten $\begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 \end{matrix}$ **gegeben sind, zu einem Punkte A_5 den B_5 zu konstruieren, der ihm in dem Büschel (0040) von Polarfeldern, den jene bestimmen, gemeinsam konjugiert ist.**

Für solche fünf Paare, gemeinsam konjugiert in allen Polarfeldern eines Büschels $\mathfrak{B}$, gilt wiederum folgendes. In zwei Gruppen von je zwei und drei Paaren geteilt:

$$\begin{matrix} A_1 A_2 \\ B_1 B_2 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} A_3 A_4 A_5 \\ B_3 B_4 B_5 \end{matrix},$$

liefern sie ein Gebüsche und ein Netz von Polarfeldern, denen $\mathfrak{B}$ gemeinsam ist. Daher befinden diese sich in einem büschel-linearen

1) Rosanes, Journal f. Math., Bd. 88, S. 247.

System 4. Stufe, das durch alle Büschel entsteht, welche die Polarfelder des Gebüsches mit einem solchen aus dem Netze verbinden, das nicht zu $\mathfrak{B}$ gehört.

Für alle Polarfelder des Gebüsches sind auch konjugiert die Punkte $A_0 = (A_1A_2, B_1B_2)$ und $B_0 = (A_1B_2, B_1A_2)$. Auf ihm ruht eine Schar, zu welcher (Nr. 448) A_1B_1, A_2B_2, A_0B_0 als Punktepaare gehören; folglich bilden die drei Geraden $s_1 = A_1B_1$, s_2, s_0 das gemeinsame Polardreiseit derselben.

Auf dem Netze ruht ein schar-lineares System 2. Stufe von Polarfeldern, welches mit dieser Schar das Polarfeld Γ gemeinsam hat, das auf jenem büschel-linearen Systeme 4. Stufe ruht. Für Γ ist $s_1s_2s_0$ ein Polardreiseit; es handelt sich darum, es weiterhin möglichst einfach zu bestimmen.

Γ ruht, dem schar-linearen Systeme 2. Stufe angehörend, auf den zentralen Polarfeldern des Netzes. Die Zentren derselben erfüllen eine Kurve 3. Ordnung c^3, welche durch die sechs Punkte der drei Paare geht; und es sind diejenigen zentralen Polarfelder, deren Zentren in A_3, B_3, A_4, B_4, A_5 fallen, besonders geeignet, vor allem das mit dem Zentrum A_5, weil seine Involution $A_5(A_3, B_3; A_4, B_4)$ vom gesuchten B_5 unabhängig ist.

Nun gilt (Nr. 439) für jedes der Γ stützenden zentralen Polarfelder, daß die Strahlen durch das Zentrum, welche in Γ zu zwei Strahlen konjugiert sind, die in der charakteristischen Involution ein Paar bilden, gleichfalls ein Paar bilden, und daß umgekehrt, wenn dies einmal der Fall ist, Γ auf dem zentralen Polarfelde ruht.

Γ ist dasjenige Polarfeld aus der obigen Schar, das auf dem zentralen Polarfelde mit der Involution $A_5(A_3, B_3; A_4, B_4)$ ruht. Sei nun $\bar{a}$, $\bar{b}$ ein Paar dieser Involution, so gibt es in der Schar ein Polarfeld $\bar{\Gamma}$, in welchem $\bar{a}$, $\bar{b}$ konjugiert sind. Ebenso legt ein beliebiger Strahl a des Büschels A_5 ein Polarfeld in der Schar fest, in dem er zu $\bar{a}$ konjugiert ist; und in demselben Polarfelde sei b aus dem Büschel A_5 zu $\bar{b}$ konjugiert; a ergibt sich ebenso aus b. Folglich bewegen sich a und b projektiv; die Projektivität legen wir fest durch $\bar{b}$, $\bar{a}$, die bei $\bar{\Gamma}$ sich ergeben, und zwei Paare, zu denen wir am besten zwei axiale Polarfelder der Schar benutzen; z. B. (A_1, B_1) liefert uns a_1, b_1, welche bzw. von $\bar{a}$, $\bar{b}$ durch A_1, B_1 harmonisch getrennt werden. Sie besitzt zwei Paare entsprechender Strahlen, welche auch in der Involution gepaart sind; das eine ist $\bar{b}$, $\bar{a}$; das andere, welches nach Nr. 209 linear konstruierbar ist, bestehe aus a', b'. Für Γ sind also $\bar{a}$ und a', $\bar{b}$ und b' konjugiert; und Γ ist durch das Polardreiseit $s_1s_2s_0$ und die Involution $(\bar{a}, a'; \bar{b}, b')$ konjugierter Strahlen festgelegt. Diese Bestimmung kann auf diejenige durch zwei Involutionen konjugierter Punkte oder Strahlen, deren

Träger selbst konjugiert sind, zurückgeführt werden (Nr. 320); und da ist ja leicht zu jedem Elemente das polare zu konstruieren.

Ist nun Γ so bestimmt, so nehme man eins der vier übrigen bequemen zentralen Polarfelder, auf denen Γ ruht, etwa das mit dem Zentrum A_3, verschafft sich zu dem bekannten Paare $A_3(A_4, B_4)$ ein zweites in den beiden Strahlen, die diesen in Γ konjugiert sind, und konstruiert den Strahl, welcher in der so bestimmten Involution dem A_3A_5 gepaart ist; er muß durch B_5 gehen. Wiederholt man dies bei einem andern der vier Punkte, so erhält man einen zweiten Strahl für B_5.

Dieser Punkt B_5 ist linear konstruiert.

Liegt nun die ursprüngliche Aufgabe vor mit fünf gegebenen Paaren konjugierter Punkte:

$$(0050) \qquad \left| \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 \end{matrix} \right|,$$

so werden zu A_6 in $\left| \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 \end{matrix} \right|$ und $\left| \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_5 \\ B_1 B_2 B_3 B_5 \end{matrix} \right|$ die konjugierten Punkte B_6', B_6'' konstruiert; ihre Verbindungslinie ist die Polare b_6 von A_6 in (0050).

Mit Hilfe der gewonnenen Sätze können wir nochmals (Nr. 324) 453
das interessante Polarfeld nachweisen, das durch den Bündel kubischer Raumkurven, welche durch fünf Punkte gehen, in einer Ebene α hervorgerufen wird. Die drei Schnitte jeder Kurve des Bündels mit der Ebene bilden je ein Polardreieck dieses Polarfeldes, oder, anders gesagt, jede Gerade der Ebene hat zum Pole in demselben den dritten Schnitt derjenigen kubischen Raumkurve des Bündels, für welche sie Doppelsekante ist (Nr. 206). In der Tat, die Flächen 2. Grades, welche durch die fünf Punkte gehen, bilden ein büschel-lineares System 4. Stufe und schneiden in die Ebene α ein eben solches System von Kegelschnitten ein; also gibt es einen Kegelschnitt Γ_2^0 (oder ein Polarfeld), der auf allen Kegelschnitten dieses Systems ruht. Die Flächen des Systems, welche durch eine Gerade a der Ebene und die Bündelkurve gehen, für die sie Doppelsekante ist, bilden einen Büschel; sie schneiden Geradenpaare ein, von denen die eine die a ist, während die anderen durch den dritten Schnitt der Raumkurve gehen; da diese Geraden zu jener in bezug auf Γ_2^0 konjugiert sind, so ist dieser dritte Schnitt der Pol von a.

Jede Ebene durch drei von den fünf Punkten bildet mit einer durch die beiden übrigen ein Ebenenpaar des Flächensystems; also sind ihre Schnittlinien mit α konjugiert in bezug auf Γ_2^0. Daraus folgt, daß in bezug auf Γ_2^0 die Spuren jeder Verbindungslinie von zweien der fünf Punkte und der Verbindungsebene der übrigen Pol und Polare sind. Das Polarfeld ist das in Nr. 322 gefundene.

Der Kegelschnitt Γ_2^0 ist Ort der Berührungspunkte der Ebene mit Kurven des Bündels[1]), und der dritte Schnitt einer solchen Kurve liegt immer auf der Tangente von Γ_2^0 im Berührungspunkte, von welcher die Tangente der Raumkurve im allgemeinen verschieden ist.

In der Tangente von Γ_2^0 haben sich die beiden vom dritten Punkte ausgehenden Seiten des Polardreiecks vereinigt; sie sind Kanten des aus ihm die Kurve projizierenden Kegels.

Die Tangenten des Γ_2^0 sind Kanten, längs deren die Ebene α von durch die fünf Punkte gehenden Kegeln 2. Grades berührt wird.

Wenn wir nun die kubischen Raumkurven unseres Bündels betrachten, welche eine gegebene Gerade $\bar{a}$ treffen, so hat jede von ihnen mit einer durch $\bar{a}$ gehenden Ebene α noch zwei Punkte gemein; deren Verbindungslinie ist die Polare des auf $\bar{a}$ gelegenen Schnittpunktes in bezug auf den Γ_2^0 in α, geht daher durch den Pol $\bar{A}$ von $\bar{a}$; und umgekehrt jeder Strahl in α durch $\bar{A}$ als Doppelsekante führt zu einer Kurve des Bündels, welche $\bar{a}$ trifft. Somit sind unsere die $\bar{a}$ treffenden Kurven des Bündels diejenigen, welche die Strahlen des Büschels $(\bar{A}, \alpha)$ zu Doppelsekanten haben. Nun gibt es eine Kurve im Bündel, für welche $\bar{a}$ Doppelsekante ist; ihr dritter Schnitt ist $\bar{A}$, und diese Kurve ergibt sich bei ihren beiden durch $\bar{A}$ gehenden Doppelsekanten. Wir sehen, wie durch die Schnitte der Kurven mit ihren zu $(\bar{A}, \alpha)$ gehörigen Doppelsekanten eine Kurve 4. Ordnung entsteht, für die $\bar{A}$ Doppelpunkt ist; also ist die Fläche dieser Kurven 5. Ordnung, da $\bar{a}$ ihr einfach angehört.

Wir können diese Fläche durch zwei Kegelbüschel 2. Ordnung erzeugen. Zu jedem Strahle a von $(\bar{A}, \alpha)$, der Doppelsekante werden soll, haben wir im Kegelbüschel $A_5(A_1, A_2, A_3, A_4)$ den Kegel zu konstruieren, dessen Kanten das Doppelverhältnis $a(A_1, A_2, A_3, A_4)$ umfassen, und im Büschel $A_4(A_1, A_2, A_3, A_5)$ denjenigen, dessen Kanten das Doppelverhältnis $a(A_1, A_2, A_3, A_5)$ umfassen. Diese beiden Kegel schneiden sich in der kubischen Raumkurve, welche durch $A_1, \ldots A_5$ geht und die a zweimal trifft, außer in $A_4 A_5$ (Nr. 224). Jedem Kegel des ersten Büschels sind zwei Strahlen a aus $(\bar{A}, \alpha)$ zugeordnet, diejenigen des tetraedralen Komplexes, welcher zum Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ gehört und den Kegel enthält; jedem dieser Strahlen ist ein Kegel im zweiten Büschel zugeordnet; und ebenso umgekehrt. Es entsteht daher zwischen den beiden Kegelbüscheln eine Korrespondenz [2, 2] und auf einer Gerade eine Korrespondenz [4, 4]; also ist das Erzeugnis eine Fläche 8. Ordnung; aber die beiden Ebenenpaare

1) Den Komplex dieser Berührungs-Kegelschnitte hat Humbert, Journal de l'Ecole polytechnique, Heft 64, untersucht.

$A_5(A_1A_2, A_3A_4)$ und $A_4(A_1A_2, A_3A_5)$ sind entsprechend, beide dem Strahle des Büschels $(\bar{A}, \alpha)$ zugeordnet, welcher die Verbindungslinie A_1A_2 trifft; folglich gehört die gemeinsame Ebene $A_3A_4A_5$ und ebenso $A_4A_5(A_1, A_2)$ zum Erzeugnisse; und das eigentliche Erzeugnis ist eine Fläche 5. Ordnung.

Die kubischen Raumkurven, welche durch fünf gegebene Punkte $A_1, \ldots A_5$ gehen und eine gegebene Gerade $\bar{a}$ treffen, erzeugen eine Fläche 5. Ordnung, auf welcher $\bar{a}$ einfach und diejenige Raumkurve des Bündels, welche $\bar{a}$ zweimal trifft, doppelt ist.

Die zehn Verbindungslinien der fünf Punkte befinden sich auf der Fläche, weil sie zu zerfallenden erzeugenden Kurven gehören.

Alle Kurven des Bündels, welche eine durch A_5 gehende Gerade $\mathfrak{a}$ treffen, erfüllen den Kegel 2. Grades $A_5(A_1, A_2, A_3, A_4, \mathfrak{a})$, und durch einen beliebigen Punkt desselben geht eine; die beiden, welche durch die Schnitte mit $\bar{a}$ gehen, treffen $\mathfrak{a}$ in den beiden Punkten, welche diese Gerade mit der Fläche 5. Ordnung, außer dem Punkte A_5, gemein hat. Daraus folgt, daß auf der Fläche 5. Ordnung die fünf Punkte $A_1, \ldots A_5$ dreifach sind[1]).

Die Doppelsekanten dieser $\bar{a}$ treffenden kubischen Raumkurven des Bündels bilden einen Komplex 5. Grades. Denn diejenigen Kurven des Bündels, welche die Strahlen eines Büschels zu Doppelsekanten haben, erzeugen eine Fläche 5. Ordnung, und fünf von ihnen treffen daher $\bar{a}$; so daß im Büschel fünf Strahlen des Komplexes liegen. Die Komplexkurve 5. Klasse in jeder Ebene α durch $\bar{a}$ besteht aus dem Büschel um $\bar{A}$ und der Kurve 4. Klasse, welche in dem oben beschriebenen Polarfeld (in bezug auf Γ_2^0) zu der in α gelegenen Kurve 4. Ordnung, die der Fläche 5. Ordnung angehört, polar ist.

§ 67. Lineare Systeme von Kollineationen zwischen denselben Feldern.

Wie schon die Ausartungen, so sind auch die beiden Arten von 454
linearen Systemen von Kollineationen zwischen zwei Feldern nicht wesentlich verschieden, sondern gehen durch die Vertauschung der beiden Felder ineinander über.

Wir haben uns schon entschlossen (Nr. 427), das Wort konjugiert auch bei der Kollineation anzuwenden. Zu einem Punkt A des ersten Feldes ist eine Gerade a' im zweiten konjugiert, wenn sie durch den entsprechenden Punkt A' geht und daher ihre entsprechende

1) Reye, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrgang 18, S. 525; Sturm, Journal f. Math., Bd. 79, S. 99; Math. Annalen, Bd. 10, S. 124 (sowie auch Bd. 6, S. 522).

a durch A. Es empfiehlt sich, den von Clebsch[1]) herrührenden Begriff des Konnexes einzuführen.

Mit jeder Kollineation sind zwei lineare Konnexe verbunden: in dem einen (A, a') werden jedem Punkt A des ersten Feldes alle ∞^1 konjugierten Geraden a' des zweiten und jeder a' alle ∞^1 konjugierten Punkte A zugeordnet; im andern (a, A') gehören die Geraden zum ersten und die Punkte zum zweiten Felde. Man kann auch bei der Korrelation die dual umgestalteten Konnexe definieren, den Konnex (A, A') der konjugierten Punkte und denjenigen (a, a') der konjugierten Geraden.

Wir haben nun also zwei lineare Systeme von Kollineationen, die Systeme (A, a') und (a, A'), welche aus den büschel-linearen Systemen (A, A') und den schar-linearen Systemen (a, a') von Korrelationen durch Dualisierung des einen Feldes sich ergeben. Es genüge zunächst, die einen zu betrachten.

Die zu zwei Kollineationen gehörigen Konnexe (A, a') haben eine Koinzidenz[2]) gemein, in welcher jedem A die einzige Gerade a' zugeordnet ist, welche die beiden entsprechenden Punkte verbindet, die gemeinsam konjugierte Gerade, und jeder Gerade a' der Schnittpunkt der beiden entsprechenden Geraden, der gemeinsam konjugierte Punkt. Diese Koinzidenz befindet sich in den linearen Konnexen (A, a') aller Kollineationen des linearen Systems (A, a') 1. Stufe, für welches jedoch der Name „Büschel" besser vermieden wird, da „Schar" genau ebenso berechtigt ist.

Sieben Paare (A, a') legen das System eindeutig fest; und die zugeordneten Elemente A, a' bilden eine quadratische Verwandtschaft zwischen den Punkten des ersten und den Geraden des zweiten Feldes; von ihr ist die Verwandtschaft (a, A') verschieden.

Die Dualisierung des zweiten Feldes lehrt weiter:

Bei einem linearen System 2. Stufe von Kollineationen erzeugen die Punkte A der allen gemeinsamen Paare konjugierter Elemente A und a' eine Kurve 3. Ordnung, die a' eine Kurve 3. Klasse; sechs solche Paare legen das System eindeutig fest.

Den Kollineationen eines linearen Systems 3. Stufe sind sechs Paare (A, a') gemeinsam, von denen fünf, die das System eindeutig festlegen, das sechste bestimmen (Satz von Clebsch, Nr. 434).

Wenn eine Kollineation allgemein ist, so vertritt jeder der beiden Konnexe sie; er bestimmt sie und den andern Konnex. Nehmen wir aber an, daß eine ausgeartete Kollineation

---

1) Math. Annalen, Bd. 6, S. 203.

2) Ein auch von Clebsch herrührender Name, also mit wesentlich anderer Bedeutung, als dies Wort sonst hat.

vorliege, welche im ersten Felde die singuläre Gerade s, im zweiten den singulären Punkt S' hat. Weil in ihr jedem beliebigen Punkte A der S' entspricht, einem auf s gelegenen Punkte aber jeder beliebige Punkt eines bestimmten Strahles durch S', so ist im Konnexe (A, a') einem beliebigen Punkte A jeder beliebige Strahl a' durch S', einem auf s gelegenen A jeder beliebige Strahl a' zugeordnet; d. h. von jedem Elementenpaare (A, a') des Konnexes inzidiert das eine mit dem singulären Elemente, das andere ist ganz beliebig. Damit wissen wir über die Kollineation nur, daß sie s und S' zu singulären Elementen hat, nichts über die charakteristische Projektivität. Im andern Konnexe (a, A') ist einer beliebigen Gerade a jeder beliebige Punkt A' einer bestimmten Gerade durch S' zugeordnet, und diese Gerade bleibt, wenn jene sich um ihren Schnitt mit s dreht, der ihr in der Projektivität zwischen s und S' entspricht. Aus diesem Konnexe können wir also nicht bloß die singulären Elemente, sondern auch die Projektivität entnehmen; er bestimmt die ausgeartete Kollineation vollständig.

Daher ist nur derjenige von den beiden Konnexen zur Bestimmung der ausgearteten Kollineation geeignet, bei dem es sich um Punkte und Geraden handelt, die je in demselben Felde liegen, wie der singuläre Punkt, bzw. die singuläre Gerade.

Es seien wieder die Korrelationen C und Γ apolar, so daß C die Γ stützt, und wir jene als (A, A')-Konnex oder -Korrelation, diese als (a, a')-Korrelation ansehen; und $x'y'z'$ sei ein Dreieck aus der vierfach unendlichen Mannigfaltigkeit des zweiten Feldes, XYZ, $X_1Y_1Z_1$ die beiden nach C, Γ polaren Dreiecke, von denen $X_1Y_1Z_1$ dem XYZ eingeschrieben ist. Wir dualisieren das zweite Feld; C wird eine (A, a')-Kollineation, Γ eine (a, A')-Kollineation; $x'y'z'$ geht in ein Dreieck $X'Y'Z'$ über, welchem XYZ, $X_1Y_1Z_1$ entsprechen, natürlich in derselben Lage wie vorhin. 455

Einem Dreieck XYZ des ersten Feldes aus dessen Mannigfaltigkeit entsprechen in den Korrelationen $x'y'z'$, $x_1'y_1'z_1'$, von denen letzteres dem ersteren eingeschrieben ist. Die Dualisierung verwandelt diese in zwei Dreiecke $X'Y'Z'$, $X_1'Y_1'Z_1'$, von denen nunmehr ersteres dem letzteren eingeschrieben ist.

Ist also eine (A, a')-Kollineation C zu einer (a, A')-Kollineation Γ apolar, so enthält das zweite Feld ∞^4 Dreiecke, welchen in C und Γ Dreiecke entsprechen, von denen das zweite dem ersten eingeschrieben ist; und das erste Feld enthält ∞^4 Dreiecke, denen in C und Γ Dreiecke entsprechen, von denen jetzt das erste dem zweiten eingeschrieben ist. Diese entsprechenden Dreiecke gehören immer zur vierfach unendlichen Mannigfaltigkeit ihres Feldes.

Sind im besondern bei C die Felder in derselben Ebene gelegen und ist Γ die Identität, so bedeutet die Apolarität von C mit Γ, daß C eine Kollineation in eingeschriebener Dreieckslage ist.

Ein lineares System von (A, A')-Korrelationen i^{ter} Stufe und das lineare System von (a, a')-Korrelationen $(7 - i)^{\text{ter}}$ Stufe, das auf ihm ruht, liegen vor; wir dualisieren wiederum das zweite Feld und erhalten ein lineares System von (A, a')-Kollineationen i^{ter} Stufe und das lineare System von (a, A')-Kollineationen $(7 - i)^{\text{ter}}$ Stufe, das zu ihm apolar ist.

Hier, wo die beiden Systemarten nur in der Zugehörigkeit der Elemente zu den Feldern sich unterscheiden, liegt kein Grund vor, einen Unterschied zu machen und das eine System als das stützende, das andere als das ruhende zu bezeichnen.

Gemeinsame Elementenpaare A, a' des ersteren Systems, wenn es solche hat, sind singuläre Elemente ausgearteter Kollineationen des zweiten, und ebenso gemeinsame Elementenpaare a, A' des zweiten singuläre Elemente ausgearteter Kollineationen des ersten. Diese Kollineationen zählen für ∞^3, weil die Projektivität völlig unbestimmt ist.

So besitzt ein lineares System von (A, a')-Kollineationen 4. Stufe sechs ausgeartete Kollineationen (s, S'), d. h. mit der singulären Gerade in Σ, dem singulären Punkt in Σ'; weil das apolare System 3. Stufe von (a, A')-Kollineationen so viele gemeinsame Paare konjugierter Elemente a, A' hat.

Man kann auch sagen: Das lineare System 4. Stufe von (A, a')-Konnexen enthält sechs ausgeartete Konnexe (s, S'), wie sie oben beschrieben sind.

Weil diese gemeinsamen Paare (a, A') des Systems 3. Stufe sechs linear-abhängige Elementenpaare sind, so sind es auch die Paare der singulären Elemente der ausgearteten Kollineationen (s, S') im Systeme 4. Stufe.

Diese Zahl 6, die wir jetzt gefunden haben, läßt sich in Zusammenhang bringen mit der Zahl 6 der Homologien in einem linearen Systeme (0050) (oder (0005)) von ebenen Kollineationen (Nr. 428).

Wir stellen eine Homologie und eine Identität (in derselben Ebene) als (A, a')-Kollineationen zusammen und bilden ihr System 1. Stufe (mit gemeinsamen Elementen A, a'); bei der Identität geht jede a' durch den zugehörigen A, weil der A entsprechende Punkt mit A zusammenfällt. Ist A' dem A entsprechend in der Homologie, so liegen die dem A entsprechenden Punkte in allen Kollineationen des Systems auf AA'; es gehen also bei allen die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch das Zentrum der Homologie; das System besteht aus lauter (konzentrischen) Homologien.

Jetzt sei das lineare System 3. Stufe von (A, a')-Kollineationen zwischen Feldern derselben Ebene gegeben:

$$(0050) \qquad \begin{vmatrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \\ a_1' a_2' a_3' a_4' a_5' \end{vmatrix};$$

wir erweitern es mit Hilfe der Identität zu einem linearen System 4. Stufe; dieses hat sechs ausgeartete Kollineationen je mit der singulären Gerade s in Σ und dem singulären Punkte S' in Σ'. Die dreifach unendliche Unbestimmtheit derselben heben wir auf, indem wir drei Bedingungen: a_1, A_1'; a_2, A_2'; a_3, A_3' geben, aber in solcher Lage, daß $(a_1, S'A_1')$, $(a_2, S'A_2')$, $(a_3, S'A_3')$ sich auf s befinden; damit bewirken wir, daß drei und folglich alle Strahlen durch S' mit ihren in der Projektivität entsprechenden Punkten auf s inzidieren. Die so bestimmte ausgeartete Kollineation ist eine Homologie und zwar eine (s, S') (Nr. 404). Verbinden wir sie mit der Identität durch ein System 1. Stufe, so muß dieses, weil mit dem gegebenen System 3. Stufe zusammen im System 4. Stufe befindlich, mit ihm eine Kollineation gemeinsam haben; dieselbe ist eine Homologie mit derselben Axe s und demselben Zentrum S', weil alle Mitglieder des Systems 1. Stufe so beschaffen sind. So erhalten wir die sechs Homologien in (0050); aber die sechs Paare singulärer Elemente s, S' in dem linearen Systeme 4. Stufe (gemeinsame Paare konjugierter Elemente in dem apolaren Systeme 3. Stufe) bilden ein linear-abhängiges System; folglich gilt das auch für die sechs mit ihnen identischen Paare der Axen und Zentren der sechs Homologien in (0050). Also:

Bei einem linearen Systeme (0050) ebener Kollineationen bilden nicht bloß die fünf gegebenen Paare $A_1, a_1'; \ldots A_5, a_5'$ und das durch sie bedingte sechste Paar A_0, a_0' ein System von sechs linear abhängigen Paaren, sondern auch die sechs Paare von Zentren und Axen der im Systeme befindlichen Homologien[1]).

§ 68. Das Problem der Kollineation von Bündeln.

Wenn, wie beim Problem der räumlichen Projektivität (§ 36), im 456
Raume zwei Gruppen von je vier Punkten:

$$G^4 \qquad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 \end{matrix}$$

gegeben sind, so besteht für jede zwei Punkte A, B die Kollineation:

$$A(A_1, A_2, A_3, A_4) \text{ koll. } B(B_1, B_2, B_3, B_4).$$

Tritt je ein fünfter Punkt A_5, B_5 hinzu, so werden wir zu einem

1) Math. Annalen, Bd. 22, S. 585.

beliebigen Punkt B, weil das Entsprechen zweier Strahlen in einer Bündelkollineation eine doppelte Bedingung ist, nur ∞^1 Punkte A haben, bei denen die Kollineation:

$$A(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \text{ koll. } B(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5)$$

möglich ist. Seien A, A' zwei von ihnen, so erzeugen die beiden kollinearen Bündel A, A' eine durch $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A, A'$ gehende kubische Raumkurve. Weil durch die sechs ersten dieser Punkte eine solche Kurve eindeutig bestimmt ist (Nr. 206), so erhellt, daß alle Punkte A, welche unsere Kollineation erfüllen, auf dieser kubischen Raumkurve liegen; und ersichtlich kann man B durch jeden Punkt der kubischen Raumkurve ersetzen, welche er mit $B_1, \ldots B_5$ bestimmt.

Liegen also zwei fünfpunktige Gruppen:

$$G^5 \quad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 \end{matrix}$$

und damit zwei Bündel von kubischen Raumkurven vor, so sind dieselben eindeutig einander zugeordnet, derartig, daß von irgend zwei Punkten A und B einander zugeordneter Kurven dieser Bündel nach den fünfpunktigen Gruppen kollineare Bündel gehen.

Es seien a^3, b^3 zwei solche entsprechenden oder analogen Kurven. Es sind alle Bündel über $A_1, \ldots A_5$ aus den verschiedenen Punkten A von a^3 zu dem Bündel $B(B_1, \ldots B_5)$, wo B ein beliebiger Punkt von b^3 ist, und untereinander kollinear, und alle Kegel 2. Grades $A(A_1, A_2, \ldots A_5)$, d. h. die Kegel, welche aus den A von a^3 diese Kurve projizieren, sind dem Kegel $B(B_1, \ldots B_5)$, welcher b^3 aus B projiziert, entsprechend, und die Kantenreihen auf jenen sind projektiv zu der Kantenreihe auf diesem; also jeder Kante dieses Kegels, die nach einem Punkte $\mathfrak{B}$ von b^3 geht, entsprechen in allen jenen Bündeln Strahlen, die nach demselben Punkte $\mathfrak{A}$ von a^3 gehen. Es entstehen daher auf a^3 und b^3 projektive Punktreihen der Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, in denen auch A_i und B_i entsprechend sind. In allen den Kollineationen zwischen den Bündeln um einen beliebigen Punkt A von a^3 und einen beliebigen Punkt B auf b^3 gehen nach zwei in dieser Projektivität entsprechenden Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ auf a^3, b^3 entsprechende Strahlen. Von den Doppelsekanten $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$ kommen, weil sie in den kollinearen Bündeln A, B entsprechend sind, projektive Ebenenbüschel:

$$A\mathfrak{A}(A_1, \ldots A_5) \;\overline{\wedge}\; B\mathfrak{B}(B_1, \ldots B_5).$$

D. h. unsere Kurven sind auch analog in bezug auf die beiden fünfpunktigen Gruppen im Problem der räumlichen Projektivität; während wir unser jetziges Problem als das der Kollineation[1]) bezeichnen können. Die Identität der analogen Raumkurven in beiden Fällen wird sich später (Nr. 470) nochmals auf einfachere Weise ergeben.

Der größeren Deutlichkeit halber unterscheiden wir, während wir uns mit dem Problem der Kollineation beschäftigen, assoziierte Punkte A, B in unserm jetzigen Problem und korrespondierende Geraden a, b in dem älteren der räumlichen Projektivität.

Die kubischen Raumkurven a^3, welche den eine Gerade $\bar{b}$ treffenden b^3 analog sind, erzeugen, ebenso wie diese (Nr. 453), eine Fläche 5. Ordnung $\mathfrak{A}^5$. Es handelt sich darum, zu zeigen, daß zwei beliebige Geraden $\bar{a}, \bar{b}$ von fünf Paaren analoger Kurven beziehentlich getroffen werden. Wir konstruieren in zwei Ebenen α, β, welche bzw. durch $\bar{a}, \bar{b}$ gehen, die den beiden Kurvenbündeln zugehörigen Büschel $(\bar{A}, \alpha)$, $(\bar{B}, \beta)$, deren Strahlen Doppelsekanten von solchen Bündelkurven sind, welche $\bar{a}$, bzw. $\bar{b}$ treffen. Es gibt aber in den beiden Büscheln $(\bar{A}, \alpha)$, $(\bar{B}, \beta)$ fünf Paare von Strahlen, welche Doppelsekanten von analogen Kurven sind und daher in bezug auf G^5 korrespondieren; denn dem einen Büschel entspricht (Nr. 248 am Schlusse: Signatur (20), oder auch Nr. 453) ein Komplex 5. Grades von korrespondierenden Strahlen, also mit fünf Strahlen im andern Büschel.

Erweitern wir unsere Punktgruppen zu solchen mit je sechs 457
Punkten:

$$G^6 \quad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 \end{matrix},$$

so ist beim Probleme der räumlichen Projektivität jeder der ∞^3 Regelscharen $\mathfrak{B}^2$ durch die eine Gruppe eine Regelschar $\mathfrak{A}^2$ durch die andere analog, so daß von zwei beliebigen Geraden a, b der einen und der andern projektive Ebenenbüschel nach den beiden Punktgruppen gehen. Die Leitscharen $\mathfrak{A}_1^2$, $\mathfrak{B}_1^2$ werden projektiv, so daß A_i und B_i je auf entsprechenden Geraden liegen und weitere entsprechende Ebenen der Büschel a, b immer nach entsprechenden Geraden von $\mathfrak{A}_1^2$, $\mathfrak{B}_1^2$ gehen.

Wollen wir nun aber Punkte A, B haben, welche kollineare Bündel nach den Gruppen senden, so wird es nicht mehr zu jedem Punkte B einen entsprechenden geben, denn von den ∞^1 auf einer kubischen Raumkurve gelegenen Punkten, die dem B in bezug auf die fünfpunktigen Gruppen assoziiert sind, wird keiner die doppelte Bedingung erfüllen, daß der nach A_6 gehende Strahl in der Kollineation dem BB_6 entspricht. Es bestehen also in den beiden Räumen zwei Flächen von assoziierten Punkten.

Um die Ordnung dieser Flächen zu erhalten, bilden wir die beiden

---

1) Math. Annalen, Bd. 10, S. 117.

Gruppenpaare $G^5_{(6)}$, $G^5_{(5)}$. Die Kurven 3. Ordnung, die einander analog sind in bezug auf zwei solche fünfpunktige Gruppen, sind dieselben für das Problem der räumlichen Projektivität, wie für das der Kollineation.

Eine Gerade b sei gegeben. Die kubischen Raumkurven des Bündels $(B_1 \ldots B_5)$, welche sie treffen, erzeugen eine Fläche 5. Ordnung und die ihnen in bezug auf $G^5_{(6)}$ analogen ebenfalls; diese letztere Fläche sei $\mathfrak{A}^5_{(6)}$, und bei dem andern Gruppenpaar $G^5_{(5)}$ ergebe sich die Fläche $\mathfrak{A}^5_{(5)}$. Einem Punkte B von b und der durch ihn gehenden Kurve des Bündels $(B_1 \ldots B_5)$ entspricht eine kubische Raumkurve auf $\mathfrak{A}^5_{(6)}$, welche der $\mathfrak{A}^5_{(5)}$ außer in den auf ihr dreifachen Punkten $A_1, \ldots A_4$ noch dreimal begegnet. Durch jeden dieser Punkte geht eine der diese Fläche erzeugenden Kurven, entsprechend drei Punkten B' auf b, die so dem B zugeordnet werden. Es entsprechen ebenso jedem B' drei Punkte B. Von den sechs Koinzidenzen der entstehenden Korrespondenz [3, 3] kommen vier auf folgende Weise zustande. Es sei B der Schnitt von b mit der Ebene $B_1B_2B_3$; die durchgehende Kurve besteht aus der Gerade B_4B_5 und einem sie schneidenden Kegelschnitt durch B_1, B_2, B_3, die analoge aus A_4A_5 und einem sie schneidenden Kegelschnitte durch A_1, A_2, A_3. Letzterer trifft $\mathfrak{A}^5_{(5)}$ noch in einem Punkte A; die durch diesen gehende Kurve von $\mathfrak{A}^5_{(5)}$ besteht aus A_4A_6 und einem Kegelschnitte durch A_1, A_2, A_3; also liegt von der analogen Kurve der konische Bestandteil in $B_1B_2B_3$, und der entsprechende Punkt B' ist B. Bei diesem Punktepaar A, B kann man aus:

$$A(A_1, \ldots A_5)\,\text{koll.}\,B(B_1, \ldots B_5),\quad A(A_1, \ldots A_4, A_6)\,\text{koll.}\,B(B_1, \ldots B_4, B_6)$$

nicht auf:

$$A(A_1, \ldots A_6)\ \text{koll.}\ B(B_1, \ldots B_6)$$

schließen, weil die Strahlen $A(A_1, A_2, A_3)$ in einer Ebene liegen, und ebenso $B(B_1, B_2, B_3)$, also durch das Entsprechen von $A(A_1, A_2, A_3, A_4)$ und $B(B_1, B_2, B_3, B_4)$ eine Kollineation nicht eindeutig festgelegt ist.

Es bleiben zwei Koinzidenzen und wir erhalten:

Die Punkte B, welche in bezug auf die beiden sechspunktigen Gruppen assoziierte Punkte A haben, bilden eine Fläche 2. Grades $\mathfrak{B}_0{}^2$ und diese assoziierten eine ebensolche $\mathfrak{A}_0{}^2$.

Die Punkte von G^6 liegen je auf der Fläche ihres Raums; jedem ist sogar eine ganze kubische Raumkurve assoziiert, die dann auf der andern Fläche liegt. Dem A_i korrespondiert die Kurve $b^3_{(i)}$, welche im Problem der räumlichen Projektivität in bezug auf $G^5_{(i)}$ der Kurve $a_0{}^3 = (A_1 \ldots A_6)$ analog ist; sie ist es also auch im jetzigen Problem. In bezug auf G^6 bleibt dies für den Punkt A_i von $a_0{}^3$ bestehen wegen der Unbestimmtheit des Strahls nach A_i. Ebenso ist dem B_i die

die Kurve $a^3_{(i)}$ assoziiert, welche in bezug auf $G^5_{(i)}$ zu $b_0{}^3 = (B_1 \ldots B_6)$ analog ist.

Weil diese Kurven $a^3_{(i)}$ und $b^3_{(i)}$ auf $\mathfrak{A}_0{}^2$, bzw. $\mathfrak{B}_0{}^2$ liegen, sind diese Flächen die Trägerflächen der Regelscharen $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}{}^2$, $\overline{\mathfrak{A}}{}^2$; $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}{}^2$, $\overline{\mathfrak{B}}{}^2$, von denen $\overline{\mathfrak{A}}{}^2$, $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}{}^2$ im Problem der räumlichen Projektivität den Kongruenzen der Doppelsekanten von $b_0{}^3$, $a_0{}^3$ analog sind (Nr. 243). Ihre Geraden treffen jene Kurven zweimal.

Die Kurve $a_0{}^3$ hat mit $\mathfrak{A}_0{}^2$ nur die sechs Punkte A_i gemein. Durchläuft nämlich A diese Kurve, so bleibt der Bündel $A(A_1, \ldots A_6)$ zu sich kollinear; die den A in bezug auf $G^5_{(6)}$ assoziierten Punkte B bilden die $b_6{}^3$, der Strahl des veränderlichen Bündels B, welcher dem AA_6 entspricht, erzeugt eine Regelfläche[1]). Diese geht im allgemeinen nicht durch B_6.

Einem Punkte B von $\mathfrak{B}_0{}^2$ können nicht zwei verschiedene Punkte A, A' assoziiert sein; denn deren untereinander kollineare Bündel würden eine durch $A_1, \ldots A_6$, A, A' gehende kubische Raumkurve erzeugen. Aber die Punkte A, A' von $\mathfrak{A}_0{}^2$ liegen nicht auf $a_0{}^3$. Die Korrespondenz der beiden Flächen $\mathfrak{A}_0{}^2$, $\mathfrak{B}_0{}^2$ ist also eindeutig.

Einem Punkte in $A_1A_2A_3$ muß ein Punkt in $B_1B_2B_3$ entsprechen; also sind die beiden Kegelschnitte, in denen diese Ebenen die $\mathfrak{A}_0{}^2$, $\mathfrak{B}_0{}^2$ schneiden, entsprechend. Wir nennen A_{45}, A_{46}, A_{56} die Spuren von A_4A_5, A_4A_6, A_5A_6 in $A_1A_2A_3$ und ähnlich im andern Raume. Dann folgt aus der Kollineation der Bündel um assoziierte Punkte A, B in diesen Ebenen:

$$A(A_1, A_2, A_3, A_{45}, A_{46}, A_{56}) \;\overline{\wedge}\; B(B_1, B_2, B_3, B_{45}, B_{46}, B_{56});$$

folglich müssen wir zwei (ebene) Kurven 3. Ordnung haben, mit eindeutig zugeordneten Punkten, von denen nach den beiden sechspunktigen Gruppen, die in den Klammern stehen, projektive Strahlenbüschel gehen. Zu diesen Kurven gehören ersichtlich die Geraden $A_{45}A_{46}A_{56}$, $B_{45}B_{46}B_{56}$, die andern Bestandteile sind unsere Kegelschnitte.

Jede kubische Raumkurve b^3 des Bündels $(B_1B_2B_3B_4B_5)$ trifft $\mathfrak{B}_0{}^2$ nur noch in einem Punkte B; sie enthält also, abgesehen von den Grundpunkten, nur einen Punkt, der einen in bezug auf die sechspunktigen Gruppen assoziierten Punkt hat; das ist der sechste Schnitt der analogen Kurve durch $A_1, \ldots A_5$ mit $\mathfrak{A}_0{}^2$.

Also treffen zwei in bezug auf $G^2_{(i)}$ analoge kubische Raumkurven a^3, b^3 die $\mathfrak{A}_0{}^2$, $\mathfrak{B}_0{}^2$ (außer in den Grundpunkten) in zwei Punkten A, B, die in bezug auf G^6 assoziiert sind.

---

1) Sie ist eine Regelschar; die Leitschar wird von Doppelsekanten der $b_6{}^3$ gebildet, um welche sich die durch den Strahl gehenden Ebenen drehen.

Es seien A und B zwei bzw. auf $\mathfrak{A}_0^2$, $\mathfrak{B}_0^2$ gelegene assoziierte Punkte, welche also nach den Gruppen von G^6 kollineare Bündel senden; sind dann a, b entsprechende Strahlen in diesen Bündeln, so ist:

$$a(A_1, \dots A_6) \barwedge b(B_1, \dots B_6);$$

also sind a und b korrespondierend in der räumlichen Projektivität und gehören zu analogen Regelscharen $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$.

Wenn A und B assoziierte Punkte auf $\mathfrak{A}_0^2$, $\mathfrak{B}_0^2$ sind und eine Gerade a durch A geht, so geht eine von den korrespondierenden Geraden b durch B.

Ist a die Gerade aus der Regelschar $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}{}^2$ auf $\mathfrak{A}_0^2$, so ist dies selbstverständlich, weil eine Gerade aus dieser Regelschar nicht bloß die ∞^1 Geraden einer Regelschar zu korrespondierenden hat, sondern die ∞^2 Doppelsekanten von b_0^3.

Gehört aber a zur Regelschar $\overline{\mathfrak{A}}{}^2$, so muß die analoge Regelschar durch B gehen, und da durch jeden Punkt von $\mathfrak{A}_0^2$ eine Gerade von $\overline{\mathfrak{A}}{}^2$ geht, so muß die analoge Regelschar durch jeden Punkt von $\mathfrak{B}_0^2$ gehen, also ist sie $\overline{\mathfrak{B}}{}^2$; denn für $\overline{\mathfrak{B}}{}^2$ gilt ähnliches wie für $\overline{\mathfrak{A}}{}^2$. Und so holen wir für das Problem der räumlichen Projektivität nach:

In bezug auf G^6 sind die beiden ausgezeichneten Regelscharen $\overline{\mathfrak{A}}{}^2$, $\overline{\mathfrak{B}}{}^2$, welche den Regelscharen $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}{}^2$, $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}{}^2$ verbunden sind, denen je nicht bloß eine Regelschar analog ist, sondern die Kongruenz der Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve b_0^3, a_0^3, zueinander analog.

Durch $B_1, \dots B_5$ geht eine kubische Raumkurve (b_6^3), welche eine Gerade aus $\overline{\mathfrak{B}}{}^2$ zur Doppelsekante hat, daher ganz auf der Fläche $\mathfrak{B}_0^2$ liegt und jede Gerade von $\overline{\mathfrak{B}}_2$ zweimal trifft; sie verhält sich also zur Regelschar $\overline{\mathfrak{B}}{}^2$ so, wie b_6^3 zur $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}_2$. Ihr ist in bezug auf $G^5_{(6)}$ analog eine durch $A_1, \dots A_5$ gehende Kurve (a_6^3), welche die Geraden von $\overline{\mathfrak{A}}{}^2$, die ja denen von $\overline{\mathfrak{B}}{}^2$ korrespondieren, zu Doppelsekanten hat, also auf $\mathfrak{A}_0^2$ liegt. Sie sind auch einander analog im Problem der Kollineation in bezug auf $G^5_{(6)}$; weil sie aber auf $\mathfrak{A}_0^2$, $\mathfrak{B}_0^2$ liegen, so hat jeder Punkt der einen Kurve einen in bezug auf G^6 assoziierten auf der andern.

Solcher Paare analoger Kurven auf den beiden Flächen haben wir sechs; aber jeder Punkt auf der einen Kurve hat, im allgemeinen, nur einen in bezug auf G^6 assoziierten auf der andern; während bei der Analogie in bezug auf G^5 jeder Punkt der einen jedem der andern assoziiert ist.

Wir können jetzt leicht die Kurven finden, welche im Problem der Kollineation in bezug auf G^6 den Geraden der einen oder andern Regelschar von $\mathfrak{B}_0^2$ assoziiert sind. Es sei b' eine Gerade von $\overline{\mathfrak{B}}{}^2$;

sie trifft (b_6^3) zweimal. Die sämtlichen kubischen Raumkurven b^3 durch $(B_1 \ldots B_5)$, welche b' treffen, erzeugen eine Fläche 5. Ordnung $\mathfrak{B}^5$, auf der (b_6^3) doppelt liegt, die in bezug auf $G^5_{(6)}$ analogen a^3 ebenfalls eine Fläche 5. Ordnung $\mathfrak{A}^5$ (Nr. 456), auf der (a_6^3) doppelt liegt. Dem sechsten Schnittpunkt einer b^3 mit $\mathfrak{B}_0^2$, der bei unsern Kurven die b' durchläuft, entspricht der sechste Schnittpunkt der analogen a^3 mit $\mathfrak{A}_0^2$ in bezug auf G^6, der b' daher der Restschnitt dieser $\mathfrak{A}^5$ mit $\mathfrak{A}_0^2$, außer (a_6^3), also eine Kurve von der Ordnung $2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 4$. Und ähnlich entspricht einer Gerade b'' von $\overline{\mathfrak{B}}^2$, weil diese (b_6^3) nur einmal trifft, eine Kurve von der Ordnung $2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7$. Also einer Gerade der Fläche $\mathfrak{B}_0^2$ entspricht, je nachdem sie zur Schar $\overline{\mathfrak{B}}^2$ oder $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}^2$ gehört, eine Kurve 4., bzw. 7. Ordnung auf $\mathfrak{A}_0^2$. Die Betrachtung der Schnitte der Geraden a', a'' von $\overline{\mathfrak{A}}^2$, $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}^2$ mit $\mathfrak{A}^5$ lehrt, daß jene Kurve 4. Ordnung den a' in einem, den a'' in drei Punkten, diese Kurve 7. Ordnung den a' in drei, den a'' in vier Punkten begegnet.

Wir schließen daraus, daß einem ebenen Schnitte von $\mathfrak{B}_0^2$ eine Kurve 11. Ordnung auf $\mathfrak{A}_0^2$ assoziiert ist, die den a' in vier, den a'' in sieben Punkten begegnet. Sie geht dreimal durch jeden der Punkte A_i, weil die Ebene die b_i^3 dreimal trifft.

Wir lassen jetzt siebente Punkte hinzutreten, so daß 458

$$G^7 \quad \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 \\ B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 \end{matrix}$$

vorliegt; in bezug auf $G^6_{(7)}$ und $G^6_{(6)}$ haben wir zwei Flächenpaare $\mathfrak{A}^2_{0,7}$, $\mathfrak{B}^2_{0,7}$; $\mathfrak{A}^2_{0,6}$, $\mathfrak{B}^2_{0,6}$. Die Flächen $\mathfrak{A}^2_{0,7}$ und $\mathfrak{A}^2_{0,6}$ durchschneiden sich in einer Raumkurve 4. Ordnung 1. Art a^4; wir wollen, insofern sie auf $\mathfrak{A}^2_{0,7}$ liegt, die ihr in bezug auf $G^6_{(7)}$ assoziierte Kurve auf $\mathfrak{B}^2_{0,7}$ ermitteln. Die Kurve 11. Ordnung auf $\mathfrak{A}^2_{0,7}$, welche einem ebenen Schnitte von $\mathfrak{B}^2_{0,7}$ assoziiert ist, trifft a^4 so oft als sie $\mathfrak{A}^2_{0,6}$ begegnet, 22 mal; also trifft die gesuchte korrespondierende Kurve den ebenen Schnitt so oft, und ist im allgemeinen 22. Ordnung. Weil aber a^4 durch $A_1, \ldots A_5$ geht, so lösen sich fünf kubische Raumkurven ab, und es bleibt eine Raumkurve 7. Ordnung b^7. Ferner, a_1^3 trifft $\mathfrak{A}^2_{0,6}$ und damit a^4, außer in A_2, A_3, A_4, A_5, noch zweimal; daher geht b^7 durch jeden der fünf Punkte $B_1, \ldots B_5$ doppelt. Sie begegnet infolgedessen der $\mathfrak{B}^2_{0,6}$, außer in diesen Punkten, noch in vier Punkten.

Sei B einer von ihnen, so liegt, weil er auf b^7 sich befindet, sein in bezug auf $G^6_{(7)}$ assoziierter A auf a^4 und damit auch auf $\mathfrak{A}^2_{0,6}$; weil B auf $\mathfrak{B}^2_{0,6}$ liegt, so liegt der ihm in bezug auf $G^6_{(6)}$ assoziierte auf $\mathfrak{A}^2_{0,6}$. Andererseits müssen beide assoziierten Punkte sich auf der kubischen Raumkurve durch $A_1, \ldots A_5$ befinden, welche in bezug auf $G^5_{(6,7)}$ dem B assoziiert ist; folglich vereinigen sie sich in den sechsten Schnitt A derselben mit $\mathfrak{A}^2_{0,6}$.

Daher ist für diese beiden Punkte B und A sowohl:

$$A(A_1, \ldots A_6) \text{ koll. } B(B_1, \ldots B_6),$$

als auch:

$$A(A_1, \ldots A_5, A_7) \text{ koll. } B(B_1, \ldots B_5, B_7);$$

daher:

$$A(A_1, \ldots A_7) \text{ koll. } B(B_1, \ldots B_7).$$

In bezug auf zwei siebenpunktige Gruppen G^7 gibt es vier Paare assoziierter Punkte A, B, welche nach ihnen kollineare Bündel senden.

Die drei Flächen $\mathfrak{A}^2_{0,7}$, $\mathfrak{A}^2_{0,6}$, $\mathfrak{A}^2_{0,5}$, welche zu $G^6_{(7)}$, $G^6_{(6)}$, $G^6_{(5)}$ gehören, haben diese vier Punkte A und die $A_1, \ldots A_4$ gemein, und ähnlich im andern Raume.

Wir haben im vorangehenden uns nur mit der doppelten Bedingung beschäftigt, daß entsprechende Strahlen der kollinearen Bündel nach gegebenen Punkten gehen; wir beabsichtigten das Problem der Kollineation auch nicht in seiner allgemeinsten Form zu behandeln, sondern nur in Zusammenstellung mit dem der räumlichen Projektivität.

§ 69. Das Problem der Korrelation von Bündeln.

459 Dagegen wollen wir, im Anschluß an die Ergebnisse korrelativer Felder, die wir in § 62 erhalten haben und auf Bündel übertragen, folgende allgemeinere Untersuchung über korrelative Bündel vornehmen.

Es sind in einem Raume A gegeben α Punkte A_i, β Geraden a_i, γ Punkte $\mathfrak{A}_i$, δ Geraden $\mathfrak{a}_i$, und ihnen homolog im Raume B α Geraden b_i, β Punkte B_i, γ Punkte $\mathfrak{B}_i$, δ Geraden $\mathfrak{b}_i$. Wir nennen, wenn $2\alpha + 2\beta + \gamma + \delta = \sigma$ ist, wieder $(\alpha\beta\gamma\delta)_\sigma$ die Signatur dieser Grundelemente. Es sollen nun korrespondierende oder assoziierte Punkte A, B aufgesucht werden, für welche die Bündel so korrelativ sind, daß den Strahlen AA_i und Ebenen Aa_i die Ebenen Bb_i und Strahlen BB_i entsprechen (polar sind) und den Strahlen $A\mathfrak{A}_i$ die Strahlen $B\mathfrak{B}_i$, den Ebenen $A\mathfrak{a}_i$ die Ebenen $B\mathfrak{b}_i$ konjugiert sind.

Die ganze umfangreiche Untersuchung kann hier nicht wiedergegeben werden[1]; wir müssen uns auf einen Überblick über das ganze Problem und die Hervorhebung einiger interessanter Fälle be-

---

1) Vgl. Sturm, Math. Annalen, Bd. 12, S. 254, und Schubert, Kalkul der abzählenden Geometrie, § 32.

schränken. Wir werden vorbereitende Betrachtungen und Beispiele für mehrdeutige Verwandtschaften erhalten.

Wenn $\sigma = 8$, können A und B in beliebige Punkte gelegt werden, und man hat dann eine gewisse Anzahl ζ_8 zwischen den Bündeln möglicher Korrelationen; sie ist für die verschiedenen Signaturen in der Tabelle (ζ) von Nr. 418 angegeben. Wir erinnern uns, daß $\zeta_8 = 1$ in allen Fällen, wo $\mathfrak{d} = 0$ ist, ausgenommen die Signatur

$$(2200) \quad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & B_1 & B_2 \end{vmatrix},$$

wo $\zeta_8 = 0$ ist. Zu jedem Punkte B gibt es in diesem Falle eine Fläche 2. Grades α^2 von Punkten A, bei denen Korrelationen zum Bündel B möglich sind, und dann gleich ∞^1; ist b' nämlich die Gerade aus B, welche b_1, b_2 trifft, so konstruiere man die Geraden a', welche a_1, a_2 treffen und für die $a'(A_1, A_2, a_1, a_2) \barwedge b'(b_1, b_2, B_1, B_2)$ ist; sie erzeugen die Fläche α^2. Wird diese Projektivität erfüllt, so liegen nur sieben Bedingungen vor, indem man Aa_2 durch einen in dieser Ebene liegenden Strahl ersetzen kann, der zu BB_2 konjugiert sein soll (Nr. 420).

Lassen wir σ zunehmen, so entstehen folgende Fragen: bei $\sigma = 9$, nach der Ordnung der Fläche, bei $\sigma = 10$, der Ordnung der Kurve und bei $\sigma = 11$ der endlichen Anzahl von Punkten A, die einem gegebenen Punkte B korrespondieren. Wir wollen diese Zahlen $\zeta_{9,B}$, $\zeta_{10,B}$, $\zeta_{11,B}$ nennen; $\zeta_{9,A}, \ldots$ würden die Zahlen sein, wenn A gegeben ist.

Bei $\sigma = 12, 13, 14$ handelt es sich um die Ordnung $\zeta_{12,B}$ der Fläche, die Ordnung $\zeta_{13,B}$ der Kurve, die endliche Zahl ζ_{14} der Punkte B, welche assoziierte Punkte A haben.

Oder: $\zeta_{9,B}$ ist die Anzahl der Paare A, B, wo B gegeben ist und A auf einer gegebenen Gerade a liegt, bei $\zeta_{10,B}$ soll A in einer gegebenen Ebene liegen, bei $\zeta_{11,B}$ ist A keiner Lagebedingung unterworfen. Bei $\zeta_{12,B}$, $\zeta_{13,B}$ soll B mit einer Gerade b, einer Ebene β inzidieren.

Bei $\sigma = 10$ aber können wir annehmen, daß für B und A Geraden b, a gegeben sind, mit denen sie inzidieren sollen; ζ'_{10} ist die Ordnung der Fläche, die einer Gerade b oder a entspricht, oder genauer, welche von der einem Punkte entsprechenden Kurve $\zeta_{10,B}{}^{\text{ter}}$, bzw. $\zeta_{10,A}{}^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugt wird, wenn dieser Punkt die Gerade b oder a durchläuft. Ein Zeiger A oder B ist hier nicht notwendig.

Bei $\sigma = 11$ schreiben wir B vor, auf b zu liegen, und A, auf α zu liegen; tun das $\zeta'_{11,B}$ Paare, so erhalten wir eine Kurve $\zeta'_{11,B}{}^{\text{ter}}$ Ordnung, die der Gerade b entspricht, und eine Fläche

$\zeta'_{11,B}$ter Ordnung, welche der Ebene α entspricht. Wir können diese Zahl auch $\zeta''_{11,A}$ nennen; und $\zeta'_{10,A} = \zeta''_{11,B}$ ist die Ordnung der Kurve, die einer Gerade a, und die Ordnung der Fläche, die einer Ebene β korrespondiert.

Bei $\sigma = 12$ haben wir die Zahl ζ'_{12} der Paare A, B, von denen A in α und B in β liegen.

Ersichtlich ist ein ζ_A oder ζ'_A für $(\alpha\beta\gamma\delta)$ gleich dem ζ_B oder ζ'_B für $(\beta\alpha\gamma\delta)$.

Bei $\sigma = 11$ hat ein gegebener Punkt B im allgemeinen noch einen oder mehrere korrespondierende Punkte A, von $\sigma = 12$ ab im allgemeinen keinen, und wenn er in speziellen Fällen einen hat, dann im allgemeinen nur einen. Die beiden Flächen von den Ordnungen $\zeta_{12,A}$, $\zeta_{12,B}$, die beiden Kurven von den Ordnungen $\zeta_{13,A}$, $\zeta_{13,B}$ sind daher in eindeutiger Beziehung ihrer Punkte; endlich bei $\sigma = 14$ handelt es sich um die Anzahl ζ_{14} der Paare von Punkten A, B, bei denen noch korrelative Bündel möglich sind.

Die Ermittelung der Zahlen ζ erfolgt ähnlich wie in § 62, indem wir in den einfach unendlichen Systemen von Korrelationen, welche durch die vorgeschriebenen Lagen von B, A entstehen, die Charakteristiken μ, ν wieder durch die Ausartungszahlen ausdrücken, und, um diese zu erhalten, bis zu den Ausartungen 2. Stufe zurückgehen. Wir wollen von den verschiedenen neun Problemen das erste etwas ausführlicher erörtern: die Ermittelung der Ordnung $\zeta_{9,B}$ der Fläche der Punkte A, die in bezug auf $(\alpha\beta\gamma\delta)_9$ einem festen Punkte B korrespondiert.

Wir legen eine Signatur $(\alpha\beta\gamma\delta)_8$ zugrunde und betrachten die ∞^1 Korrelationen zwischen dem Bündel B und einem Bündel aus einem Punkte A auf a, welche den in der Signatur $(\alpha\beta\gamma\delta)_8$ ausgesprochenen Bedingungen genügen; für jede Lage von A auf a gibt es ζ_8 Korrelationen. Es gebe in diesem System $\mathfrak{S}$ $\pi_{8,B}$ axiale Korrelationen (mit singulären Axen oder Ebenenbüscheln) und $\lambda_{8,B}$ planare (mit singulären Ebenen oder Strahlenbüscheln); jene gehen, wie wir wissen, durch Projektion aus zentralen, diese aus axialen Korrelationen zwischen Feldern hervor. Wir können $\pi_{8,B}$ als Grad einer Regelfläche deuten: es gibt ∞^1 axiale Korrelationen, die den Bedingungen $(\alpha\beta\gamma\delta)_8$ genügen und deren Axen in B durch B gehen; die Axen in A erzeugen die Regelfläche vom Grade π_B.

Da bei einer axialen Bündelkorrelation, die ja auf eine Projektivität zwischen Ebenenbüscheln hinausläuft, der Scheitel beliebig auf der singulären Gerade angenommen werden kann, so ist diese Regelfläche auch der Ort der Scheitel A.

460 Es seien ferner μ_8, ν_8 wieder die Charakteristiken des Systems $\mathfrak{S}$ (bei denen wir die Zeiger B nicht zufügen wollen), also die Zahlen

der Korrelationen des Systems $\mathfrak{S}$, welche noch einer einfachen Elementarbedingung $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ oder $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ genügen.

Durch $\mathfrak{B}$ seien zwei Geraden $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ gezogen. In jeder Korrelation von $\mathfrak{S}$ werde der Strahl konstruiert, welcher der Ebene $B\mathfrak{b}'$ entspricht, er trifft ν_8-mal eine Gerade $\mathfrak{a}'$, weil es ν_8 Korrelationen in $\mathfrak{S}$ gibt, für welche $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ in konjugierten Ebenen liegen, und erzeugt eine Regelfläche vom Grade ν_8; ebenso derjenige, welcher zu $B\mathfrak{b}''$ polar ist. Diese Regelflächen sind hinsichtlich ihrer Erzeugenden eindeutig bezogen, zwei entsprechende treffen sich auf der Gerade a, auf welcher A gleitet; in eine Ebene schneiden sie zwei ebenfalls eindeutig bezogene Kurven ν_8^{ter} Ordnung. Aber je zwei vereinigte entsprechende Punkte erhalten wir in den Spuren der $\pi_{8,B}$ A-Axen, und im Spurpunkt der a in der Ebene schneiden sich sogar ζ_8-mal zwei entsprechende Erzeugenden. Also umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte auf den Kurven eine Kurve von der Klasse $2\nu_8 - \pi_{8,B} - \zeta_8$. Von der vollen Kurve $2\nu_8^{\text{ter}}$ Klasse, welche von der Verbindungslinie eingehüllt wird, haben sich $\pi_{8,B}$ einfache und ein ζ_8-facher Strahlenbüschel abgelöst.

Diese Zahl $2\nu_8 - \pi_{8,B} - \zeta_8$ ist die Klasse des Torsus der Ebenen, welche entsprechende Erzeugenden der Regelflächen verbinden, d. h. der Ebenen, die in den Korrelationen von $\mathfrak{S}$ der $B\mathfrak{B}$ polar sind, so viele gehen durch $\mathfrak{A}$; aber wir wissen, es gibt μ_8 Korrelationen, wo diese Ebene durch $\mathfrak{A}$ geht; daher:

$$2\nu_8 = \mu_8 + \pi_{8,B} + \zeta_8.$$

Auf $\mathfrak{b}$ seien zwei Punkte $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$ gelegt; die Ebenen, die in den Korrelationen von $\mathfrak{S}$ dem Strahle $B\mathfrak{B}'$ polar sind, umhüllen, da μ_8 von ihnen durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{A}'$ gehen, einen Torsus von der Klasse μ_8, ebenso die Polarebenen von $B\mathfrak{B}''$. Bei den $\lambda_{8,B}$ planaren Korrelationen vereinigen sie sich in der singulären Ebene des A-Bündels; folglich ist der Ort der Schnittlinien je zu derselben Korrelation gehöriger Polarebenen, also der Strahlen, die zu $B\mathfrak{b}$ polar sind, eine Regelfläche vom Grade $2\mu_8 - \lambda_{8,B}$[1]); da aber in ν_8 Korrelationen von $\mathfrak{S}$ die Ebenen $A\mathfrak{a}$, $B\mathfrak{b}$ konjugiert sind, so müssen ν_8 die Gerade $\mathfrak{a}$ treffen; also:

$$2\mu_8 = \nu_8 + \lambda_{8,B}.$$

Kennen wir $\pi_{8,B}$, $\lambda_{8,B}$, so können wir μ_8, ν_8 berechnen; und μ_8 ist $\zeta_{9,B}$ für $(\alpha, \beta, \gamma + 1, \delta)_9$, ν_8 ist es für $(\alpha, \beta, \gamma, \delta + 1)_9$, so daß wir wiederum verschiedene $\zeta_{9,B}$ doppelt erhalten.

1) Durch diese Torsen mit eindeutig zugeordneten Tangentialebenen entsteht auf einer Gerade eine Korrespondenz $[\mu_8, \mu_8]$, von deren $2\mu_8$ Koinzidenzen $\lambda_{8,B}$ von den planaren Korrelationen herrühren, die andern den Grad der Regelfläche liefern. (Vgl. auch Nr. 177).

Um nun die $\pi_{8,B}$, $\lambda_{8,B}$ zu erhalten, gehen wir zu den einfach unendlichen Systemen $\mathfrak{S}_a$, $\mathfrak{S}_p$ von axialen und planaren Korrelationen, welche B fest, A auf a haben und $(\alpha\beta\gamma\delta)_7$ erfüllen; wir haben in beiden $\theta_{7,B}$ axial-planare Korrelationen, und $\dot{\pi}$, $\bar{\pi}$; $\dot{\lambda}$, $\bar{\lambda}$ seien wie in § 62 die Charakteristiken. Wir erhalten je eine Formel für $\mathfrak{S}_a$, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ hinzugefügt wird:

$$2\dot{\pi}_7 = \bar{\pi}_7 + \theta_{7,B},$$

und für $\mathfrak{S}_p$, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ hinzugefügt wird:

$$2\bar{\lambda}_7 = \dot{\lambda}_7 + \theta_{7,B} + \lambda_7,$$

wo der letzte Summand sich ergibt, wenn A auf a in die Ebene, mit der geschnitten wird, kommt, und aus der Tabelle (λ, π) von Nr. 418 zu entnehmen ist. $\dot{\pi}$, $\bar{\pi}$ geben $\pi_{8,B}$ und $\dot{\lambda}$, $\bar{\lambda}$ geben $\lambda_{8,B}$ für $(\alpha, \beta, \gamma+1, \delta)_8$, bzw. $(\alpha, \beta, \gamma, \delta+1)_8$. Wir haben also die $\theta_{7,B}$ direkt zu ermitteln, ferner die $\dot{\pi}$, $\dot{\lambda}$ für $(\alpha, \beta, \gamma, 0)_7$ oder, was dasselbe, die $\pi_{8,B}$, $\lambda_{8,B}$ für $(\alpha, \beta, \gamma+1, 0)_8$; wir berechnen dann vermittelst der obigen Formeln alle übrigen $\pi_{8,B}$, $\lambda_{8,B}$ und vermittelst der früheren μ_8, ν_8 oder $\zeta_{9,B}$.

$$\pi_{8,A},\ \lambda_{8,A} \text{ für } (\alpha\beta\gamma\delta)_8$$

ist

$$\pi_{8,B},\ \lambda_{8,B} \text{ für } (\beta\alpha\gamma\delta)_8.$$

461 Und so ähnlich in den acht andern Aufgaben; es wird genügen die Formeln und Tabellen (ganz oder teilweise) mitzuteilen[2]) mit einigen Bemerkungen, wobei wir immer diejenigen Formeln vorausschicken, die zuerst zur Berechnung heranzuziehen sind.

$$\left.\begin{array}{ll} & B \text{ fest, } A \text{ auf } a \\ (\alpha\beta\gamma\delta)_7 & 2\dot{\pi}_7 = \bar{\pi}_7 + \theta_{7,B},\quad 2\bar{\lambda}_7 = \dot{\lambda}_7 + \theta_{7,B} + \lambda_7; \\ (\alpha\beta\gamma\delta)_8 & 2\mu_8 = \nu_8 + \lambda_{8,B},\quad 2\nu_8 = \mu_8 + \pi_{8,B} + \zeta_8; \\ & \text{daraus: } \zeta_{9,B} \text{ für } (\alpha\beta\gamma\delta)_9. \end{array}\right\}\ \mathrm{I}$$

$$\left.\begin{array}{ll} & B \text{ fest, } A \text{ in } \alpha. \\ (\alpha\beta\gamma\delta)_8 & 2\dot{\pi}_8 = \bar{\pi}_8 + \theta_{8,B},\quad 2\bar{\lambda}_8 = \dot{\lambda}_8 + \theta_{8,B} + \lambda_{8,B}; \\ (\alpha\beta\gamma\delta)_9 & 2\mu_9 = \nu_9 + \lambda_{9,B},\quad 2\nu_9 = \mu_9 + \pi_{9,B} + \zeta_{9,B}; \\ & \text{daraus: } \zeta_{10,B} \text{ für } (\alpha\beta\gamma\delta)_{10}. \end{array}\right\}\ \mathrm{II}$$

---

2) Genaueres über die Ermittlung der θ für alle Signaturen $(\alpha\beta\gamma\delta)_7$ bis $(\alpha\beta\gamma\delta)_{12}$ und der λ und π für die Signaturen $(\alpha\beta\gamma 0)_8$ bis $(\alpha\beta\gamma 0)_{13}$ sehe man Math. Ann., Bd. 12. Bei den θ handelt es sich nur um Lagenbedingungen, bei den π sind die Ergebnisse des Problems der räumlichen Projektivität (§ 36) heranzuziehen, bei den λ Sätze aus dem § 37 über projektive Strahlenbüschel im Raume.

$$\left.\begin{array}{ll} & \textit{B auf b, A auf } a. \\ (\alpha\beta\gamma\delta)_8 & 2\dot{\pi}'_8 = \overline{\pi}'_8 + \theta'_8,\ 2\overline{\lambda}'_8 = \dot{\lambda}'_8 + \theta'_8 + \lambda_{8,A} + \lambda_{8,B}; \\ (\alpha\beta\gamma\delta)_9 & 2\mu'_9 = \nu'_9 + \lambda'_9,\ 2\nu'_9 = \mu'_9 + \pi'_9 + \zeta_{9,A} + \zeta_{9,B}; \\ & \text{daraus: } \zeta'_{10} \text{ für } (\alpha\beta\gamma\delta)_{10}. \end{array}\right\}\ \mathrm{III}$$

Die Zeiger A, B sind hier bei θ'_8, π'_9, λ'_9, ζ'_{10} nicht notwendig, weil A und B gleichartigen Lagebedingungen unterworfen sind.

$$\left.\begin{array}{ll} & \textit{B fest.} \\ (\alpha\beta\gamma\delta)_9 & 2\overline{\lambda}_9 = \dot{\lambda}_9 + \lambda_{9,B}; \\ (\alpha\beta\gamma\delta)_{10} & 2\mu_{10} = \nu_{10} + \lambda_{10,B},\ 2\nu_{10} = \mu_{10} + \zeta_{10,B}; \\ & \text{daraus: } \zeta_{11,B} \text{ für } (\alpha\beta\gamma\delta)_{11}. \end{array}\right\}\ \mathrm{IV}$$

$$\left.\begin{array}{ll} & \textit{B auf b, A in } \alpha. \\ (\alpha\beta\gamma\delta)_9 & 2\dot{\pi}'_9 = \overline{\pi}'_9 + \theta'_{9,B},\ 2\overline{\lambda}'_9 = \dot{\lambda}'_9 + \theta'_{9,B} + \lambda_{9,B} + \lambda'_9; \\ (\alpha\beta\gamma\delta)_{10} & 2\mu'_{10} = \nu'_{10} + \lambda'_{10,B},\ 2\nu'_{10} = \mu'_{10} + \pi'_{10,B} + \zeta_{10,B} + \zeta'_{10}; \\ & \text{daraus: } \zeta'_{11,B} \text{ für } (\alpha\beta\gamma\delta)_{11}. \end{array}\right\}\ \mathrm{V}$$

$$\left.\begin{array}{ll} & \textit{B auf b.} \\ (\alpha\beta\gamma\delta)_{10} & 2\overline{\lambda}_{10} = \dot{\lambda}_{10} + \lambda_{10,B} + \lambda'_{10,B}; \\ (\alpha\beta\gamma\delta)_{11} & 2\mu_{11} = \nu_{11} + \lambda_{11,B},\ 2\nu_{11} = \mu_{11} + \zeta'_{11,B} + \zeta_{11,B}; \\ & \text{daraus: } \zeta_{12,B} \text{ für } (\alpha\beta\gamma\delta)_{12}. \end{array}\right\}\ \mathrm{VI}$$

$$\left.\begin{array}{ll} & \textit{B in } \beta,\ \textit{A in } \alpha. \\ (\alpha\beta\gamma\delta)_{10} & 2\dot{\pi}'_{10} = \overline{\pi}'_{10} + \theta'_{10},\ 2\overline{\lambda}'_{10} = \dot{\lambda}'_{10} + \theta'_{10} + \lambda'_{10,A} + \lambda'_{10,B}; \\ (\alpha\beta\gamma\delta)_{11} & 2\mu'_{11} = \nu'_{11} + \lambda'_{11},\ 2\nu'_{11} = \mu'_{11} + \pi'_{11} + \zeta'_{11,A} + \lambda'_{11,B}; \\ & \text{daraus: } \zeta'_{12} \text{ für } (\alpha\beta\gamma\delta)_{12}. \end{array}\right\}\ \mathrm{VII}$$

$$\left.\begin{array}{ll} & \textit{B in } \beta \\ (\alpha\beta\gamma\delta)_{11} & 2\overline{\lambda}_{11} = \dot{\lambda}_{11} + \lambda_{11,B} + \lambda'_{11}; \\ (\alpha\beta\gamma\delta)_{12} & 2\mu_{12} = \nu_{12} + \lambda_{12,B},\ 2\nu_{12} = \mu_{12} + \zeta_{12,B} + \zeta'_{12}; \\ & \text{daraus: } \zeta_{13,B} \text{ für } (\alpha\beta\gamma\delta)_{13}. \end{array}\right\}\ \mathrm{VIII}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (\alpha\beta\gamma\delta)_{12} & 2\overline{\lambda}_{12} = \dot{\lambda}_{12} + \lambda_{11,A} + \lambda_{12,B}; \\ (\alpha\beta\gamma\delta)_{13} & 2\mu_{13} = \nu_{13} + \lambda_{13},\ 2\nu_{13} = \mu_{13} + \zeta_{13,A} + \zeta_{13,B}; \\ & \text{daraus: } \zeta_{14} \text{ für } (\alpha\beta\gamma\delta)_{14}{}^{1)}. \end{array}\right\}\ \mathrm{IX}$$

---

1) In § 103 werden insbesondere wichtig die Ergebnisse für die Signaturen $(00\gamma0)$, oder, wie sie dort heißen, $(l00)$, wo $l = \gamma$; es genügt, unsere Zahlen für diese Signaturen zu ermitteln, insbesondere die ζ.

In IV fehlt bei $(\alpha\beta\gamma\delta)_9$ die eine Relation; das hat folgenden Grund: In II ist eine endliche Zahl $\pi_{9,B}$ von axialen Korrelationen gefunden worden, bei denen B gegeben und A auf α liegt. Aber letzteres ist keine Bedingung: der Scheitel kann ja jeder beliebige Punkt der singulären Gerade sein. Also bedeutet das Resultat, daß es eine endliche Anzahl von axialen Korrelationen gibt, bei denen die singuläre Gerade des einen Bündels durch B geht; daher ist in IV kein System $\mathfrak{S}_a$ vorhanden und auch keine entsprechende Formel. Aus ähnlichen Gründen fehlt sie in VI, VIII, IX, und wenn axiale Korrelationen nur in endlicher Anzahl oder gar nicht vorhanden sind, gibt es auch keine axial-planaren. Man kann sich überhaupt leicht überzeugen, daß die Ausartungszahlen θ, π, λ zahlreich gleich null sind.

Wir haben es mit folgenden λ zu tun:

$$\lambda_{8,B},\ \lambda_{8,A};$$
$$\lambda_{9,B},\ \lambda_{9,A};\ \lambda_9';$$
$$\lambda_{10,B},\ \lambda_{10,A};\ \lambda_{10,B}',\ \lambda_{10,A}';$$
$$\lambda_{11,B},\ \lambda_{11,A};\ \lambda_{11}';$$
$$\lambda_{12,B},\ \lambda_{12,A};$$
$$\lambda_{13};$$

dagegen nur mit:

$$\pi_{8,B},\ \pi_{8,A};$$
$$\pi_{9,B},\ \pi_{9,A};\ \pi_9';$$
$$\pi_{10,B}',\ \pi_{10,A}';$$
$$\pi_{11}'.$$

Wir heben nun einige wichtige Ergebnisse hervor. Die Zahlen $\zeta_{9,B}$ geben wir aus der Tabelle 2, S. 308 der Math. Annalen, Bd. 12 wieder:

	(4010), (0410)	: 3	(0312)	: 9	(2005)	: 4
	(4001)	: 2	(0303)	: 6	(0232)	: 11
	(0401)	: 6	(2130), (1230)	: 3	(0223)	: 14
	(3110)	: 2	(2121)	: 4	(0214)	: 11
	(1310)	: 3	(2112), (1212)	: 5	(0205)	: 6
	(3101), (1301)	: 3	(2103)	: 4	(1150)	: 3
(9)	(2210)	: 2	(1221)	: 5	(1141)	: 6
	(2201)	: 2	(1203)	: 5	(1132)	: 9
	(3030), (0330)	: 3	(2050), (0250)	: 3	(1123)	: 10
	(3021)	: 5	(2041), (0241)	: 6	(1114)	: 9
	(3012)	: 5	(2032)	: 9	(1105)	: 5
	(3003)	: 3	(2023)	: 10	(1070), (0170)	: 3
	(0321)	: 6	(2014)	: 7	(1061), (0161)	: 6

	(1052), (0152)	: 12	(0134)	: 24	(0063)	: 24
	(1043)	: 18	(0125)	: 20	(0054)	: 38
	(1034)	: 20	(0116)	: 11	(0045)	: 44
(9)	(1025)	: 16	(0107)	: 6	(0036)	: 36
	(1016)	: 9	(0090)	: 3	(0027)	: 20
	(1007)	: 5	(0081)	: 6	(0018)	: 11
	(0143)	: 20	(0072)	: 12	(0009)	: 6.

$\mathfrak{z}_{9,B}$ ist die Ordnung der Fläche, die einem Punkte B entspricht; die Ordnung der Fläche, die einem Punkte A in bezug auf $(\alpha\beta\gamma\delta)_9$ korrespondiert, ist die Ordnung der Fläche, die einem B in bezug auf $(\beta\alpha\gamma\delta)_9$ korrespondiert. Diese beiden Ordnungen sind meistens ungleich; sie sind einander gleich, wenn $\alpha = \beta$; die übrigen Fälle zeigt die Tabelle.

Wir sehen ferner, daß diese Ordnung in allen Fällen 3 ist, 462
wo $\delta = 0$, also keine Geraden $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ gegeben sind, nach denen konjugierte Ebenen gehen sollen; mit Ausnahme von (3110) und (2210). Das läßt sich leicht direkt einsehen. Nehmen wir an, daß A', A'', A''' drei dem B korrespondierende Punkte sind, so erzeugen diese drei je dem Bündel B korrelativen, also untereinander kollinearen Bündel eine kubische Fläche, auf welcher die α Punkte A_i, in die drei entsprechende Strahlen zusammenlaufen, Doppelpunkte sind (Nr. 385), die β Geraden a_i, in die entsprechende Ebenen zusammenlaufen, vollständig liegen, und die γ Punkte $\mathfrak{A}_i$, in welchen entsprechende Ebenen sich schneiden, sich befinden. Wir wissen, daß, wenn A auf der kubischen Fläche sich bewegt, der Bündel zu sich so kollinear bleibt, daß immer entsprechende Strahlen nach den A_i, entsprechende Ebenen nach den a_i, $\mathfrak{A}_i$ gehen. Folglich sind alle Punkte der kubischen Fläche dem B korrespondierend.

Gäbe es nun außerhalb derselben noch einen weiteren korrespondierenden Punkt, so könnte man ihn mit allen möglichen Paaren von Punkten der Fläche (oder schon erhaltenen weiteren Flächen) zusammenstellen und würde mit allen den dabei sich ergebenden kubischen Flächen den ganzen Raum ausfüllen; was nicht zulässig ist, da einem B nur eine Fläche entspricht.

Genau dieselben Überlegungen gelten, wenn es sich um korrespondierende Punkte handelt, aus denen kollineare Bündel nach den entsprechend modifizierten Grundelementen $(\alpha\beta\gamma 0)_9$ gehen.

In den beiden Ausnahmefällen sondert sich von der kubischen Fläche eine Ebene ab: $A_1A_2A_3$, bzw. $A_1A_2\mathfrak{A}_1$. Die Fläche 2. Grades bei (2210) ist dieselbe, welche die Punkte enthält, die allein, in bezug auf $(2200)_8$, dem B entsprechen können, und entspricht auch sowohl bei (2210), als bei (2201).

Man kann die Zahl $\zeta_{9,B}$ auch folgendermaßen deuten. Sie gehöre zu $(\alpha, \beta, \gamma + 1, \delta)_9$; wenn A auf a sich bewegt, so umhüllt in den verschiedenen Bündeln A, welche dem B für $(\alpha\beta\gamma\delta)_8$ korrelativ sind, die Ebene, die dem festen Strahle $B\mathfrak{B}$ polar ist, einen Torsus von der Klasse $\zeta_{9,B}$, da sie so oft durch $\mathfrak{A}$ geht, oder die Ebene im festen Bündel B, die je dem Strahle von A nach dem festen Punkte $\mathfrak{A}$ polar ist, umhüllt einen Kegel $\zeta_{9,B}{}^{\text{ter}}$ Klasse.

Sie gehöre zu $(\alpha, \beta, \gamma, \delta + 1)_9$; A bewege sich ebenfalls auf der Gerade a; dann erzeugt in den Bündeln A, welche dem B für $(\alpha\beta\gamma\delta)_8$ korrelativ sind, der Strahl, welcher zu der festen Ebene $B\mathfrak{b}$ polar ist, eine Regelfläche vom Grade $\zeta_{9,B}$, und der Strahl in B, der je zu der Ebene von A nach der festen Gerade $\mathfrak{a}$ polar ist, einen Kegel $\zeta_{9,B}{}^{\text{ter}}$ Ordnung.

In den Fällen $(\alpha\beta\gamma 0)_8$, wo eine Korrelation zwischen A und B möglich ist (also mit Ausnahme von (2200)), sind diese Torsen, Regelflächen, Kegel eindeutig auf die Gerade a bezogen und vom Geschlechte 0. Bei den Signaturen (4000), (0400), (1300) ist der zuerst erwähnte Kegel 3. Klasse, hat also eine Doppelberührungsebene β^0; daher gibt es einmal auf a zwei Punkte A, bei denen die Bündel nach $(\alpha A_i, \beta a_i, \mathfrak{A})$ dem Bündel $B(\alpha b_i, \beta B_i, \beta^0)$ korrelativ, also zueinander kollinear sind; ihr Erzeugnis ist eine kubische Raumkurve, welche durch die $\alpha + 1$ Punkte A_i, $\mathfrak{A}$ geht und die $\beta + 1$ Geraden a_i, a zweimal trifft. Bei (3100) ist der Kegel 2. Klasse und hat keine doppelte Berührungsebene.

Es gibt daher eine kubische Raumkurve durch 5, 1, 2 gegebene Punkte und mit 1, 5, 4 gegebenen Doppelsekanten, dagegen keine durch vier Punkte und mit zwei Doppelsekanten.

Für dieselben vier Signaturen (4000), (0400), (3100), (1300) ist der an zweiter Stelle genannte Kegel bzw. von der Ordnung 2, 6, 3, 3, hat also 0, 10, 1, 1 Doppelkanten b^0. Im zweiten Falle kommen vier derselben durch axiale Korrelationen zustande, derartig, daß z. B. BB_4 die singuläre Axe in B und eine oder die andere Transversale von a_1, a_2, a_3, a die in A ist. Sehen wir von diesen ab, so erhalten wir, da die in ähnlicher Weise entstehende kubische Raumkurve durch die α Punkte A_i geht und die $\beta + 2$ Geraden a_i, a, $\mathfrak{a}$ zweimal trifft, daß es 0, 6, 1, 1 kubische Raumkurven gibt, welche durch 4, 0, 3, 1 gegebene Punkte gehen und 2, 6, 3, 5 gegebene Geraden zu Doppelsekanten haben. Fassen wir zusammen, so haben wir die teilweise schon (Nr. 206, 372) erhaltenen Sätze: 5, 4, 3, 2, 1, 0 Punkte und 1, 2, 3, 4, 5, 6 Doppelsekanten bestimmen 1, 0, 1, 1, 1, 6 kubische Raumkurven[1]).

Neu sind die beiden letzten Fälle.

---

1) Cremona, Journal f. Math., Bd. 60, S. 188; Sturm, Bd. 80, S. 128.

$\zeta_{10, B}$ ist die Ordnung der Kurve, die einem festen Punkte B in bezug auf $(\alpha\beta\gamma\delta)_{10}$ entspricht; wir entnehmen sie aus der Tabelle 4, S. 324 des angeführten Aufsatzes. 463

	(5000), (0500)	: 3	(0322)	: 12	(1160)	: 3
	(4100), (1400)	: 3	(0313)	: 18	(1151)	: 6
	(3200)	: 1	(0304)	: 15	(1142)	: 12
	(2300)	: 3	(2140), (1240)	: 3	(1133)	: 18
	(4020), (0420)	: 3	(2131), (1231)	: 6	(1124)	: 21
	(4011), (0411)	: 6	(2122)	: 8	(1115)	: 19
	(4002)	: 4	(2113)	: 10	(1106)	: 12
	(0402)	: 12	(2104)	: 8	(1080), (0180)	: 3
	(3120), (1320)	: 3	(1222)	: 10	(1071), (0171)	: 6
	(3111)	: 4	(1213)	: 11	(1062), (0162)	: 12
	(3102)	: 5	(1204)	: 11	(1053), (0153)	: 24
	(1311)	: 6	(2060), (0260)	: 3	(1044)	: 36
	(1302)	: 6	(2051), (0251)	: 6	(1035)	: 40
(10)	(2220)	: 3	(2042), (0242)	: 12	(1026)	: 33
	(2211)	: 4	(2033)	: 18	(1017)	: 21
	(2202)	: 5	(2024)	: 19	(1008)	: 13
	(3040), (0340)	: 3	(2015)	: 14	(0144)	: 40
	(3031), (0331)	: 6	(2006)	: 9	(0135)	: 50
	(3022)	: 10	(0233)	: 22	(0126)	: 45
	(3013)	: 9	(0224)	: 29	(0117)	: 28
	(3004)	: 6	(0215)	: 26	(0108)	: 17
			(0206)	: 16		

(00$\overline{10}$0)	: 3	(0046)	: 90
(0091)	: 6	(0037)	: 78
(0082)	: 12	(0028)	: 49
(0073)	: 24	(0019)	: 30
(0064)	: 48	(000$\overline{10}$)	: 18.
(0055)	: 76		

Hier sehen wir wieder, daß bei allen Signaturen $(\alpha\beta\gamma 0)_{10}$, mit Ausnahme von (3200), dem Punkte B eine kubische Raumkurve entspricht. Auch das ist unmittelbar einleuchtend. Sind A', A'' dem B korrespondierend, so erzeugen ihre kollinearen Bündel eine kubische Raumkurve, welche durch die A_i geht, die a_i zu Doppelsekanten hat, während die Ebenen, welche dem Strahle $B\mathfrak{B}_i$ entsprechen, in der durch $\mathfrak{A}_i$ gehenden Doppelsekante sich schneiden. Das bleibt alles bestehen, wenn A diese Kurve durchläuft, wobei der Bündel sich kollinear bleibt. Die ganze Kurve korrespondiert dem B.

und kein außerhalb gelegener Punkt, denn dieser würde mit A', A'' zu einer kubischen Fläche führen; während jetzt dem B doch nur eine Kurve korrespondieren darf.

Wenn $\gamma > 0$, so hat jeder Punkt B seine besondere korrespondierende kubische Raumkurve. Wenn aber auch $\gamma = 0$, also $\alpha + \beta = 5$ ist, so bestimmt B mit den α Doppelsekanten b_i und den β Punkten B_i eine kubische Raumkurve, außer, wenn $\alpha = 2$, $\beta = 3$; und allen Punkten B dieser Kurve ist dieselbe kubische Raumkurve korrespondierend, jedem Punkte der einen jeder der anderen. Die beiden Bündel der kubischen Raumkurven, der eine mit α gemeinsamen Punkten A_i und β gemeinsamen Doppelsekanten a_i, der andere mit α gemeinsamen Doppelsekanten b_i, β gemeinsamen Punkten B_i stehen in eindeutiger Beziehung.

Die Signatur

$$(2300) \qquad \left|\begin{matrix} A_1 A_2 a_1\ a_2\ a_3 \\ b_1\ b_2\ B_1 B_2 B_3 \end{matrix}\right|$$

macht eine Ausnahme; da ist jedem Punkt B wohl eine kubische Raumkurve assoziiert, aber jedem Punkte A, wie (3200) zeigt, eine Gerade. Der Punkt B bestimmt mit den drei Punkten B_i und den zwei Doppelsekanten b_i nicht eine kubische Raumkurve. Der ganze Bündel $(2b_i, 3B_i)$ kubischer Raumkurven befindet sich auf derselben Fläche 2. Grades β_0^2, welche durch die drei Punkte B_i und die beiden Geraden b_i bestimmt ist; denn alle Kurven des Bündels haben mit ihr sieben Punkte gemein. Durch einen Punkt außerhalb geht keine; durch jeden Punkt aber auf β_0^2 geht ein ganzer Büschel, und durch zwei Punkte der Fläche geht eine Kurve: es ist dies die kubische Raumkurve, welche durch diese beiden Punkte, die drei B_i geht und irgendeine Gerade aus der Regelschar auf β_0^2, zu der b_1, b_2 gehören, zweimal trifft, sie liegt auf der Fläche und trifft alle Geraden dieser Schar zweimal. Da man also von jedem Punkte der β_0^2 zu jedem anderen durch eine solche Kurve übergehen kann, so bleibt der Bündel B $(2b_i, 3B_i)$ zu sich kollinear, wenn B sich über β_0^2 bewegt. Die Kurve a_0^3 aus dem Bündel $(2A_i, 3a_i)$ die irgendeinem Punkte B von β_0^2 korrespondiert, korrespondiert allen Punkten dieser Fläche[1]).

Falls dagegen B außerhalb der Fläche β_0^2 liegt, so bleibt der Bündel B $(2b_i, 3B_i)$ zu sich kollinear, wenn B bewegt wird auf einem Strahl des Netzes $[b_1, b_2]$, wie der Schnitt mit der Ebene $B_1B_2B_3$ sofort zeigt. Den übrigen Kurven des Bündels $(2A_i, 3a_i)$ sind

---

1) Daraus läßt sich folgern, daß jedem Punkte von a_0^3 auch noch für $[2310]_{11}$ eine kubische Raumkurve korrespondiert, nicht bloß eine endliche Anzahl von Punkten, und für $(3220)_{12}$, $(3211)_{12}$ ein, bzw. zwei Punkte.

also die Strahlen des Netzes $[b_1, b_2]$ eindeutig zugeordnet, so daß allen Punkten einer Kurve des Bündels alle Punkte des zugeordneten Strahls des Netzes korrespondieren.

In der Ebene $B_1 B_2 B_3$ gibt es eine Kurve 4. Ordnung (unikursal), von welcher jedem Punkte B' eine Gerade a^1 der Regelschar $[a_1 a_2 a_3]$ zugeordnet ist, derartig, daß dem B' jeder Punkt von a^1 durch ∞^1 Korrelationen für (2300) korrespondiert und daher auch noch durch eine für (2310), bzw. (2301); es gibt einen Punkt auf a^1, der dem B' auch noch für (2320) oder (2311), aber keinen, der für (3300) korrespondiert.

Wir wollen zur Signatur $(3020)_8$ noch $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}, \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}'}$, zunächst einzeln, dann beide Paare zugleich hinzufügen, so erhalten wir einem Punkt B korrespondierend für die beiden $(3030)_9$ zwei kubische Flächen; ihnen ist die kubische Raumkurve gemein, welche dem B für $(3040)_{10}$ korrespondiert, also außerdem noch eine Kurve 6. Ordnung, zu der offenbar die drei Verbindungslinien der drei gemeinsamen Doppelpunkte A_1, A_2, A_3 gehören; also bleibt noch eine kubische Raumkurve. Jeder Punkt A derselben korrespondiert dem B durch zwei verschiedene Korrelationen für (3020), weil sonst Korrespondenz für (3040) sich ergeben würde, die doch nur für die Punkte der erstgenannten kubischen Raumkurve gilt. Die zwei Korrelationen bedingen einen ganzen Büschel, da es sich nur um konjugierte Strahlen handelt. So haben wir jedem Punkte B eine kubische Raumkurve von Punkten zugeordnet, die ihm in bezug auf $(3020)_8$ nicht bloß durch eine Korrelation, sondern durch einen Büschel von Korrelationen korrespondieren. Ähnliches ergibt sich bei (0320), (2120), (1220), (2040), (0240), (1060), (0160), (0080), nur ist die Kurve nicht immer 3. Ordnung.

Bei (0080) ist sie 6. Ordnung und geht durch die acht Punkte $\mathfrak{A}$.

Diese Kurve 6. Ordnung liegt auf allen Flächen 3. Ordnung, welche bei den aus (0080) hervorgehenden (0090) sich ergeben, und ist je zweien gemeinsam neben der zu $(00\overline{10}0)$ gehörigen kubischen Raumkurve, der sie achtmal begegnet (Nr. 383).

Das nächste Problem ist die Bestimmung der Ordnung ζ'_{10} der 464
Fläche, welche für $(\alpha\beta\gamma\delta)_{10}$ durch die einem Punkte B oder A korrespondierende Kurve erzeugt wird, wenn dieser Punkt eine Gerade b oder a durchläuft. Wir wiederholen die Tabelle nicht (sie findet sich a. a. O. Tab. 5 S. 334) und erwähnen hier bloß die Werte für die Signaturen $(\alpha\beta\gamma 0)_{10}$.

(5000), (0500) : 10,	(4020), (0420) : 10,
(4100), (1400) : 6,	(3120), (1320) : 9,
(3200), (2300) : 6,	(2200) : 8,

(3040), (0340) : 10,	(1160) : 10,
(2040), (0240) : 10,	(1080), (0180) : 10,
(2060), (0260) : 10,	$(00\overline{10}0)$: 10.

Auf den Flächen α^{10} 10. Ordnung, die einer b entsprechen, sind die Punkte A_i sechsfach, die Geraden a_i und die Punkte $\mathfrak{A}_i$ dreifach; diese Vielfachheiten sind geringer, in den Fällen, wo $\zeta'_{10} < 10$ ist[1]). Auf einer α^{10} gibt es 20 Geraden a', welche Axen von axialen Korrelationen für die betreffende Signatur $(\alpha\beta\gamma\delta)_{10}$ sind, deren zugehörige Axen b' die b treffen. 20 ist der Wert von π'_{10}. Zu diesen 20 Geraden gehören etwaige Verbindungslinien $(2A_i)$ von zwei Punkten A_i, Treffgeraden $(4a_i)$ von vier Geraden a_i und Geraden $(A_i, 2a_i)$ durch einen Punkt A_i, welche zwei a_i treffen.

Die Fläche 6. Ordnung bei (3200) ist eine Regelfläche, weil jedem B eine Gerade zugeordnet ist; und auf der Fläche 6. Ordnung bei (2300) ist die der Fläche $\beta_0{}^2$ korrespondierende $a_0{}^3$ doppelt.

465 Die nächste Aufgabe fordert die Bestimmung der Zahl $\zeta_{11,B}$ der Punkte A, die für $(\alpha\beta\gamma\delta)_{11}$ einem Punkte B korrespondieren (a. a. O. Tab. 6, S. 344). Für die Signaturen $(\alpha\beta\gamma 0)_{11}$ ist diese Zahl ausnahmslos 1. Und dies ist notwendig; denn zwei korrespondierende Punkte A würden sofort zu einer ganzen kubischen Raumkurve von korrespondierenden Punkten führen.

Damit erhalten wir bei diesen Signaturen $(\alpha\beta\gamma 0)_{11}$ je eine (in beiderlei Sinne) eindeutige Beziehung zwischen den Punkten der beiden Räume A und B, folglich interessante Beispiele der Cremonaschen eindeutigen Verwandtschaften zwischen zwei Räumen, mit denen wir uns später eingehend beschäftigen werden.

Bei der Signatur (3201) ist $\zeta_{11,B} = 1$, $\zeta_{11,A} = 2$; $\zeta_{11,A}$ bei (3201) ist nämlich $\zeta_{11,B}$ bei (2301). Wir erhalten eine einzweideutige Verwandtschaft, so daß jedem Punkte B ein Punkt A, jedem A aber zwei Punkte B entsprechen.

Bei allen andern Signaturen mit $\delta = 1$, nämlich: (5001), (4101), (4021), (3121), (2221), (3041), (2141), (2061), (1161), (1081), $(00\overline{10}1)$ ist $\zeta_B = \zeta_A = 2$, so daß jedem Punkte des einen Raumes zwei Punkte des anderen Raumes entsprechen, also sich eine zweizweideutige Verwandtschaft ergibt.

Heben wir die Signatur $(00\overline{11}0)$ hervor. Zerspalten wir sie in $(0080)\,{\mathfrak{A} \atop \mathfrak{B}}$ und $(0080)\,{\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'' \atop \mathfrak{B}'\mathfrak{B}''}$, so haben wir zu B gehörig eine kubische Fläche und eine kubische Raumkurve; von den neun Begegnungspunkten liegen acht auf der Kurve 6. Ordnung, deren Punkte dem B

1) Hinsichtlich der Ermittelung dieser Vielfachheiten müssen wir auf die ausführliche Abhandlung verweisen.

durch einen Büschel von Korrelationen für $(00\underline{8}0)$ korrespondieren; der neunte ist der einzige, der ihm in bezug auf $(00\overline{11}0)$ korrespondiert.

Besonders für diese Signatur $(00\overline{11}0)$ wäre es erwünscht, eine lineare Konstruktion des zu einem gegebenen B gehörigen A zu besitzen.

Werden zu (0090) verschiedene $\overset{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ gefügt, so erhalten wir auf der kubischen Fläche kubische Raumkurven aus einem bestimmten Netze, zu einer Doppelsechs gehörig (Nr. 378), je zwei mit einem gemeinsamen Punkte. Sei a eine Gerade aus dem Sextupel dieser Doppelsechs, dessen Geraden die Raumkurven zweimal treffen, und A, A' zwei Punkte der kubischen Fläche; durch sie geht eine der Raumkurven und die beiden zum Bündel B korrelativen untereinander kollinearen Bündel erzeugen sie; in a schneiden sich entsprechende Ebenen, demselben Strahle b von B entsprechend. Derselbe bleibt fest, wenn A' festgehalten wird, während A die kubische Fläche durchläuft, immer gehen die b entsprechenden Ebenen durch a. Es gibt daher sechs feste Strahlen in B, deren entsprechende Ebenen in den verschiedenen Bündeln, deren Scheitel A dem B in bezug auf (0090) korrespondieren und die kubische Fläche erfüllen, in eine Gerade zusammenlaufen.

In der erwähnten Tabelle 6 sind die Werte $\zeta'_{11,B} = \zeta''_{11,A}$ angegeben, die zugleich die Ordnung der Kurve der Punkte A, welche den Punkten B einer Gerade b, und die Ordnung der Fläche der B sind, welche den Punkten A einer Ebene α korrespondieren. $\zeta'_{11,B} = \zeta''_{11,A}$ für $(\beta\alpha\gamma\delta)_{11}$ gibt $\zeta'_{11,A} = \zeta''_{11,B}$ für $(\alpha\beta\gamma\delta)_{11}$, also zugleich die Ordnung der einen Gerade a entsprechenden Kurve und die Ordnung der einen Ebene β entsprechenden Fläche. Auf den einfachsten Fall $\delta = 0$ kommen wir gleich ausführlicher zurück.

In den meisten Signaturen $(\alpha\beta\gamma 1)_{11}$ sind beide ζ' (oder ζ'') gleich 22; eine Ausnahme bilden: (4101), (3121), (2221), wo sie 14, 20, 18 sind; und in (3201), die zu einer einzweideutigen Verwandtschaft führt, sind die beiden ζ' verschieden: $\zeta'_{11,B} = 12$, $\zeta'_{11,A} = 15$; d. h. wenn B eine Gerade durchläuft, beschreibt A eine Kurve 12. Ordnung, wenn A es tut, dann B eine Kurve 15. Ordnung.

Die meisten Signaturen $(\alpha\beta\gamma 1)_{11}$, nämlich (5001), (4021), (3041), (2141), (2061), (1161), (1081) und $(00\overline{10}1)$, führen zu einer zweizweideutigen Verwandtschaft, die in beiderlei Sinne vom 22. Grade ist.

Beide Zahlen sind für alle Signaturen $(\alpha\beta\gamma 0)_{11}$ gleich 11, so daß es sich um eindeutige Raumtransformationen handelt, die in beiderlei Sinne 11. Grades sind; nur bei (3210) oder (2310) sind sie 9.

Die Flächen α^{11}, β^{11} enthalten die A_i, B_i sechsfach, die a_i, b_i

und die $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ dreifach. Die Kurven a^{11}, b^{11} gehen durch die A_i, B_i dreifach und treffen die a_i, b_i siebenmal.

Wir begnügen uns hier mit den Signaturen, wo $\zeta'_{11,B} = 11$ ist. Bei allen diesen ist $\pi'_{11} = 20$; es gibt 20 Paare von Axen a', b' axialer Korrelationen, welche möglich sind. Die a' liegen einfach auf allen Flächen α^{11}, die b' auf β^{11}; unter ihnen befinden sich die etwaigen Geraden $(2A_i)$, $(4a_i)$, $(A_i, 2a_i)$, bzw. $(2B_i)$, usw. Bei zwei so einander korrespondierenden Geraden a', b' entspricht jeder Punkt der einen jedem der anderen.

Das sind solche Hauptkurven der Transformationen, welche wir später als außerordentliche bezeichnen werden. Ordentliche sind die a_0^{10}, b_0^{10}, die gleich zur Besprechung kommen.

Zwei Flächen α^{11}, welche zwei Ebenen β korrespondieren, haben außer den 20 Geraden a' und der Kurve a^{11}, welche der Schnittlinie korrespondiert, eine Kurve 90. Ordnung gemein. Jedem Punkte derselben sind zwei verschiedene Punkte in den beiden Ebenen zugeordnet, also eine kubische Raumkurve, und da diese jede der beiden Ebenen dreimal trifft, so ist die Kurve 90. Ordnung eine auf beiden α^{11} dreifache Kurve 10. Ordnung.

Es gibt also in jedem der beiden Räume eine Kurve 10. Ordnung a_0^{10}, b_0^{10}, von welcher jedem Punkte eine kubische Raumkurve in bezug auf $(\alpha\beta\gamma 0)_{11}$ (mit der oben genannten Ausnahme) korrespondiert. Zu ihr gehören die Geraden a_i, b_i; so daß eine Kurve $a_0^{10-\beta}$, $b_0^{10-\alpha}$ übrig bleibt, welche dreimal durch jeden A_i, B_i, einmal durch jeden $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ geht und jede a_i, b_i dreimal trifft. Sie ist dreifach auf allen α^{11}, bzw. β^{11}. Die kubische Raumkurve, welche z. B. einem $\mathfrak{B}_i$ korrespondiert, ist diejenige, die ihm in bezug auf $(\alpha, \beta, \gamma - 1, 0)_{10}$ zugehört. Jedem B_i aber korrespondiert eine kubische Fläche, diejenige, die ihm in bezug auf $(\alpha, \beta - 1, \gamma, 0)_9$ korrespondiert. Dadurch werden die B_i Hauptpunkte der Transformationen. Daraus, daß die Kurven b^{11}, die einer a entsprechen, jede b_i siebenmal treffen, folgt, daß jeder Gerade b_i eine Fläche 7. Ordnung korrespondiert.

Wir wollen noch wissen, welche Fläche durch die den Punkten von $b_0^{10-\alpha}$ korrespondierenden kubischen Raumkurven erzeugt wird. Dazu schneiden wir die einer Gerade a korrespondierende Kurve b^{11} mit der einer Ebene α korrespondierenden Fläche β^{11}. Zu den 121 Schnittpunkten gehört der dem Punkte $a\alpha$ assoziierte; ferner ist jeder der β Punkte B_i ein $6 \cdot 3$facher, und jeder der sieben Begegnungspunkte der b^{11} mit einer der α Geraden b_i ein dreifacher; es bleiben übrig $120 - 21\alpha - 18\beta = 3[40 - (7\alpha + 6\beta)]$ Punkte; das sind Schnittpunkte von b^{11} mit der auf β^{11} dreifachen Kurve $b_0^{10-\alpha}$, folglich beträgt deren Anzahl $40 - (7\alpha + 6\beta)$. Von so vielen Punkten dieser Kurve trifft die korrespondierende kubische Raumkurve die a; d. h.

die Fläche, die von den für eine $(\alpha\beta\gamma 0)_{11}$ korrespondierenden Raumkurven der Punkte von $b_0^{10-\alpha}$ erzeugt wird, ist von der Ordnung $40-(7\alpha+6\beta)$[1]).

Wir nehmen eine Signatur $(\alpha\beta\gamma 0)_{10}$, wo einer Gerade a eine Fläche 10. Ordnung β^{10} korrespondiert; unter deren $10(10-\alpha)$ Schnitten mit $b_0^{10-\alpha}$ befinden sich die β Punkte B_i je $6\cdot 3$fach, die γ Punkte $\mathfrak{B}_i$ je $1\cdot 3$fach, die drei Begegnungspunkte mit jeder der α Geraden b_i dreifach, ferner die $40-(7\alpha+6\beta)$ Punkte, die den Schnitten von a mit der eben besprochenen Fläche korrespondieren. Es bleiben:

$$60-12\alpha-12\beta-3\gamma=60-3(2\alpha+2\beta+\gamma)-6(\alpha+\beta)=30-6(\alpha+\beta)$$

Punkte übrig. Jeder dieser Punkte B_0 von $b_0^{10-\alpha}$ hat für $(\alpha\beta\gamma 0)_{10}$ außerhalb der kubischen Raumkurve, welche ihm für diese Signatur und auch noch für $(\alpha, \beta, \gamma+1, 0)_{11}$ korrespondiert, noch einen korrespondierenden Punkt auf a, so daß ihm, nach früheren Erörterungen (Nr. 462), eine ganze kubische Fläche entspricht, und da diese der Gerade a dreimal begegnet, so ist dieser Punkt B_0 dreifach auf β^{10}; und ihre Anzahl beträgt $10-2(\alpha+\beta)$.

Auch bei den Signaturen $(\alpha\beta\gamma 0)_{10}$, bei denen einer Gerade a eine Fläche von niedrigerer als 10. Ordnung entspricht, kommen wir zu diesem Ergebnisse, das jedoch, wenn es Wert haben soll, $\alpha+\beta<5$ voraussetzt.

Wenn also eine Signatur $(\alpha\beta\gamma 0)_{10}$ vorliegt, bei der $\gamma>0$, so gibt es — außer den $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ und den Punkten auf a_i, b_i, denen selbstverständlich eine Fläche korrespondiert statt einer Kurve — $10-2(\alpha+\beta)$ Punkte A_0, B_0 in jedem der beiden Räume, denen nicht bloß eine Kurve, sondern eine ganze Fläche korrespondiert; dieselbe ist im allgemeinen 3. Ordnung, nur bei (3120) korrespondiert den B_0, bei (2220) den A_0 und B_0 eine Fläche 2. Ordnung.

Mit der eindeutigen Korrespondenz, die im Falle $\alpha+\beta=5$, $\gamma=0$ zwischen den beiden Bündeln kubischer Raumkurven besteht, sind solche Ausnahmepunkte nicht vereinbar.

Nun kommen wir zur Zahl $\zeta_{12,B}$, der Ordnung der Fläche 466
der Punkte B, welche einen in bezug auf eine Signatur $(\alpha\beta\gamma\delta)_{12}$ korrespondierenden Punkt A haben. Diese Zahlen finden sich a. a. O. S. 357, Tab. 8. Für alle Signaturen, bei welchen $\delta=0$

1) Wir werden dafür in der Theorie der räumlichen Cremonaschen Transformationen eine Bestätigung erhalten: die β kubischen Flächen, welche den Punkten B_i zugehören, doppelt gerechnet, die α Flächen 7. Ordnung, die den b_i korrespondieren, und die oben besprochene Fläche von der Ordnung $40-(7\alpha+6\beta)$ setzen die sogenannte Jacobische Fläche des Gebüsches von Flächen 11. Ordnung α^{11} zusammen, welche von der Ordnung $4(11-1)=40$ sein muß.

ist, ergeben sich in beiden Räumen Flächen 4. Ordnung α^4, β^4, die durch diese korrespondierenden Punkte A, B erzeugt und in eindeutige Beziehung gebracht werden. Eine Ausnahme macht die Signatur: (3300), bei welcher die beiden Flächen 3. Ordnung sind. Auf jenen Flächen 4. Ordnung sind die Punkte A_i, B_i doppelt, die Geraden a_i, b_i, die Punkte $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ einfach; auf diesen Flächen 3. Ordnung die A_i, B_i einfach. Auf den α^4, β^4 liegen die Kurven a_0^{10}, b_0^{10} einfach.

Bei

$$(3300)\quad \left|\begin{matrix} A_1 A_2 A_3\, a_1\; a_2\; a_3 \\ b_1\; b_2\; b_3\, B_1 B_2 B_3 \end{matrix}\right|$$

haben wir in den Ebenen $\alpha_{123} = A_1 A_2 A_3$, $\beta_{123} = B_1 B_2 B_3$, wegen Nr. 231, zwei eindeutig bezogene Kurven 3. Ordnung von Punkten A und B, für welche

$$(A, \alpha_{123})\,(A_1, A_2, A_3, a_1, a_2, a_3) \;\overline{\wedge}\; (B, \beta_{123})\,(b_1, b_2, b_3, B_1, B_2, B_3);$$

daraus folgt, daß diese A und B sich durch planare Korrelation in bezug auf (3300) korrespondieren; diese Kurven sind die Schnitte der Flächen 3. Ordnung.

ζ'_{12} ist die Ordnung der Kurve, die einem ebenen Schnitte der einen Fläche auf der andern entspricht. Sie findet sich ebenfalls in der genannten Tabelle[1]). Diese Ordnung ist bei allen Signaturen $(\alpha\beta\gamma 0)_{12}$ gleich 14, nur bei (3300) gleich 9. Die Kurven 14. Ordnung gehen dreimal durch jeden A_i, B_i und treffen jede a_i, b_i achtmal, die Kurven 9. Ordnung tun jenes dreimal, dies sechsmal.

Wir kommen weiter zu der Zahl $\zeta_{13,B}$, der Ordnung der Kurve der Punkte B, welche für $(\alpha\beta\gamma\delta)_{13}$ korrespondierende Punkte haben. Wir finden sie a. a. O. S. 363, Tab. 9. Für alle Signaturen $(\alpha\beta\gamma 0)_{13}$ ohne Ausnahme ist $\zeta_{13,B} = 6$.

Und endlich ist ζ_{14} die Anzahl der Paare korrespondierender Punkte für $(\alpha\beta\gamma\delta)_{14}$. Da die Zahlen ζ_{14} in meiner Arbeit keine direkte Zusammenstellung gefunden haben[2]), so teile ich die Tabelle dieses Endergebnisses der ganzen Untersuchung in etwas abgekürzter Fassung mit, wobei von zwei zusammengehörigen Signaturen $(\alpha\beta\gamma\delta)$ und $(\beta\alpha\gamma\delta)$ mit ungleichen α, β nur die geschrieben wird, bei der $\alpha > \beta$.

Bei allen $(\alpha\beta\gamma 0)_{14}$ ist $\zeta_{14} = 4$, bei allen $(\alpha\beta\gamma 1)_{14}$ ist es $= 8$, bei allen $(\alpha\beta\gamma 2)_{14}$ ist es $= 16$, außer für (3302), wo es 13 ist; bei allen $(\alpha\beta\gamma 3)_{14}$ ist es $= 32$, außer für (3213), wo es 29 ist; ferner ist $\zeta_{14} = 52, 48, 61, 58$ bei (4104), (3204), (3124), (2224), sonst $= 64$

1) Durch Druckfehler steht bei (2151), (1251) 14 statt 28 und bei (2142), (1242) 28 statt 56.

2) Nur indirekt als μ_{13}, ν_{13} in Tab. 9.

bei den $(\alpha\beta\gamma 4)_{14}$; es ist = 116, 100, 96, 125, 119 bei (4015), (3115), (2215), (3035), (2135), sonst = 128 bei den $(\alpha\beta\gamma 5)_{14}$.

	(4006) : 168	(2046) : 244	(1066) : 256	(0086) : 256
	(3106) : 144	(2037) : 412	(1057) : 482	(0077) : 512
	(2206) : 136	(2028) : 592	(1048) : 804	(0068) : 964
	(3026) : 216	(2019) : 716	(1039) : 1152	(0059) : 1608
(14)	(3017) : 312	$(200\overline{10})$: 744	$(102\overline{10})$: 1404	$(004\overline{10})$: 2304
	(3008) : 372	(1146) : 238	$(101\overline{11})$: 1468	$(003\overline{11})$: 2808
	(2126) : 196	(1137) : 392	$(100\overline{12})$: 1376	$(002\overline{12})$: 2936
	(2117) : 280	(1128) : 560		$(001\overline{13})$: 2752
	(2108) : 344	(1119) : 688		$(000\overline{14})$: 2384[1].
		$(110\overline{10})$: 724		

(7000) ist die einzige Signatur, die wir bei dem Problem der Kollineation untersucht haben. Daß dieselbe Zahl 4 dort wie hier sich ergeben muß, fordert die Dualität.

Stellen wir die $\mathfrak{Z}$ für die Signaturen $(00\gamma 0)$ zusammen:

	$\mathfrak{Z}$	$\mathfrak{Z}'$
(0080)	1	
(0090)	3	
$(00\overline{10}0)$	3	10
$(00\overline{11}0)$	1	11
$(00\overline{12}0)$	4	14
$(00\overline{13}0)$	6	
$(00\overline{14}0)$	4	

Wir knüpfen einige Folgerungen an. 467

Es liege vor:

$$(0080)\quad \left|\begin{matrix}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_5\\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_4\mathfrak{B}_5\end{matrix}\right|;$$

man mache den Bündel C zu sich selbst korrelativ für diese Signatur; dann entsteht ein Polarbündel und auch die Strahlen nach $\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{A}_4$, sowie die nach $\mathfrak{B}_5$, $\mathfrak{A}_5$ sind konjugiert; d. h. wenn

$$(00\overline{10}0)\quad \left|\begin{matrix}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4\mathfrak{A}_5\mathfrak{B}_5\\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_4\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_5\mathfrak{A}_5\end{matrix}\right|$$

gegeben ist, so korrespondiert jeder Punkt sich selbst, liegt auf der ihm korrespondierenden kubischen Raumkurve.

1) In bezug auf die Zahl 2384 vgl. auch Giambelli, Memorie dell'Istituto Lombardo, Bd. 19 (1903), S. 192.

Wenn

$$(0090)\qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_5\mathfrak{A}_6 \\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_4\mathfrak{B}_5\mathfrak{B}_6 \end{vmatrix}$$

vorliegt, so wollen wir den Punkt A auf einer Gerade c bewegen; die je zugehörige kubische Fläche schneidet c in drei Punkten B; und ebenso entsprechen jedem Punkte B drei Punkte A. Von den sechs Koinzidenzen sind zwei die Schnitte von c mit dem Hyperboloid ($\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3$). Bei diesen beiden Punkten, bei denen drei doppelt konjugierte Strahlen in den konzentrischen Bündeln vorhanden sind, aber so liegen, daß ihre Verbindungsebenen durch die nämliche Gerade gehen, kann auf Polarbündel nicht geschlossen werden, wohl aber bei den vier andern Koinzidenzen, wir erhalten also eine Fläche 4. Ordnung von sich selbst korrespondierenden Punkten, bei denen die Korrelation ein Polarbündel wird. Sie ist die Fläche der Spitzen der Kegel 2. Grades, für welche $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$; ... $\mathfrak{A}_6$, $\mathfrak{B}_6$ konjugiert sind; in ihr vereinigen sich die beiden Flächen 4. Ordnung, die zu der Signatur $(00\overline{12}0)$ gehören, bei welcher die $\mathfrak{A}_7, \ldots \mathfrak{A}_{12}$ mit den $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_6$ und die $\mathfrak{B}_7, \ldots, \mathfrak{B}_{12}$ mit den $\mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_6$ identisch sind.

Fügen wir noch $\begin{matrix}\mathfrak{A}_7\\\mathfrak{B}_7\end{matrix}$ als 13. Paar hinzu, so erhalten wir die Kurve 6. Ordnung der Spitzen der Kegel 2. Grades, für welche auch noch $\mathfrak{A}_7$, $\mathfrak{B}_7$ konjugiert sind; in ihr vereinigen sich die beiden Kurven 6. Ordnung von $(00\overline{13}0)$. Und kommt noch $\begin{matrix}\mathfrak{A}_8\\\mathfrak{B}_8\end{matrix}$ hinzu, so hat man die vier Kegelspitzen des Büschels 2. Ordnung, für dessen Flächen acht Paare konjugierte Punkte gegeben sind. In ihnen fallen die vier Punkte des einen Raumes mit denen des andern bei $(00\overline{14}0)$ zusammen.

Wenn

$$(0009)\qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_9 \\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 \ldots \mathfrak{b}_9 \end{vmatrix}$$

gegeben ist, so gibt es (Tabelle von Nr. 461) zu jedem Punkte B, A eine Fläche 6. Ordnung von Punkten A, B, und auf einer Gerade c entsteht eine Korrespondenz [6, 6]; wir erhalten eine Fläche 12. Ordnung von Punkten C, in denen korrespondierende A und B sich vereinigen. Lassen wir $\mathfrak{a}_7$, $\mathfrak{b}_7$, $\mathfrak{a}_8$, $\mathfrak{b}_8$, $\mathfrak{a}_9$, $\mathfrak{b}_9$ mit $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{a}_3$ identisch sein, so zerfällt diese Fläche in zwei Flächen. Die eine, von der Ordnung 4, ist die der Punkte C, für welche die drei Schnittlinien $C(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1)$, $C(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2)$, $C(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3)$ in eine Ebene fallen. Durchläuft nämlich C die Gerade $\mathfrak{c}$, so ergeben sich drei Regelscharen, $[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1]$, $[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2]$, $[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3]$. Wir haben auf $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ projektive Punktreihen. Also liegen viermal vier entsprechende Punkte in einer Ebene (Nr. 208); d. h. die drei von demselben Punkte von $\mathfrak{c}$ ausgehenden Geraden der drei Regelscharen tun es[1]).

Bei einem Punkte C des andern Bestandteils 8. Ordnung ergibt sich, weil die drei Schnittlinien doppelt konjugierter Ebenen nicht in eine Ebene fallen (Nr. 311), ein Polarbündel.

Der Ort der Spitzen der Kegel 2. Grades, für welche $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1; \ldots \mathfrak{a}_6, \mathfrak{b}_6$ in konjugierten Ebenen liegen, ist eine Fläche 8. Ordnung; insbesondere also auch der Ort der Spitzen der Kegel 2. Grades, welche die Geraden $\mathfrak{a}_1 \equiv \mathfrak{b}_1, \ldots \mathfrak{a}_6 \equiv \mathfrak{b}_6$ tangieren[2]).

Die planaren Korrelationen führen auch zu einer Reihe interessanter Ergebnisse. Einige sind in § 37 behandelt. Entsprechende Strahlen der beiden projektiven Büschel, auf welche ja eine planare Korrelation hinausläuft, müssen Geraden $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$, nach denen konjugierte Ebenen gehen sollen, schneiden. Betrachten wir nur die Signaturen $(000\mathfrak{d})$ und die zugehörigen λ (bei denen der Zeiger B oder A nicht notwendig ist, weil $\alpha = \beta$, während der Ziffernzeiger mit $\mathfrak{d}$ gleich ist, so daß λ_δ genügt). Wir haben:

$$\lambda_8 = 16,\ \lambda_9 = 42,\ \lambda_9' = 96,\ \lambda_{10} = 60,\ \lambda_{10}' = 280,$$
$$\lambda_{11} = 440,\ \lambda_{11}' = 900,\ \lambda_{12} = 1560,\ \lambda_{13} = 3120^{3)}.$$

Dies bedeutet: Es sind zwei Gruppen von je $\mathfrak{d}$ einander zugeordneten Geraden gegeben: $\mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_\delta$; $\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_\delta$. Es soll die Anzahl der projektiven Büschel (A, α), (B, β) aufgesucht werden, in denen homologe Strahlen den $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ begegnen. Wir haben schon gefunden (Nr. 260, 261), daß, wofern der Büschel (B, β) fest ist, die Punkte A eine Fläche 4. Ordnung erzeugen und die Ebenen α eine Fläche 4. Klasse umhüllen, wenn $\mathfrak{d} = 6$; die A eine Kurve 8. Ordnung, die α einen Torsus 8. Klasse bilden, wenn $\mathfrak{d} = 7$, und daß es im Falle $\mathfrak{d} = 8$ acht Strahlenbüschel (A, α) gibt.

Die obigen Zahlen geben weiter:

$\mathfrak{d} = 8$: B oder β fest: die Punkte A erzeugen eine Fläche 16. Ordnung;

$\mathfrak{d} = 9$: B oder β fest: die A erzeugen eine Kurve 42. Ordnung;
B auf einer Gerade beweglich oder β um eine Gerade: die A erzeugen eine Fläche 96. Ordnung.

$\mathfrak{d} = 10$: B oder β fest: es gibt 60 Büschel (A, α);
B oder β mit einer Gerade inzident: die A erzeugen eine Kurve 280. Ordnung;

1) Fallen $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$ in eine Ebene, so löst sich diese von der Fläche 4. Ordnung ab, und es bleibt eine kubische Fläche. Davon ist ein Spezialfall der Ort der Punkte, die so beschaffen sind, daß die aus ihnen auf $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ gefällten Normalen in einer Ebene liegen.

2) Vgl. Math. Annalen 22, S. 587.

3) Vgl. Math. Annalen, Bd. 12, S. 291, 309, 320, 325, 335, 345, 353, 358, 365

B oder β mit einer Ebene inzident: die A erzeugen eine Fläche 280. Ordnung.

$\delta = 11$: die A, B erzeugen je eine Fläche 440. Ordnung; soll aber B mit einer Ebene oder β mit einem Punkte inzidieren, dann erzeugen die A eine Kurve 900. Ordnung.

$\delta = 12$: die A, B erzeugen je eine Kurve 1560. Ordnung.

$\delta = 13$: es gibt 3120 Paare (A, α), $B, \beta)$[1]).

Die Ebenen α erzeugen immer das duale Gebilde.

Hinsichtlich der axialen Korrelationen haben wir es nur mit den Ergebnissen des Problems der räumlichen Projektivität zu tun; begnügen wir uns mit den Signaturen $(00\gamma 0)$, so wissen wir, daß in den projektiven Ebenenbüscheln um die singulären Axen nach homologen Punkten $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ entsprechende Ebenen gehen müssen. Ferner kann bei diesen Korrelationen der Scheitel auf der singulären Axe beliebig verschoben werden, die Inzidenz des Scheitels mit einer gegebenen Ebene ist keine Bedingung mehr. Wenn $\gamma = 8$, B fest, A auf α liegt, so ist $\pi_8 = 8$; wir haben (Nr. 251)[2]) in jedem Raume einen Komplex 4. Grades; jeder Strahl des einen korrespondiert einem Strahle des andern. $\pi_8 = 8$ sagt aus: den Strahlen eines Kegels des Komplexes in dem einen Raume korrespondieren die Geraden einer Regelfläche 8. Grades im andern.

$\gamma = 9$; B fest: $\pi_9 = 6$; B auf b, A auf a: $\pi'_9 = 24$. In einem gegebenen Bündel gibt es sechs Geraden, welche korrespondierende Geraden haben (Nr. 251), und durchläuft der Scheitel B eine Gerade, so erzeugen diese eine Regelfläche 24. Grades.

$\gamma = 10$; B auf b: $\pi'_{10} = 20$. Es gibt in jedem der beiden Räume eine Regelfläche 20. Grades von Geraden, welche korrespondierende haben.

$\gamma = 11$; $\pi_{11} = 20$[3]). Es gibt in jedem der beiden Räume 20 Geraden, welche je eine korrespondierende im andern Raume haben. Vgl. Nr. 251.

---

1) Vielleicht kann, indem man die $\mathfrak{b}_1, \ldots \mathfrak{b}_{13}$ mit den $\mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_{13}$ identisch annimmt, daraus geschlossen werden, daß ein tetraedraler Komplex, der ja auf sechs Weisen durch zwei projektive Strahlenbüschel erzeugt werden kann, (Liniengeometrie, Bd. I, Nr. 253) durch 13 Strahlen so bestimmt ist, daß $\frac{1}{6} \cdot 3120 = 520$ tetraedrale Komplexe durch sie gehen. — Eine Bestätigung der Zahl 3120 findet sich auch bei Hirst, Proc. London Math. Soc., Bd. 21, S. 108. Natürlich ist auch Schubert für alle diese Zahlenergebnisse zu vergleichen.

2) Die dortige Signatur $(k, 0)$ bedeutet, daß $k + 3$ Paare zugeordneter Punkte gegeben sind.

3) Diese Zahlen π befinden sich a. a. O. S. 291, 309, 320, 335, 351; π'_{10}, π_{11} wurden schon gelegentlich (Nr. 465) erwähnt.